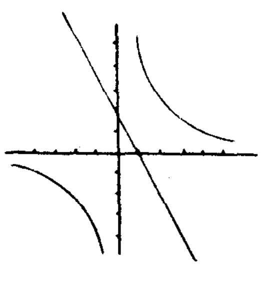
高中代数升学复习题解

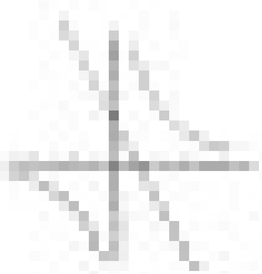
甘肃师大附中数学教研组编



甘肃人民出版社

高中代数分学复习指导

[illegible]



[illegible]

高中代数升学复习題解

甘肃师大附中数学教研組編

*

甘肃人民出版社出版(兰州市第一新村)

甘肃省书刊出版业营业許可証出字第001号

甘肃日报社印刷厂印刷　甘肃省新华书店发行

*

开本：787×1092毫米1/32・$7\frac{1}{8}$印張

1958年6月第一版　1960年5月第二版

1963年2月第三版　1963年4月第四版第六次印刷

印数：213,511——283,548

*

統一书号：13096・23

定　价：(7)0.76元

出版説明

这套高中各科升学复习题解，是我社约請甘肃师范大学附设中学各有关教研组教师编写的，包括代数、几何、三角、物理、化学五种，目的是为了帮助高中毕业生升学时复习参考和辅导在校高中学生以及社会青年自学之用。

《高中代数升学复习题解》的编写，基本上是按照中学数学教学大纲（修订草案）进行的。为了帮助读者系统地复习，编者在编排和选题方面力求具有代表性。此外，书中还穿插有：解放后历年各大学统一招生的绝大部分试题（题前标“△”）；解放前历年各大学的一部分入学试题和苏联各大学的一部分入学试题以及数学竞赛题（题前标“*”符号）；现行课本中一小部分较难的习题（题前标“☆”符号），以便于读者了解各大学对考生的基本要求和难题的解法。在解题方面，有的予以必要的证明，有的则在步骤上力求详细，尽量利于读者的复习。

本书是在甘肃师大数学系的指导和帮助下，由附中数学教研组王志亭同志编写的。自1958年出版以来，得到各地广大读者的热情关怀。近年来，又经编者进行多次修订补充，读者如有批评和意見，請及时函告。

1962年11月28日

目　录

第 一 章

数的概念、恒等变换及数学归納法

一、数的概念

1. 线段 AB 上所有的点能否说是一个集合？若是某直线上有一点 C，靠近 C 点的许多点能否说是一个集合？

答：线段 AB 上所有的点可以组成一个集合.

但靠近 C 点的许多点就不能说是一个集合．因为靠近 C 点的点很多，若说是一个集合的话，那末哪些点属于这个集合，哪些点不属于这个集合？很不确定.

2. a 和 $3a$ 哪一个大一些？

答：若 $a>0$，则 $3a>a$.

若 $a<0$，则 $3a<a$.

3. 在怎样的条件下，可以断定 $a-b$ 小于 $a+b$？

答：当 $b>0$ 时.

4. $2+\sqrt{3}$ 这个数是否是属于实数集合中的一个数？

答：因为二个实数的和、差、积、商（除数不为 0）都是实数，故 $2+\sqrt{3}$ 是一个实数，所以它是属于实数集合中的一个数.

5. 二个无理数的和、差、积、商可否为有理数？

答：二个无理数的和、差、积、商可能是有理数．如：

a. $(2+\sqrt{3})+(2-\sqrt{3})=4$, 4是有理数.

b. $\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$, 0是有理数.

c. $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=4-3=1$, 1是有理数.

d. $\dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=2$, 2是有理数.

6. 若A和B都是N的倍数，则它们的和、差、积是否是N的倍数？

答：若A和B都是N的倍数，则它们的和、差、积一定都是N的倍数。

其证法如下：

因 A、B 都是N的倍数。

设 $A=mN$，$B=nN$，（m,n都是整数）

则 $A+B=mN+nN=(m+n)N$，即其和是N的倍数。

$A-B=mN-nN=(m-n)N$，即其差是N的倍数。

$A\cdot B=mN\cdot nN=(mn)N$，即其积是$N$的倍数。

注意：本题的结论，在数学归纳法中将要用到。

7. 怎样的无理数就是已知的？试制作一个无理数。

答：所谓一个无理数是已知的，就是只要知道一个已知的法则，根据这个法则能逐步的写出它的每一个数位上的数字，就可以了。

例如：$\alpha=7.020020002\cdots\cdots$，

其组成法则：是在2的前边有一个零，两个零，三个零，……。

又如：$\beta=0.11101010001010001\cdots\cdots$，

其组成法则：当小数点后的位数是1或质数时，我们在这一位上放1，当小数点后的位数是合数时，在这一位上放0.

