高等学校辅助教材

科源教室

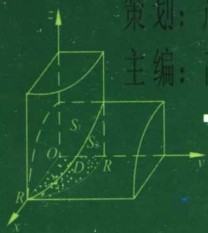
KY. Studio

高等数学

（同济五版）

策划：严 汛

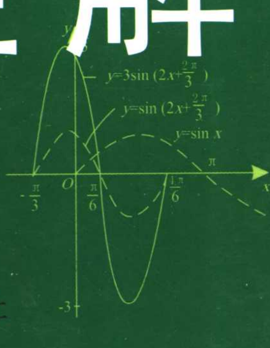
主编：高等数学考试研究室



下册

考点精析

习题全解



光明日报出版社

高等数学

（同济五版）

下册

考点精析

习题全解

高等数学（同济五版）

考点精析习题全解

（下册）

策划/严汛

主编/高等数学考试研究室

光明日报出版社

内容提要

本书有以下特点：一、集中要点，方便检索。二、多级筛选，突出重点。三、考点精析，习题全解。四、循环复习，强化记忆。

《高等数学（同济五版）考点精析习题全解》（上、下册）有科学、完整的体例，读者如果科学合理的使用本书，必将获得双倍的效果。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学（同济五版）考点精析习题全解/高等数学考试研究室主编、北京：光明日报出版社，2003 ISBN 7-80145-693-9

Ⅰ.高… Ⅱ.高… Ⅲ.高等数学-高等学校-解题

Ⅳ.013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第004117号

高等数学(同济五版)考点精析习题全解(下册)

高等数学考试研究室 主编

*

光明日报出版社出版发行

(北京永安路106号)

汉川市诚信印务有限责任公司印刷

各地新华书店经销

*

850 X 1168 毫米 32开本

2003年1月第一版 2003年1月第一次印刷

印张：31.5 字数：877千字

共二册 · 定价：31.60元(本册15.80元)

前　言

同济大学数学教研室主编的《高等数学》是一套深受读者欢迎并获奖的优秀教材，被全国许多院校采用作为教科书，已印行20多年。目前，第五版已逐渐取代第四版。

由科源教室组织编写的《高等数学(同济四版)考点精析与习题全解》(上、下册)贴近学生的需要，率先在全国推出考点精析和习题全解，受到学生的普遍欢迎。为了适应教材升级的现状，我们在《高等数学(同济四版)考点精析与习题全解》(上、下册)的基础上，严格按照新教材的调整和体例，编写出《高等数学(同济五版)考点精析与习题全解》(上、下册)。

本书有以下特点：

一、集中要点，方便检索。根据教材顺序，将每章每节的知识点归纳集中在一起，并按教材顺序给出题解，便于读者整体掌握本章节内容，同时方便读者随时检索查阅这些知识点和题解。

二、多级筛选，突出重点。按照教材的要求，本书对各章、节内容进行了三级筛选。其中选学部分标出 * 号，未作记号的是一般的知识要点；将必须掌握、学期考试中必考或出现频率高的核心知识用【考点】号标出。这样，学习者可按照自身的情况制定学习方案。

三、考点精析，习题全解。“考点”既是每章每节的重点，通常也是难点，本书在各章和各节对其进行了较深入的解析。本书不仅对《高等数学》(同济五版)所附的全部习题进行了解答，而且在解题过程中，编写者对大部分习题的解题思路进行了精练的分析和引导，部分习题还给出了多套解题方案以活跃思路。

四、循环复习，强化记忆。本书每章后的复习首先对全章的内容作了一个小结，这是作者为读者特别提供的一种科学而行之有效的学习方法。运用这种“厚书薄读”的方法，读者可以从厚厚的两

本教材中迅速切入重点，全面、系统、提纲挈领、事半功倍地掌握所学知识。其次，遴选了各章的综合例题进行了精解。最后，给出了各章节总习题的解答。这样循环往复，学新温故，可以明晰思路，加深理解，灵活运用，强化记忆和重点掌握各章节的知识要点和考点。以上内容也为教师上习作课提供了素材。

《高等数学(同济五版)考点精析与习题全解》(上、下册)有科学、完整的体例，读者如果科学合理的使用本书，必将获得双倍的效果。为此，我们建议读者首先对每章每节的小结和知识要点及考点浏览一遍，并在今后的学习和解题中随时参照和检索所需要的公式和知识点。其次，注意本书着重指出的考点，在全面掌握高等数学知识的基础上，四两拨千斤，迅速抓住核心问题。第三，本书各章的复习小结和综合例题对理清思路、提高解题能力、强化记忆具有很重要的作用，希望读者学完上册或下册后，再重复读或做各章复习中的小结和综合例题，如此，无论是巩固学习或应试都会游刃有余。

