



高等学校数学系列教材

微积分辅导 与习题精解

(下册)

哈尔滨工程大学应用数学系 编

哈尔滨工程大学出版社

微积分辅导与习题精解

(下 册)

哈尔滨工程大学应用数学系 编

哈尔滨工程大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

微积分辅导与习题精解/哈尔滨工程大学应用数学系编.
—哈尔滨:哈尔滨工程大学出版社,2003.7
ISBN 7-81073-338-9

I.微… II.哈… III.微积分-高等学校-教学
参考资料 IV.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 050586 号

内 容 简 介

本书是配合哈尔滨工程大学应用数学系出版的《微积分教程》一书编写的高等数学辅导参考书。

本书共分上、下两册。上册内容包括:函数与极限、导数与微分、中值定理与导数应用、不定积分、定积分、定积分的应用、空间解析几何。下册内容包括:多元函数微分法、重积分、曲线与曲面积分、无穷级数、常微分方程。

每册共分两部分。第一部分是学习辅导及练习。每章总结了本章课程的基本内容,选择了典型例题,配置了练习题。第二部分选择了《微积分教程》中的部分习题给出详细解答。

本书是供各类工科及成人高校高等数学学习使用的辅导书籍,也可用作习题课教材,同时还可作为报考硕士研究生的参考书籍。

哈 尔 滨 工 程 大 学 出 版 社 出 版 发 行
哈 尔 滨 市 南 通 大 街 145 号 哈 工 程 大 学 11 号 楼
发 行 部 电 话 (0451)82519328 邮 编:150001
新 华 书 店 经 销
肇 东 粮 食 印 刷 厂 印 刷

*

开本 850mm×1 168mm 1/32 印张 8.75 字数 220 千字

2004 年 1 月第 1 版 2004 年 1 月第 1 次印刷

印数:1—4 000 册

定价:15.00 元

前 言

微积分课程是工科大专院校学生的必修课。这门课程学习的重要性不仅在于它是一门基础课、工具课,还在于它对学生抽象思维、逻辑推理能力的培养和训练;对运算技能、综合应用能力的锻炼和提高等方面都起到了其它课程难以替代的积极作用。而对本课程的学习除了有好的教材外还应有与之配套的学习辅导书,以助于对课程内容的理解与消化,对所学知识的巩固与扩展,对计算技能的掌握和提高。

本书由应用数学系许多教师在总结多年教学经验及积累的丰富教学资料的基础上编写。本书大部分习题是根据国家教委颁发的“高等工业学校高等数学课程教学基本要求”选配的。另有部分题目难度超出了“基本要求”的范围,供学习尚有余力的读者使用。

参加本书编写的教师有:林锰、于飞(第一章),范崇金(第二章),董衍习(第三章),沈艳(第四章),王锋(第五章),张晓威(第六章),李斌(第七章、第八章),卜长江(第九章),高振滨、贾念念(第十章),于涛(第十一章),邱威(第十二章),全书由陈林珠统稿。

本书的初稿曾在哈尔滨工程大学各工科专业学生的高等数学教学过程中试用,受到广大学生的欢迎和好评,对提高教学效果、教学质量及培养学生自学和综合能力上都起到了重要作用。

本书在编写及前期使用过程中得到了哈尔滨工程大学应用数学系领导和广大教师的鼓励和协助,得到了全校广大学生的支持和肯定,更得到了全校各级领导的帮助和指导,在此一并表示感谢。

由于水平所限,书中难免存在不妥之处,恳切希望广大读者批评指正。

编 者

2003年2月

目 录

第一部分 微积分辅导

第八章 多元函数微分法	3
一、基本内容	3
二、典型例题	13
三、练习题	28
测验题(八-1)	31
测验题(八-2)	32
第九章 重积分及其应用	34
一、基本内容	34
二、典型例题	40
三、练习题	43
测验题(九)	45
第十章 曲线积分与曲面积分	46
一、基本内容	46
二、典型例题	53
三、练习题	69
测验题(十)	71
第十一章 无穷级数	74
一、基本内容	74
二、典型例题	83
三、练习题	98
测验题(十一)	100
第十二章 微分方程	103