我们知道，α、β 的组成规律，都是无限的且是不循环的，所以它们都是无理数.

8. 试证 $lg3$ 是一个无理数.

証：设 $lg3$ 是一个有理数，

且 $lg3=\frac{n}{m}$，(m,n 为正整数)

则 $10^{\frac{n}{m}}=3$，

两端m次乘方 $\therefore 10^n=3^m$.

但3^m的个位数字绝对不能为0，而10^n的个位数字一定是0，所以它们是不相等的. 因之，设$lg3$是有理数就得到矛盾的结果，所以 $lg3$ 是无理数.

9. 不用绝对值符号写出式子 $|x-2|$ 来.

解：(1)假设$x\geq 2$，则 $x-2\geq 0$；

所以据绝对值的定义有：$|x-2|=x-2$.

(2)假设$x<2$，则 $x-2<0$；

所以据绝对值的定义有：

$|x-2|=-(x-2)=2-x$.

10. $2\sqrt{3}$是否为偶数？

答：因为偶数是指整数范围里能被2所整除的数，与无理数不相干，故$2\sqrt{3}$不能叫做偶数.

因式分解，一般是指有理整式的因式分解而言，有理整

式的因式分解，究竟分解到什么程度，一个式子是否能再进行因式分解，这都要取决于题目的要求．例如对x^4-4进行因式分解时，要求系数是有理数时，则

$$x^4-4=(x^2+2)(x^2-2);$$

要求系数是实数时，则

$$x^4-4=(x^2+2)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2});$$

要求系数是复数时，则

$$x^4-4=(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}i)(x-\sqrt{2}i).$$

而在根式运算或实指数幂的变换中，我们也常常要用到一些化积的变换，例如：

$$a+4m+4\sqrt{am}=(\sqrt{a}+2\sqrt{m})^2.$$

$$\begin{aligned}x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}&=(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{4}}-y^{\frac{1}{4}})\\&=(x^{\frac{1}{4}}+y^{\frac{1}{4}})(x^{\frac{1}{8}}+y^{\frac{1}{8}})(x^{\frac{1}{8}}-y^{\frac{1}{8}})\\&=\cdots\cdots\end{aligned}$$

对于后一个变换，倘若我们不是针对着问题化简的需要，它就可以无限制的分解下去．

因式分解常用的方法有：

Ⅰ．提取公因式法；

Ⅱ．分组集项分解法；

Ⅲ．应用简乘公式分解法；

Ⅳ．应用因式定理——综合除法分解法；

Ⅴ．二次三项式的因式分解，有：

（1）十字相乘法，

（2）求根分解法．

請读者注意一下二次三项式的因式分解．因为，利用这种方法不但可以分解一般的二次三项式，而且还可以分解二元二次式；而二元二次式的因式分解，在解二元二次方程组时，起着重要的作用．

11．3与$3+2i$谁大？谁小？又$-3i$是否是一个负数？

答：因为不但虚数无大小的规定，而且实数与虚数间也无大小的规定，故3与$3+2i$不能比较谁大，谁小．

又负数是一个小于0的数，小于的概念不能用于复数，故$-3i$不能叫做负数．

12．试举出一个数，它既是复数，也是实数，也是有理数，也是分数，也是正数．

答：适合于以上各种名称的数很多，只要是正数，也是分数的数都适合，如$\frac{2}{3}$，$\frac{7}{5}$，……

13．试举出一个数，它既是复数，也是虚数，也是无理数．

答：因为虚数与实数是对立的，不能有一个数既是虚数又是实数，而无理数是属于实数范围的，故不能有既是复数，也是虚数，也是无理数的数．

14．演算下列各式

$a.\ \sqrt{(-3)^2}$；$b.\ \sqrt{(3-x)^2}$；$c.\ \sqrt[3]{(m-n)^3}$．

解：$a.\ \sqrt{(-3)^2}=-(-3)=3.$

$b.\ \sqrt{(3-x)^2}=3-x.$（当$3\geq x$时）

$\sqrt{(3-x)^2}=-(3-x)=x-3.$（当$3\geq x$时）

$c.\ \sqrt[3]{(m-n)^3}=m-n.$

二 因式分解

1. 分解 $x^6+x^4+x^2$ 为因式.

解： 原式$=x^2(x^4+x^2+1)$

$=x^2[(x^4+2x^2+1)-x^2]$

$=x^2[(x^2+1)^2-x^2]$

$=x^2(x^2+x+1)(x^2-x+1)$.

2. 分解 $x^5+3x^4+x^3+3x^2+x+3$为因式.

解： 原式$=x^4(x+3)+x^2(x+3)+(x+3)$

$=(x+3)(x^4+x^2+1)$

$=(x+3)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$.