本书由严汎策划，科源教室主编。本书的不足之处，恳请广大读者提出宝贵意见。

编　者

目　录

第八章　多元函数微分法及其应用

第一节　多元函数的基本概念

知识要点与考点

一、平面点集 n 维空间

邻域 $U(P_0,\delta)=\{P \mid |PP_0|<\delta\}$，内点，边界点，开集，(开)区域，闭区域，边界点，有界点集，有界(开或闭)域，n 维空间 $\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\}$，它的点及坐标 x_i，n 维空间中两点 $P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $Q(y_1,y_2,\cdots y_n)$ 间的距离

$$|PQ| = \sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2+\cdots+(y_n-x_n)^2}$$

等简单概念(叙述略，见教材)．

二、多元函数的概念

二元、三元函数的定义(略)，它们的定义域．$n\geqslant 2$ 时，n 元函数统称为多元函数，可视为点函数，记为

$$f(P)=f(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

为简单起见，常以二元函数作代表进行讨论，相应的结论可推广到更多元的函数中去．

二元函数的图形在空间常用曲面表示．

三、多元函数的极限　【考点】

定义　简述为 $\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$，当 $0<|PP_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$ 时，都有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon.$$

记为
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=A.$$

或
$$f(x,y)\to A\ \ (\rho\to 0,\rho=|PP_0|).$$

此种极限称为(二)重极限．此外还有累次极限：

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0}f(x,y) \text{ 与 } \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0}f(x,y),$$

累次极限是逐次对各变量取极限，它与重极限既有联系又有区别，不要将二者混淆.

通常说的多元函数的极限，是指重极限而言.它有与一元函数类似的一些运算法则.

四、多元函数的连续性　【考点】

定义　简述为

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0)\Longleftrightarrow f(x,y)\in C(x_0,y_0).$$

不连续点称为间断点.

在有界闭区域上连续的多元函数也有最大最小值定理、介值定理等性质.一切多元初等函数在其定义区域上都是连续的.

习题 8—1 解答

1. 判断下列平面点集中哪些是开集、闭集、区域、有界集、无界集？并分别指出它们的聚点所在的点集（称为导集）和边界.

(1) $\{(x,y)\mid x\neq0,\ y\neq0\}$；　　(2) $\{(x,y)\mid 1<x^2+y^2\leqslant4\}$；

(3) $\{(x,y)\mid y>x^2\}$；

(4) $\{(x,y)\mid x^2+(y-1)^2\geqslant1\}\cap\{(x,y)\mid x^2+(y-2)^2\leqslant4\}$.

答　**【理解开集、闭集、导集与边界的概念】**

(1) 无界开集，其导集为 R^2，边界是 x 与 y 轴，因不连通，不是区域.

(2) 非开非闭集，但为有界集。导集为 $\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant4\}$，而边界为：

$$\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}\cup\{(x,y)\mid x^2+y^2=4\}.$$

(3) 集合为连通开集，即为区域，是无界的.导集为 $\{(x,y)\mid y\geqslant x^2\}$，边界为：$\{(x,y)\mid y=x^2\}$

(4) 集合为闭的有界集，导集是集合自身，边界为：

$$\{(x,y)\mid x^2+(y-1)^2=1\}\cup\{(x,y)\mid x^2+(y-2)^2=4\}$$

2. 已知函数 $f(x,y)=x^2+y^2-xy\tan\dfrac{x}{y}$，试求 $f(tx,ty)$.

解　【只须将 tx,ty 分别代换 x 与 y.】

$$f(tx,ty)=(tx)^2+(ty)^2-(tx)(ty)\tan\frac{tx}{ty}$$

$$=t^2(x^2+y^2-xy\tan\frac{x}{y})=t^2f(x,y).$$

注：这时称 $f(x,y)$ 为二次齐次函数.一般地，若

$$f(tx,ty)=t^kf(x,y),$$

则称 $f(x,y)$ 为 k 次齐次函数，当 $k=0$ 时，即有

$$f(tx,ty)=f(x,y),$$

则为零次齐次函数，又简称为齐次函数.

3. 试证函数 $F(x,y)=\ln x\cdot\ln y$ 满足关系式

$$F(xy,uv)=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v)$$

证明　【须具体演算验证之.】

左式 $=\ln(xy)\cdot\ln(uv)$

$=(\ln x+\ln y)(\ln u+\ln v)$

$=\ln x\ln u+\ln x\ln v+\ln y\ln u+\ln y\ln v$

$=F(x,u)+F(x,v)+F(y,u)+F(y,v)=$ 右式.

