

高等学校辅助教材

科源
教室

KY. Studio

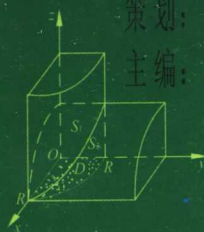
高等数学

(同济五版)

策划：严汛

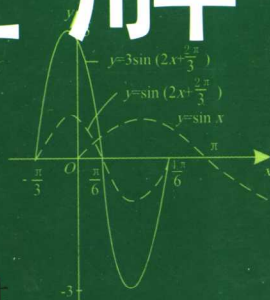
主编：高等数学考试研究室

下册



考点精析

习题全解



光明日报出版社

同济大学数学系教材



高等数学

(同济五版)

下册

考点精析

习题全解

高等数学(同济五版)
考点精析习题全解
(下册)

策划/ 严 汛

主编/高等数学考试研究室

光明日报出版社

内容提要

本书有以下特点：一、集中要点，方便检索。二、多级筛选，突出重点。三、考点精析，习题全解。四、循环复习，强化记忆。

《高等数学（同济五版）考点精析习题全解》（上、下册）有科学、完整的体例，读者如果科学合理的使用本书，必将获得双倍的效果。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学（同济五版）考点精析习题全解/高等数学考试研究室
主编、北京：光明日报出版社，2003 ISBN 7-80145-693-9

I. 高… II. 高… III. 高等数学-高等学校-解题
N. 013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第 004117 号

高等数学（同济五版）考点精析习题全解（下册）

高等数学考试研究室 主编

*

光明日报出版社出版发行

（北京永安路 106 号）

汉川市诚信印务有限责任公司印刷

各地新华书店经销

*

850 X 1168 毫米 32 开本

2003 年 1 月第一版 2003 年 1 月第一次印刷

印张：31.5 字数：877 千字

共二册 · 定价：31.60 元（本册 15.80 元）

如有印装问题 请向承印厂调换

前 言

同济大学数学教研室主编的《高等数学》是一套深受读者欢迎并获奖的优秀教材,被全国许多院校采用作为教科书,已印行 20 多年。目前,第五版已逐渐取代第四版。

由科源教室组织编写的《高等数学(同济四版)考点精析与习题全解》(上、下册)贴近学生的需要,率先在全国推出考点精析和习题全解,受到学生的普遍欢迎。为了适应教材升级的现状,我们在《高等数学(同济四版)考点精析与习题全解》(上、下册)的基础上,严格按照新教材的调整和体例,编写出《高等数学(同济五版)考点精析与习题全解》(上、下册)。

本书有以下特点:

一、集中要点,方便检索。根据教材顺序,将每章每节的知识点归纳集中在一起,并按教材顺序给出题解,便于读者整体掌握本章节内容,同时方便读者随时检索查阅这些知识点和题解。

二、多级筛选,突出重点。按照教材的要求,本书对各章、节内容进行了三级筛选。其中选学部分标出 * 号,未作记号的是一般的知识要点;将必须掌握、学期考试中必考或出现频率高的核心知识用【考点】号标出。这样,学习者可按照自身的情况制定学习方案。

三、考点精析,习题全解。“考点”既是每章每节的重点,通常也是难点,本书在各章和各节对其进行了较深入的解析。本书不仅对《高等数学》(同济五版)所附的全部习题进行了解答,而且在解题过程中,编写者对大部分习题的解题思路进行了精练的分析和引导,部分习题还给出了多套解题方案以活跃思路。

四、循环复习,强化记忆。本书每章后的复习首先对全章的内容作了一个小结,这是作者为读者特别提供的一种科学而行之有效的学习方法。运用这种“厚书薄读”的方法,读者可以从厚厚的两

本教材中迅速切入重点,全面、系统、提纲挈领、事半功倍地掌握所学知识。其次,遴选了各章的综合例题进行了精解。最后,给出了各章节总习题的解答。这样循环往复,学新温故,可以明晰思路,加深理解,灵活运用,强化记忆和重点掌握各章节的知识要点和考点。以上内容也为教师上习作课提供了素材。