3. 分解 $x^4+x^2-2ax+1-a^2$ 为因式.

解： 原式$=x^4+1+x^2-ax-a^2-ax$

$=(x^2+1)^2-2x^2+x^2-ax-a^2-ax$

$=(x^2+1)^2-(x^2+ax)-(a^2+ax)$

$=(x^2+1)^2-x(x+a)-a(a+x)$

$=(x^2+1)^2-(x+a)(x+a)$

$=(x^2+1)^2-(x+a)^2$

$=(x^2+x+1+a)(x^2-x+1-a)$.

4. 分解 $x^3+6x^2+11x+6$ 为因式.

解： 原式$=x^3+3x^2+3x^2+11x+6$

$=x^2(x+3)+(x+3)(3x+2)$

$=(x+3)(x^2+3x+2)$

$=(x+3)(x+2)(x+1)$

注意： 关于三次式的因式分解，常是分裂二次项，分裂后，使前两项，后三项分别析因，再提出共同的因式，如本题的步骤进行．而分裂二次项

的标准，就是用试分的方法直到前两项与后三项有共同的因式为止.

5． 分解 $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$.

解： 原式 $=(x^2+x)^2+3(x^2+x)+2-12$

$$=(x^2+x)^2+3(x^2+x)-10$$

$$=(x^2+x+5)(x^2+x-2)$$

$$=(x^2+x+5)(x+2)(x-1)$$

注意：把 x^2+x 作为一项，将原式两个括号内的式子乘起来，然后分解.

6． 分解 $ax^2+bx^2-a^2x-b^2x-2abx+a^2b+ab^2$ 为因式.

解： 原式 $=(a+b)x^2-(a^2+2ab+b^2)x+a^2b+ab^2$

$$=(a+b)x^2-(a+b)^2x+ab(a+b)$$

$$=(a+b)[x^2-(a+b)x+ab]$$

$$=(a+b)(x-a)(x-b).$$

7． 分解 $6a^{4n}+b^{4k-1}c-18a^{5n+5}b^{3k-3}c$
$-15a^{2n+2}b^{2k-2}+45a^{3n+3}b^{4k-4}$
为因式.

解： 原式 $=3a^{2n+2}b^{k-1}[2a^{2n+2}c-6a^{3n+3}b^{2k-2}c$
$-5b^{k-1}+15a^{n+1}b^{3k-3}]$

$$=3a^{2n+2}b^{k-1}[2a^{2n+2}c(1-3a^{n+1}b^{2k-2})$$
$$-5b^{k-1}(1-3a^{n+1}b^{2k-2})]$$

$$=3a^{2n+2}b^{k-1}(1-3a^{n+1}b^{2k-2})(2a^{2n+2}c$$
$$-5b^{k-1})$$

注意：$a^{3k-3}=a^{k-1}\cdot a^{2k-2}$ 的指数运算.

8． 分解 $6x^4-x^3+16x^2-3x-6$ 为因式.

解： 用综合除法：

$$
\begin{array}{r|l}
\begin{array}{rrrrr}
6 & -1 & +16 & -3 & -6 \\
 & -3 & +2 & -9 & +6 \\
\hline
\end{array} & -\frac{1}{2} \\
2\,\begin{array}{|rrrr|}
6 & -4 & +18 & -12 \\
\hline
\end{array} & \frac{2}{3} \\
\begin{array}{rrrr}
3 & -2 & +9 & -6 \\
 & 2 & +0 & +6 \\
\hline
\end{array} & \\
3\,\begin{array}{|rrr}
3 & +0 & +9 \\
\hline
1 & +0 & +3
\end{array} &
\end{array}
$$

$\therefore$ 原式$=6\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)(x^2+3)$

$=(2x+1)(3x-2)(x^2+3)$.

☆9. 分解 $a^6+2a^5b-4a^4b^2-5a^3b^3-6a^2b^4$ 为因式。

解： 原式$=a^2(a^4+2a^3b-4a^2b^2-5ab^3-6b^4)$

后一因式是关于a和b的四次齐次式，只要注意齐次式的因式一定是齐次式，我们对后一因式就可用综合除法进行分解.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
1 & +2 & -4 & -5 & -6 & \underline{2} \\
 & 2 & +8 & +8 & +6 & \\
\hline
1 & +4 & +4 & +3 & & -3 \\
 & -3 & -3 & -3 & & \\
\hline
1 & +1 & +1 & & &
\end{array}
$$

$\therefore$ 原式$=a^2(a-2b)(a+3b)(a^2+ab+b^2)$.

10. 证明形式为a^4+4的数（a是任意整数$a\neq1$）是一合数.