一、基本内容	103
二、典型例题	108
三、练习题	124
测验题(十二)	126
期末试题一	128
期末试题二	130
期末试题三	132
参考答案	134

第二部分 《微积分教程》习题精解

第八章 多元函数微分法	181
第九章 重积分及其应用	201
第十章 曲线积分与曲面积分	207
第十一章 无穷级数	235
第十二章 微分方程	249

微积分辅导

第一部分

第八章 多元函数微分法

一、基本内容

(一) 多元函数的基本概念

1. 基本概念

(1) 邻域 (2) 内点 (3) 边界点 (4) 开集 (5) 区域

2. 二元函数的极限与连续

(1) 二重极限定义

如果 $P(x_0, y_0)$ 是 $f(x, y)$ 定义区域的内点或边界点, A 是一个确定数. 若 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使当 $P(x, y) \in \overset{0}{\bigcup}(P_0, \delta) \cap D$ 时, 恒有 $|f(x, y) - A| < \epsilon$ 成立, 则称 $f(x, y)$ 当 $P(x, y) \rightarrow P_0(x_0, y_0)$ 时以 A 为极限. 记作

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)}} f(x, y) = A \quad \text{或} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A \quad \text{或} \quad \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A$$

(2) 二元函数的连续性

定义 若 $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$, 则称 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续. 如果 $f(x, y)$ 在区域 D 内每一点连续, 则称 $f(x, y)$ 在区域 D 内连续.

(3) 性质

1° 二元初等函数在其定义区域上连续.

2° 在有界闭区域 D 上的连续函数 $f(x, y)$ 必有界; 必能取到最大值、最小值; 必能取到介于最大值、最小值之间的任何值; 必能在

D 上一致连续.

(二) 偏导数和全微分

1. 偏导数

(1) 函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 分别对 x, y 的偏导数

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$f_y(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

偏导数还可以记作

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)}, z_x \Big|_{(x_0, y_0)}, \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{P_0}$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)}, z_y \Big|_{(x_0, y_0)}, \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{P_0}$$

(2) 若函数 $z = f(x, y)$ 在区域 D 上每一点 (x, y) 都有对 x (或对 y) 的偏导数, 就得到函数 $z = f(x, y)$ 在区域 D 上对 x (或对 y) 的偏导函数, 记作

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} f(x, y), z_x, f_x(x, y) \text{ 或 } \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} f(x, y), z_y, f_y(x, y)$$

(3) 高阶偏导数

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f_{xx}(x, y) \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_{xy}(x, y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f_{yx}(x, y) \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f_{yy}(x, y)$$

若函数 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 的邻域内有连续的二阶混合偏导数 $f_{xy}(x, y)$ 和 $f_{yx}(x, y)$, 则必有 $f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y)$.

2. 全微分

(1) 函数 $z = f(x, y)$ 在点 P_0 的全增量为

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$$

其中 $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, A, B 仅与 $P_0(x_0, y_0)$ 有关. 若 Δz 可如

上表示,则称 $f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 可微分,并称 $A\Delta x + B\Delta y$ 为函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 上的全微分,记作

$$dz = df = A\Delta x + B\Delta y$$

(2) 若函数 $f(x, y)$ 在区域 D 上的每一点 (x, y) 都可微,则称 $f(x, y)$ 在 D 上可微,此时它的全微分为

$$df = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$$

(3) 全微分的四则运算法则

设函数 $u = u(x, y), v = v(x, y)$ 可微,则

$$d(cu) = cdu \quad (c \text{ 常数})$$

$$d(u \pm v) = du \pm dv$$

$$d(uv) = u dv + v du$$

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2} \quad (v(x, y) \neq 0)$$

3. 全微分在近似计算中的应用

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

$$\approx f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$$

若记 $x = x_0 + \Delta x, y = y_0 + \Delta y$, 则

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$$

4. 函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处,其极限、连续、可导、可微之间的关系如图 8-1 所示.