《高等数学(同济五版)考点精析与习题全解》(上、下册)有科学、完整的体例,读者如果科学合理的使用本书,必将获得双倍的效果。为此,我们建议读者首先对每章每节的小结和知识要点及考点浏览一遍,并在今后的学习和解题中随时参照和检索所需要的公式和知识点。其次,注意本书着重指出的考点,在全面掌握高等数学知识的基础上,四两拨千斤,迅速抓住核心问题。第三,本书各章的复习小结和综合例题对理清思路、提高解题能力、强化记忆具有很重要的作用,希望读者学完上册或下册后,再重复读或做各章复习中的小结和综合例题,如此,无论是巩固学习或应试都会游刃有余。

本书由严汛策划,科源教室主编。本书的不足之处,恳请广大读者提出宝贵意见。

编 者

目 录

前 言

第八章 多元函数微分法及其应用	1
第一节 多元函数的基本概念	1
习题 8-1 解答	2
第二节 偏导数	7
习题 8-2 解答	8
第三节 全微分	12
习题 8-3 解答	13
第四节 多元复合函数的求导法则	17
习题 8-4 解答	18
第五节 隐函数的求导公式	24
习题 8-5 解答	25
第六节 多元函数微分学的几何应用	31
习题 8-6 解答	33
第七节 方向导数与梯度	38
习题 8-7 解答	39
第八节 多元函数的极值及其求法	44
习题 8-8 解答	45
*第九节 二元函数的泰勒公式	51
*习题 8-9 解答	52
*第十节 最小二乘法	56
*习题 8-10 解答	56
复习八 多元函数微分学	58
总习题八解答	71
第九章 重积分	83

第一节	二重积分的概念与性质	83
	习题 9-1 解答	84
第二节	二重积分的计算法	88
	习题 9-2 解答	90
第三节	三重积分	111
	习题 9-3 解答	113
第四节	重积分的应用	125
	习题 9-4 解答	126
第五节	含参变量的积分	138
	习题 9-5 解答	139
复习九	重积分的计算与应用	144
总习题九	解答	157
第十章	曲线积分与曲面积分	169
第一节	对弧长的曲线积分	169
	习题 10-1 解答	170
第二节	对坐标的曲线积分	176
	习题 10-2 解答	178
第三节	格林公式及其应用	184
	习题 10-3 解答	185
第四节	对面积的曲面积分	192
	习题 10-4 解答	193
第五节	对坐标的曲面积分	200
	习题 10-5 解答	202
第六节	高斯公式 通量与散度	207
	习题 10-6 解答	209
第七节	斯托克斯公式 环流量与旋度	213
	习题 10-7 解答	215
复习十	曲线、曲面积分的计算与应用	222
总习题十	解答	240

第十一章 无穷级数	253
第一节 常数项级数的概念和性质	253
习题 11-1 解答	251
第二节 常数项级数的审敛法	259
习题 11-2 解答	261
第三节 幂级数	267
习题 11-3 解答	269
第四节 函数展开成幂级数	274
习题 11-4 解答	275
第五节 函数的幂级数展开式的应用	280
习题 11-5 解答	281
*第六节 函数项级数的一致收敛性及 一致收敛级数的基本性质	286
*习题 11-6 解答	287
第七节 傅里叶级数	292
习题 11-7 解答	294
第八节 一般周期函数的傅里叶级数	302
习题 11-8 解答	303
复习十一 无穷级数	307
总习题十一解答	323
第十二章 微分方程	338
第一节 微分方程的基本概念	338
习题 12-1 解答	338
第二节 可分离变量的微分方程	341
习题 12-2 解答	341
第三节 齐次方程	348
习题 12-3 解答	349

目 录

第四节	一阶线性微分方程	355
	习题 12-4 解答	356
第五节	全微分方程	368
	习题 12-5 解答	368
第六节	可降阶的高阶微分方程	374
	习题 12-6 解答	374
第七节	高阶线性微分方程	383
	习题 12-7 解答	384
第八节	常系数齐次线性微分方程	392
	习题 12-8 解答	393
第九节	常系数非齐次线性微分方程	399
	习题 12-9 解答	399
*第十节	欧拉方程	411
	* 习题 12-10 解答	412
第十一节	微分方程的幂级数解法	416
	习题 12-11 解答	417
*第十二节	常系数线性微分方程组解法举例	423
	* 习题 12-12 解答	424
复习十二	常微分方程的解法与应用	432
	总习题十二解答	445
参考文献		461

第八章 多元函数微分法及其应用

第一节 多元函数的基本概念

知识要点与考点

一、平面点集 n 维空间

邻域 $U(P_0, \delta) = \{P \mid |PP_0| < \delta\}$, 内点, 边界点, 开集, (开)区域, 闭区域, 边界点, 有界点集, 有界(开或闭)域, n 维空间 $\{(x_1, x_2, \dots, x_n)\}$, 它的点及坐标 x_i , n 维空间中两点 $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 与 $Q(y_1, y_2, \dots, y_n)$ 间的距离

$$|PQ| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2}$$

等简单概念(叙述略, 见教材).