4. 已知函数 $f(u,v,\omega)=u^{\omega}+\omega^{u+v}$，试求 $f(x+y,x-y,xy)$.

解　$f(x+y,x-y,xy)=(x+y)^{xy}+(xy)^{(x+y)+(x-y)}$

$=(x+y)^{xy}+(xy)^{2x}.$

5. 求下列各函数的定义域：

(1) $z=\ln(y^2-2x+1)$；　　(2) $z=\dfrac{1}{\sqrt{x+y}}+\dfrac{1}{\sqrt{x-y}}$；

(3) $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$；　　(4) $z=\ln(y-x)+\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$；

(5) $u=\sqrt{R^2-x^2-y^2-z^2}+\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-r^2}}$ $(R>r>0)$；

(6) $u=\arccos\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 【与一元函数求定义域类似，可由解不等式或不等式组确定多元函数的定义域.】

(1) 由 $y^2-2x+1>0 \Longrightarrow y^2>2x-1$，定义域为

$$D=\{(x,y)\mid y^2>2x-1\}.$$

若要画出定义域，可先作其边界的图形. 此题区域的边界是开口向右的抛物线：$x=\dfrac{y^2+1}{2}$，它将平面区域分为左、右两部分，由 $x<\dfrac{y^2+1}{2}$ 或 $y^2>2x-1$ 知，所求区域位于边界抛物线的左方(读者想像图形或自绘草图验证. 下同. 应注意：画图时，不等式带等号的，边界要画实线，否则画虚线).

(2) $D=\{(x,y)\mid x+y>0, x-y>0\}$.

作出两条直线 $y=\pm x$，D 位于直线 $y=x$(因 $y<x$)的下方，且位于 $y=-x$(因 $y>-x$)的上方，故区域 D 位于第一、四象限为 $y=\pm x$ 所界的角形区域.

(3) 由 $\begin{cases} y\geqslant 0, \\ x-\sqrt{y}\geqslant 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y\geqslant 0, x\geqslant 0, \\ x^2\geqslant y, \end{cases}$

$$\therefore \quad D=\{(x,y)\mid x\geqslant 0, x^2\geqslant y\geqslant 0\}.$$

D 为位于第一象限且位于抛物线 $y=x^2$ 下方(因 $y\leqslant x^2$)的区域.

(4) 由 $\begin{cases} y-x>0, \\ x\geqslant 0, \\ 1-x^2-y^2>0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y>x\geqslant 0, \\ x^2+y^2<1, \end{cases}$

$$\therefore \quad D=\{(x,y)\mid y>x\geqslant 0, x^2+y^2<1\}.$$

D 为位于第一象限、在直线 $y=x$ 上方、且在单位圆内的扇形(八分之一的单位圆扇形).

(5) 由 $\begin{cases} R^2-x^2-y^2-z^2\geqslant 0, \\ x^2+y^2+z^2-r^2>0 \end{cases} \Longrightarrow r^2<x^2+y^2+z^2\leqslant R^2.$

定义域 $$V=\{(x,y,z)\mid r^2<x^2+y^2+z^2\leqslant R^2\}.$$

在空间它是以原点为球心的空心球，不包括内边界，但包括外边界.

(6) 由 $\begin{cases} x^2+y^2\neq 0, \\ \left|\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} (x,y)\neq(0,0), \\ z^2\leqslant x^2+y^2, \end{cases}$

$$\therefore \quad V=\{(x,y,z)\mid z^2\leqslant x^2+y^2, (x,y)\neq(0,0)\}.$$

它是位于锥面 $z=\pm\sqrt{x^2+y^2}$ 的外部且不含原点的空间区域.

6. 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)}\dfrac{1-xy}{x^2+y^2}$；　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$；

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{2-\sqrt{xy+4}}{xy}$；　　(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$；

(5) $\lim\limits_{(x,y)\to(2,0)}\dfrac{\sin(xy)}{y}$；　　(6) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}$.