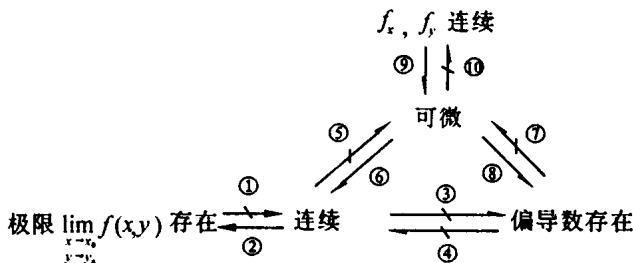


图 8-1

图 8-1 说明:

① 如果函数在点 (x_0, y_0) 极限存在, 但不一定连续, 例如

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 1, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

$f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 极限存在, 且 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2} = 0$, 但 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 不连续.

② 如果函数在点 (x_0, y_0) 连续, 即

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

则极限必存在.

③ 如果函数在点 (x_0, y_0) 连续, 但不一定存在偏导数, 例如

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \sqrt{x^2 + y^2} = 0 = f(0, 0)$$

而

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} \quad \text{—— 极限不存在}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{|\Delta y|}{\Delta y} \quad \text{—— 极限不存在}$$

故 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处连续, 但偏导数不存在.

④ 函数在点 (x_0, y_0) 有偏导数存在, 但不一定连续, 因为偏导数只是刻画函数沿 x 轴及 y 轴方向的变化率, 并不能给出函数沿其它方向的变化情况.

$$\text{例如, } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

虽然 $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$, 但 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 不连续.

⑤ 如果函数在点 (x_0, y_0) 连续,但不一定可微.

$$\text{例 } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{则 } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0 = f(0, 0)$$

$$\begin{aligned} \left(\because 0 \leq \left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| = \left| \frac{xy}{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \right| \right. \\ \left. \leq \frac{1}{2} |\sqrt{x^2 + y^2}| \rightarrow 0 \right) \end{aligned}$$

故 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 连续,但不可微.

⑥ 如果函数在点 (x_0, y_0) 可微,则 $\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(\rho)$, 从而 $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \Delta z = 0$, 故连续.

$$\text{⑦ 例如, } f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

$f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处偏导数存在,但不可微.

由此可知,对某个函数 $f(x, y)$, 求出其两个偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ 后,

$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$ 不一定就是 $f(x, y)$ 的全微分.

⑧ 如果函数在点 (x_0, y_0) 可微,则偏导数必存在,且 $dz = f_x dx + f_y dy$.

⑨ 定理:设函数 $z = f(x, y)$ 的偏导数 $f_x(x, y)$ 和 $f_y(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 连续,则函数 $f(x, y)$ 在点 P_0 可微分.

$$\text{⑩ 例如, } f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0; \\ 0, & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

$f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 可微分,但其偏导数在点 $(0, 0)$ 并不连续.

(三) 复合函数的微分法

1. 复合函数的求导法则

(1) 设 $z = f(x, y)$ 可微, 且 $x = \varphi(t), y = \psi(t)$ 对 t 可导, 则有

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

称之为 z 对 t 的全导数.

(2) 设 $z = f(u, v)$ 可微, $u = u(x, y), v = v(x, y)$ 可导, 则有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

(3) 上面的结果可以推广至三元或三元以上函数.

例 $z = f(x, u, v)$ 可微, $u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$ 存在偏导, 则有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

(4) 高阶偏导数, 求法类似于(1)、(2).

2. 一阶全微分形式不变性

设 $z = f(u, v)$ 可微, 则

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv$$

又若 $u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$, 则

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$$

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

(四) 隐函数的微分法

1. 一个方程的情形(条件略)

$$(1) F(x, y) = 0 \text{ 确定 } y = f(x), \text{ 则 } \frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, y)}{F_y(x, y)};$$

$$(2) F(x, y, z) = 0 \text{ 确定 } z = f(x, y), \text{ 则 } \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}; \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}.$$

2. 方程组情形(条件略)

由 $\begin{cases} F(x, y, u, v) = 0 \\ G(x, y, u, v) = 0 \end{cases}$ 确定 $\begin{cases} u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$, 则有

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, v)} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, y)}$$

注:在解决实际问题中,应首先明确方程组确定的是什么样的函数,其次上式公式虽然可以直接用,但通常我们是运用推导公式的方法来求导的.