二、多元函数的概念

二元、三元函数的定义(略), 它们的定义域. $n \geq 2$ 时, n 元函数统称为多元函数, 可视为点函数, 记为

$$f(P) = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

为简单起见, 常以二元函数作代表进行讨论, 相应的结论可推广到更多元的函数中去.

二元函数的图形在空间常用曲面表示.

三、多元函数的极限 【考点】

定义 简述为 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |PP_0| = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ 时, 都有

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon.$$

记为

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = A.$$

或

$$f(x,y) \rightarrow A \quad (\rho \rightarrow 0, \rho = |PP_0|).$$

此种极限称为(二)重极限. 此外还有累次极限:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \text{ 与 } \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y).$$

累次极限是逐次对各变量取极限,它与重极限既有联系又有区别,不要将二者混淆.

通常说的多元函数的极限,是指重极限而言,它有与一元函数类似的一些运算法则.

四、多元函数的连续性 【考点】

定义 简述为

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0) \iff f(x,y) \in C(x_0,y_0).$$

不连续点称为间断点.

在有界闭区域上连续的多元函数也有最大最小值定理、介值定理等性质.一切多元初等函数在其定义区域上都是连续的.

习题 8—1 解答

1. 判断下列平面点集中哪些是开集、闭集、区域、有界集、无界集? 并分别指出它们的聚点所在的点集(称为导集)和边界.

$$(1) \{(x,y) | x \neq 0, y \neq 0\}; \quad (2) \{(x,y) | 1 < x^2 + y^2 \leq 4\};$$

$$(3) \{(x,y) | y \geq x^2\};$$

$$(4) \{(x,y) | x^2 + (y-1)^2 \geq 1\} \cap \{(x,y) | x^2 + (y-2)^2 \leq 4\}.$$

答 【理解开集、闭集、导集与边界的概念】

(1) 无界开集,其导集为 R^2 ,边界是 x 与 y 轴,因不连通,不是区域.

(2) 非开非闭集,但为有界集.导集为 $\{(x,y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$,而边界为:

$$\{(x,y) | x^2 + y^2 = 1\} \cup \{(x,y) | x^2 + y^2 = 4\}.$$

(3) 集合为连通开集,即为区域,是无界的.导集为 $\{(x,y) | y \geq x^2\}$,边界为: $\{(x,y) | y = x^2\}$

(4) 集合为闭的有界集,导集是集合自身,边界为:

$$\{(x,y) | x^2 + (y-1)^2 = 1\} \cup \{(x,y) | x^2 + (y-2)^2 = 4\}$$

2. 已知函数 $f(x,y) = x^2 + y^2 - xy \tan \frac{x}{y}$, 试求 $f(tx,ty)$.

解 【只须将 tx, ty 分别代换 x 与 y .】

$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= (tx)^2 + (ty)^2 - (tx)(ty)\tan \frac{tx}{ty} \\ &= t^2(x^2 + y^2 - xy\tan \frac{x}{y}) = t^2 f(x, y). \end{aligned}$$

注: 这时称 $f(x, y)$ 为二次齐次函数. 一般地, 若

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y),$$

则称 $f(x, y)$ 为 k 次齐次函数, 当 $k=0$ 时, 即有

$$f(tx, ty) = f(x, y),$$

则为零次齐次函数, 又简称为齐次函数.