解　【求多元函数极限的常用方法有：利用四则运算法则与连续性，由变量代换化为一元函数求极限，利用初等变形，利用两边夹法则与无穷小性质，等等.】

(1)由多元初等函数的连续性，知

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{1-xy}{x^2+y^2}=\frac{1-0}{0+1}=1.$$

(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)}\dfrac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{\ln(1+e^0)}{\sqrt{1+0}}=\ln 2.$

(3)分子、分母同乘以共轭因式 $2+\sqrt{xy+4}$，去掉分母中的致零因子，得

$$\text{原式}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{4-(xy+4)}{xy(2+\sqrt{xy+4})}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{-1}{2+\sqrt{xy+4}}=-\frac{1}{4}.$$

(4)原式 $=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy(\sqrt{xy+1}+1)}{(xy+1)-1}$

$=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(\sqrt{xy+1}+1)=2.$

(5)化为能利用一元函数极限公式的形式.

$$\lim_{(x,y)\to(2,0)}\frac{\sin(xy)}{y}=\lim_{(x,y)\to(2,0)}\left[\frac{\sin(xy)}{xy}\cdot x\right]$$

$$\xlongequal{t=xy}\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}\cdot\lim_{x\to2}x=1\cdot2=2.$$

(6)变形化为能利用一元函数极限公式的形式.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)e^{x^2y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2\sin^2\dfrac{x^2+y^2}{2}}{\left(\dfrac{x^2+y^2}{2}\right)^2\dfrac{4}{x^2+y^2}}\cdot e^0$$

$$\xlongequal{2t=x^2+y^2}\frac{1}{2}\lim_{t\to0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)=\frac{1}{2}\cdot1\cdot0=0.$$

7. 证明下列极限不存在：

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x+y}{x-y}$；　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$.

证明 【对于重极限，自变量的变化过程，即点 $P\to P_0$ 的方式有无穷多种. 如果其中任意两种方式下求出的极限值不相等，则原极限不存在.】

(1)设动点 $P(x,y)\to P_0(0,0)$是沿直线 $y=kx$ 的方式进行，则

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+y}{x-y}=\lim_{y=kx\to 0}\frac{x+kx}{x-kx}$$

$$=\frac{1+k}{1-k}\triangleq I\quad(k\neq 1).$$

由于 k 可取不同的数值，于是 $I=\dfrac{1+k}{1-k}$不是一个确定的常数，故原极限不存在. 例如，取 $k_1=-1$，则对应的 $I_1=0$；取 $k_2=2$，则 $I_2=-3\neq I_1$.

(2)设动点 $P(x,y)$沿 $y=kx$ 趋于点 $P_0(0,0)$，则

$$原式=\lim_{y=kx\to 0}\frac{k^2x^4}{k^2x^4+x^2(1-k)^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{k^2x^2}{k^2x^2+(1-k)^2}=0\quad(k\neq 1);$$

但当 $k=1$，即沿 $y=x$ 的路线让 $P\to P_0$ 时，又有

$$原式=\lim_{y=x\to 0}\frac{x^4}{x^4+0}=1\neq 0,$$

所以原极限不存在.

8. 函数 $z=\dfrac{y^2+2x}{y^2-2x}$在何处是间断的？

解 显见，当且仅当 $y^2-2x=0$ 时，此函数是间断的. 即沿抛物线 $y^2=2x$，函数都是间断的.

9. 证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

证明 【用重极限的定义或夹逼准则证之.】因为

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|=\frac{\sqrt{x^2\cdot y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\leqslant\frac{1}{2}\,\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\triangleq \frac{1}{2}\rho \quad (\rho = \sqrt{x^2+y^2} = |OP|, P(x,y)),$$

于是，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta=2\varepsilon>0$，当 $0<\rho<\delta$ 时，有

$$\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-0\right|<\varepsilon, \quad \therefore \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}=0.$$

10. 设 $F(x,y)=f(x)$，$f(x)$ 在 x_0 处连续，证明：对任意 $y_0\in \boldsymbol{R}$，$F(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续.

证明　$(x,y)\to(x_0,y_0)$ 时，$x\to x_0$，且有，

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} F(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$（因 $f(x)$ 在 x_0 处连续）

而 $F(x_0,y_0)=f(x_0)$，故 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} F(x,y)=F(x_0,y_0)$，即 $F(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续。

第二节　偏导数

知识要点与考点

一、偏导数的定义及其计算法　【考点】

定义　简述为

$$f_x(x_0,y_0)=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)}{\Delta x}.$$

而 $f_x(x,y)$ 仍是 x,y 的函数，仍称偏导（函）数，其余类似.

算法：把另外的变元视作常数（参数），只对某变元运用一元函数求导法与公式计算之.

几何意义：$f_x(x_0,y_0)$ 为曲面 $z=f(x,y)$ 与平面 $y=y_0$ 的交线上点 $M_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 处切线的斜率.

二、高阶偏导数

二级及二阶以上的偏导数统称高阶编导数. 其中 f_{xy}，f_{xy^2z} 等称为混合偏导数.