证： $\because\ a^4+4=a^4+4a^2+4-4a^2$

$=(a^2+2)^2-(2a)^2$

$=(a^2+2a+2)(a^2-2a+2)$.

若 $a=1$，则$a^2-2a+2=1$ 故a^4+4是一个质数。

若　$a\neq 1$时，显然它是两个因数之积，故是合数。

•11. 分解　$x^2+2xy-8y^2+2x+14y-3$。

解： 原式$=(x-2y)(x+4y)+2x+14y-3$ ……(1)

（将二次齐次项分解因式而得）

设：原式$=(x-2y+m)(x+4y+n)$（m、n为参变量）

$=(x-2y)(x+4y)+(m+n)n+(4m-2n)y$

$+mn$ ……………………………………(2)

若　(1)、(2)两式的右端相等，比较其对应项的系数则得

$$\begin{cases} m+n=2 & \cdots\cdots(3) \\ 4m-2n=14 & \cdots\cdots(4) \\ m\cdot n=-3 & \cdots\cdots(5) \end{cases}$$

(3)与(4)联立解之得$m=3$，$n=-1$，代入(5)亦适合。

$\therefore$原式$=(x-2y+3)(x+4y-1)$。

注意： 这是一个二元二次式的因式分解，对于二元二次式的因式分解，用上面的方法时，叫做比较系数法。

12. 分解　$4x^2-4xy-3y^2-4x+10y-3$　为因式。

解1： 利用求根分解法：以x为主要文字整理后。

原式$=4x^2-4(y+1)x-(3y^2-10y+3)$

$$\therefore\quad x=\frac{4(y+1)\pm\sqrt{16(y+1)^2+4\cdot4(3y^2-10y+3)}}{8}$$

$$=\frac{4y+4\pm8(y-1)}{8}$$

$$=\frac{y+1\pm2(y-1)}{2}$$

$$=\frac{3y-1}{2}\text{ 或 }\frac{-y+3}{2}$$

$$\therefore\text{原式}=4\left(\qquad\frac{\quad 1}{2}\right)\left(x-\frac{-y+3}{2}\right)$$

$$=(2x-3y+1)(2x+y-3).$$

解2： 利用十字相乘法：

$$\text{原式}=4x^2-4(y+1)x-(3y^2-10y+3)$$

$$=4x^2-4(y+1)x-(3y-1)(y-3)$$

$$\begin{array}{ccc} 2 & \diagdown\!\!\!\!\diagup & -(3y-1) \\ 2 & \diagup\!\!\!\!\diagdown & y-3 \end{array}$$

$$\therefore\text{原式}=(2x-3y+1)(2x+y-3).$$

解3： 利用比较系数法：

$$\because\quad 4x^2-4xy-3y^2=(2x-3y)(2x+y)$$

$$\therefore\quad\text{原式}=(2x-3y+l)(2x+y+m)$$

（其中l、m是常数）

$$=(2x-3y)(2x+y)+(2x+y)l$$

$$+(2x-3y)m+lm$$

$$=4x^2-4xy-3y^2+2(l+m)x+(l-3m)y$$

$$+lm$$

由于恒等式的对应项的系数相等，

$$\therefore\begin{cases}2l+2m=-4\\ l-3m=10\\ lm=-3\end{cases}$$

解此方程组得： $l=1$， $m=-3$。

$$\therefore\quad\text{原式}=(2x-3y+1)(2x+y-3).$$

三 分式变换

△1. 若 $\frac{x}{a-b}=\frac{y}{b-c}=\frac{z}{c-a}$，而 a、b、c 各不相等时，则 $x+y+z$ 等于什么？

解： 设 $\frac{x}{a-b}=\frac{y}{b-c}=\frac{z}{c-a}=r$，

则 $x=(a-b)r$，

$y=(b-c)r$，

$z=(c-a)r$.

以上三式相加，则得：

$$x+y+z=(a-b)r+(b-c)r+(c-a)r$$
$$=r(a-b+b-c+c-a)=0.$$

2. 设 $x=\frac{4ab}{a+b}$，试求 $\frac{x+2a}{x-2a}+\frac{x+2b}{x-2b}$ 的值。

解： 原式 $=\frac{x-2a+4a}{x-2a}+\frac{x-2b+4b}{x-2b}$

$$=1+\frac{4a}{x-2a}+1+\frac{4b}{x-2b}$$

$$=1+\frac{4a}{\frac{4ab}{a+b}-2a}+1+\frac{4b}{\frac{4ab}{a+b}-2b}$$

$$=2+\frac{2}{\frac{2b}{a+b}-1}+\frac{2}{\frac{2a}{a+b}-1}$$

$$=2+\frac{2(a+b)}{b-a}+\frac{2(a+b)}{a-b}$$

$$=2-\frac{2(a+b)}{a-b}+\frac{2(a+b)}{a-b}=2.$$