3. 试证函数 $F(x, y) = \ln x \cdot \ln y$ 满足关系式

$$F(xy, uv) = F(x, u) + F(x, v) + F(y, u) + F(y, v)$$

证明 【须具体演算验证之.】

$$\text{左式} = \ln(xy) \cdot \ln(uv)$$

$$= (\ln x + \ln y)(\ln u + \ln v)$$

$$= \ln x \ln u + \ln x \ln v + \ln y \ln u + \ln y \ln v$$

$$= F(x, u) + F(x, v) + F(y, u) + F(y, v) = \text{右式}.$$

4. 已知函数 $f(u, v, w) = u^w + w^{u+v}$, 试求 $f(x+y, x-y, xy)$.

$$\begin{aligned} \text{解 } f(x+y, x-y, xy) &= (x+y)^{xy} + (xy)^{(x+y)+(x-y)} \\ &= (x+y)^{xy} + (xy)^{2x}. \end{aligned}$$

5. 求下列各函数的定义域:

$$(1) z = \ln(y^2 - 2x + 1); \quad (2) z = \frac{1}{\sqrt{x+y}} + \frac{1}{\sqrt{x-y}};$$

$$(3) z = \sqrt{x - \sqrt{y}}; \quad (4) z = \ln(y - x) + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}};$$

$$(5) u = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2 - z^2} + \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - r^2}} \quad (R > r > 0);$$

$$(6) u = \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

解 【与一元函数求定义域类似,可由解不等式或不等式组确定多元函数的定义域.】

(1) 由 $y^2 - 2x + 1 > 0 \Rightarrow y^2 > 2x - 1$, 定义域为

$$D = \{(x, y) | y^2 > 2x - 1\}.$$

若要画出定义域,可先作其边界的图形.此题区域的边界是开口向右的抛物线: $x = \frac{y^2+1}{2}$. 它将平面区域分为左、右两部分,由 $x < \frac{y^2+1}{2}$ 或 $y^2 > 2x - 1$ 知,所求区域位于边界抛物线的左方(读者想像图形或自绘草图验证.下同.应注意:画图时,不等式带等号的,边界要画实线,否则画虚线).

(2) $D = \{(x, y) | x + y > 0, x - y > 0\}$.

作出两条直线 $y = \pm x$, D 位于直线 $y = x$ (因 $y < x$) 的下方,且位于 $y = -x$ (因 $y > -x$) 的上方,故区域 D 位于第一、四象限为 $y = \pm x$ 所界的角形区域.

$$(3) \text{ 由 } \begin{cases} y \geq 0, \\ x - \sqrt{y} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y \geq 0, x \geq 0, \\ x^2 \geq y, \end{cases}$$

$$\therefore D = \{(x, y) | x \geq 0, x^2 \geq y \geq 0\}.$$

D 为位于第一象限且位于抛物线 $y = x^2$ 下方(因 $y \leq x^2$)的区域.

$$(4) \text{ 由 } \begin{cases} y - x > 0, \\ x \geq 0, \\ 1 - x^2 - y^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y > x \geq 0, \\ x^2 + y^2 < 1, \end{cases}$$

$$\therefore D = \{(x, y) | y > x \geq 0, x^2 + y^2 < 1\}.$$

D 为位于第一象限、在直线 $y = x$ 上方、且在单位圆内的扇形(八分之一的单位圆扇形).

$$(5) \text{ 由 } \begin{cases} R^2 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0, \\ x^2 + y^2 + z^2 - r^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow r^2 < x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2.$$

定义域 $V = \{(x, y, z) | r^2 < x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$.

在空间它是以原点为球心的空心球,不包括内边界,但包括外边界.

$$(6) \text{ 由 } \begin{cases} x^2 + y^2 \neq 0, \\ \left| \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right| \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x, y) \neq (0, 0), \\ z^2 \leq x^2 + y^2, \end{cases}$$

$$\therefore V = \{(x, y, z) | z^2 \leq x^2 + y^2, (x, y) \neq (0, 0)\}.$$

它是位于锥面 $z = \pm \sqrt{x^2 + y^2}$ 的外部且不含原点的空间区域.

6. 求下列各极限:

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{1-xy}{x^2+y^2};$$

$$(2) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}};$$

$$(3) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2-\sqrt{xy+4}}{xy};$$

$$(4) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1};$$

$$(5) \lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{\sin(xy)}{y};$$

$$(6) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2+y^2}}.$$

解 【求多元函数极限的常用方法有:利用四则运算法则与连续性,由变量代换化为一元函数求极限,利用初等变形,利用两边夹法则与无穷小性质,等等.】

(1) 由多元初等函数的连续性,知

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{1-xy}{x^2+y^2} = \frac{1-0}{0+1} = 1.$$

$$(2) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1+0}} = \ln 2.$$

(3) 分子、分母同乘以共轭因式 $2+\sqrt{xy+4}$, 去掉分母中的致零因子,得

$$\text{原式} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{4-(xy+4)}{xy(2+\sqrt{xy+4})} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-1}{2+\sqrt{xy+4}} = -\frac{1}{4}.$$

$$\begin{aligned} (4) \text{原式} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{(xy+1)-1} \\ &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (\sqrt{xy+1}+1) = 2. \end{aligned}$$

(5) 化为能利用一元函数极限公式的形式.