(五) 微分法在几何上的应用

1. 空间曲线的切线与法平面

(1) 设 $\Gamma: x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, 其中 $x(t), y(t), z(t)$ 在 $t = t_0$ 时, 可令 $x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0), z_0 = z(t_0)$, 且 $x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)$ 不同时为 0, 则曲线 Γ 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切线与法平面方程分别为

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}$$

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0$$

切向量: $\{x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)\}$.

(2) 设 $\Gamma: y = y(x), z = z(x), (a \leq x \leq b)$, 则曲线 Γ 在点

$P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切线与法平面方程分别为

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{y'(x_0)} = \frac{z - z_0}{z'(x_0)}$$

$$(x - x_0) + y'(x_0)(y - y_0) + z'(x_0)(z - z_0) = 0$$

(3) 设 $\Gamma: \begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases}$, 则曲线 Γ 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的

切线与法平面方程为

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_{P_0}} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_{P_0}} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_{P_0}}$$

$$\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_{P_0} (x - x_0) + \begin{vmatrix} F_x & F_z \\ G_x & G_z \end{vmatrix}_{P_0} (y - y_0) + \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_{P_0} (z - z_0) = 0$$

2. 曲面的切平面与法线

(1) 设曲面 $\Sigma: F(x, y, z) = 0$, 其中 F 为可微函数, 且它的三个偏导数不同时为 0, 则曲面 Σ 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的切平面与法线方程分别为

$$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

其中 $\vec{N} = \{F_x(x_0, y_0, z_0), F_y(x_0, y_0, z_0), F_z(x_0, y_0, z_0)\}$ 称为曲面 Σ 在点 P_0 的法向量.

(2) 设曲面 $\Sigma: z = f(x, y)$, 其中 $f(x, y)$ 为可微函数, 则曲面 Σ 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的切平面与法线方程分别为

$$-f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + (z - z_0) = 0$$

$$\frac{x - x_0}{-f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{-f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{1}$$

$\vec{N} = \{-f_x(x_0, y_0), -f_y(x_0, y_0), 1\}$ 称为曲面 Σ 在点 P_0 的法

向量.此法向量的方向余弦为

$$\begin{aligned}\cos\alpha &= \frac{-f_x(x_0, y_0)}{\pm\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} & \cos\beta &= \frac{-f_y(x_0, y_0)}{\pm\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} \\ \cos\gamma &= \frac{1}{\pm\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}}\end{aligned}$$

3. 全微分的几何意义

曲面 $\Sigma: z = f(x, y)$, $dz = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$ 函数 $z = f(x, y)$ 在点 $M_0(x_0, y_0)$ 的全微分就是曲面 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的切平面上的点 $(x, y, z) = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$ 的 z 坐标的改变量 $z - z_0$.

(六) 方向导数和梯度

1. 方向导数

(1) 函数 $u = f(p)$ 在点 P_0 沿方向 $\vec{P_0P}$ 的方向导数为

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{P_0} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\rho} = \lim_{P \rightarrow P_0} \frac{f(P) - f(P_0)}{|\vec{P_0P}|}$$

(2) 若函数 $f(x, y, z)$ 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 可微, 则函数 $f(x, y, z)$ 在点 P_0 沿任一方向 l 的方向导数都存在, 且

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{P_0} &= f_x(x_0, y_0, z_0)\cos\alpha + f_y(x_0, y_0, z_0)\cos\beta \\ &\quad + f_z(x_0, y_0, z_0)\cos\gamma\end{aligned}$$

其中 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 是 l 的方向余弦.

2. 梯度

(1) 定义

设函数 $f(p)$ 在某区域 D 有定义, 若在点 $P_0 \in D$ 存在一个向量 $\vec{G}$, 使 $f(p)$ 在点 P_0 沿任意方向 l 的方向导数都等于这个向量在该方向上的投影 $\frac{\partial f}{\partial l} = \vec{G} \cdot \vec{l}^\circ$, 则称 $\vec{G}$ 为函数 f 在点 P_0 的梯度,