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \frac{\sin(xy)}{y} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (2,0)} \left[\frac{\sin(xy)}{xy} \cdot x \right] \\ &\stackrel{t=xy}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{x \rightarrow 2} x = 1 \cdot 2 = 2. \end{aligned}$$

(6) 变形化为能利用一元函数极限公式的形式.

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2+y^2}} &= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{2\sin^2 \frac{x^2+y^2}{2}}{\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)^2 \frac{4}{x^2+y^2}} \cdot e^0 \\ &\stackrel{2t=x^2+y^2}{=} \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin t}{t} \right)^2 \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2+y^2) = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

7. 证明下列极限不存在:

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y}; \quad (2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x-y)^2}.$$

证明 【对于重极限, 自变量的变化过程, 即点 $P \rightarrow P_0$ 的方式有无穷多种. 如果其中任意两种方式下求出的极限值不相等, 则原极限不存在.】

(1) 设动点 $P(x, y) \rightarrow P_0(0, 0)$ 是沿直线 $y=kx$ 的方式进行, 则

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x+y}{x-y} &= \lim_{y=kx \rightarrow 0} \frac{x+kx}{x-kx} \\ &= \frac{1+k}{1-k} \triangleq I \quad (k \neq 1). \end{aligned}$$

由于 k 可取不同的数值, 于是 $I = \frac{1+k}{1-k}$ 不是一个确定的常数, 故原极限不存在. 例如, 取 $k_1 = -1$, 则对应的 $I_1 = 0$; 取 $k_2 = 2$, 则 $I_2 = -3 \neq I_1$.

(2) 设动点 $P(x, y)$ 沿 $y=kx$ 趋于点 $P_0(0, 0)$, 则

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \lim_{y=kx \rightarrow 0} \frac{k^2 x^4}{k^2 x^4 + x^2(1-k)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k^2 x^2}{k^2 x^2 + (1-k)^2} = 0 \quad (k \neq 1); \end{aligned}$$

但当 $k=1$, 即沿 $y=x$ 的路线让 $P \rightarrow P_0$ 时, 又有

$$\text{原式} = \lim_{y=x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^4 + 0} = 1 \neq 0,$$

所以原极限不存在.

8. 函数 $z = \frac{y^2 + 2x}{y^2 - 2x}$ 在何处是间断的?

解 显见, 当且仅当 $y^2 - 2x = 0$ 时, 此函数是间断的. 即沿抛物线 $y^2 = 2x$, 函数都是间断的.

9. 证明 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$.

证明 【用重极限的定义或夹逼准则证之.】因为

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{1}{2} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\triangleq \frac{1}{2}\rho \quad (\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = |OP|, P(x, y)),$$

于是, $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = 2\varepsilon > 0$, 当 $0 < \rho < \delta$ 时, 有

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| < \varepsilon, \quad \therefore \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

10. 设 $F(x, y) = f(x)$, $f(x)$ 在 x_0 处连续. 证明: 对任意 $y_0 \in \mathbf{R}$, $F(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续.

证明 $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ 时, $x \rightarrow x_0$, 且有.

$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} F(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ (因 $f(x)$ 在 x_0 处连续)

而 $F(x_0, y_0) = f(x_0)$, 故 $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} F(x, y) = F(x_0, y_0)$, 即 $F(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续.

第二节 偏导数

知识要点与考点

一、偏导数的定义及其算法 【考点】

定义 简述为

$$f_x(x_0, y_0) = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_0, y=y_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

而 $f_x(x, y)$ 仍是 x, y 的函数, 仍称偏导(函)数, 其余类似.

算法: 把另外的变元视作常数(参数), 只对某变元运用一元函数求导法与公式计算之.

几何意义: $f_x(x_0, y_0)$ 为曲面 $z = f(x, y)$ 与平面 $y = y_0$ 的交线上点 $M_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 处切线的斜率.

二、高阶偏导数

二级及二阶以上的偏导数统称高阶偏导数. 其中 f_{xy}, f_{xy^2z} 等称为混合偏导数.