

工程电磁场数值计算 理论方法及应用

周克定 等著

高等教育出版社

前 言

1864年,麦克斯韦综合库伦、安培、法拉第等人的基本实验定律,提出位移电流的概念,建立了完备的电磁场理论,在数学上概括为麦克斯韦方程组。它预见到电磁波的存在以及电磁波与光波的一致性。

1887年,赫兹用实验证明了麦克斯韦理论的正确性之后,电磁场理论的研究进入了全盛时期。在工程方面,电工设备的研制与发明,电能和电信息的产生、传输、控制和应用等技术都进入了蓬勃发展的阶段。可以说,电磁场理论对人类社会文明的进步,起着极其巨大的推动作用。

工程上解电磁场问题的基本任务是:首先根据物理场域和媒质特性建立数学模型,即用按麦克斯韦理论导出的控制方程,结合定解条件及源函数构成的边界值问题(或初边值问题),求解出符合实际的场分布(有时是反问题,求源分布)。

电磁场边值问题的解法有解析法、模拟法、图解法和数值分析法等。近二十余年来,由于高速度、大容量电子计算机的广泛应用和电算技术的进步,数值法得到了迅速的发展。根据离散方式和待求量的不同选择,数值分析法又分多种多样,而且在继续发展,方兴未艾。

本书是一部论述工程电磁场数值计算的理论、方法及应用的学术著作,介绍了著者近年来的研究成果,全书共十五章。第一章介绍基本理论,对电磁场解的多值性与唯一性、规范的意义与确定、涡流分析中标量电位的产生与消除、多种数值计算方法的原理、以及有限元插值函数的选择和电磁场数值计算方法的数学概括等都作了较详细的讨论。第二章介绍有限元法的前处理,讨论了网格自动生成、误差估计和自适应理论。第三章介绍了 ICCG 改进的新方法和三维场量图象显示等后处理技术。第四章介绍了电磁场边界元分析法,对非线性问题的处理、瞬变涡流场的计算和高阶矢量位函数的应用等作了较详细的阐述并有相应的实例计算。第五章介绍了汽轮发电机在不同运行工况下端部漏磁场和温度场的分析与计算,对进相运行作了较全面的探讨。第六章介绍了汽轮发电机突发短路时端部绕组电磁力计算的理论与实例,并有力分布显示。接下去的七章比较全面地介绍了电力变压器几个有关问题的研究:三相三柱五柱不同结构型式铁芯磁场和损耗分布的分析与计算;工作磁通密度、绝缘套筒尺寸、油流平均速度和油道设置情况等因素改变时铁芯温度场分布的变化;变压器油箱夹件拉板中漏磁分布及附加损耗计算和波阻抗的应用;线圈区的漏磁场及突发短路电动力计算,不同线圈排列方案漏磁场、电磁力的比较;用有限元与解析法相结合的计算方法求低压大电流引线漏磁场及其在箱壁箱盖中引起的附加损耗;波过程的数值分析,全波冲击和截波冲击电压响应;铁芯磁场三维分布及磁密波形的高精度微机测试系统和测试结果的分析。第十四章介绍了在无损检测中的应用,漏磁、涡流、远场效应三种检测方法的机理及检测装置和结果分析。第十五章介绍了在高能物理磁元件设计中的应用,二维三维软件包设计磁透镜和回旋加速器主磁铁的实例分析。

从第二章起,每章都是著者科研成果的总结,与工程实际联系紧密。各章内容有相对的独立性与完整性,并且都编制了完整的计算程序,由于篇幅限制,未能同书印出。

本书著者有:第一章周克定,第二、三、九章周剑明,第四章邵可然,第五章胡敏强、张炳军,

第六章张炳军, 第七、八章辜承林, 第十章陈子痛、程志光, 第十一章邹玲、周克定, 第十二章席自强、张文灿, 第十三章傅靖、周克定, 第十四章司家屯、曲民兴, 第十五章樊明武, 最后由周克定统稿和校定全文。重庆大学江泽佳教授审阅了全稿, 提出了许多宝贵的意见和建议, 高等教育出版社的同志给予了大力支持和帮助, 著者在此谨致衷心的感谢。

在编写过程中, 曾参阅了大量有关资料(多数已列入各章的“参考文献”中), 并利用了一些单位的实验数据和图表曲线, 在此向这些文献资料的作者和有关单位表示感谢。

编撰这样一本学术专著, 对我们是一次尝试。由于著者人数多, 水平有限, 工作时间很紧, 切磋考虑不周, 缺点错误和不当之处在所难免, 恳切地希望读者指正批评。

周克定

1993.7.10 于武汉

目 录

第一章 理论基础

1.1 电磁场数值计算的发展过程和当前概况	1	1.9 T 法	30
1.1.1 发展过程的简单回顾	1	1.9.1 理论基础	30
1.1.2 当前概况综述	1	1.9.2 加权积分方程	31
1.2 电磁场的基本方程和亥姆霍兹定理	2	1.9.3 连续性条件和规范的选择	32
1.3 场解的多值性与唯一性	7	1.10 棱边单元法	35
1.3.1 位的多值性	7	1.10.1 理论基础	35
1.3.2 场解的唯一性	8	1.10.2 在磁场计算中的应用	37
1.4 不同媒质分界面上的边界条件,边界条件与源的等价性	11	1.10.3 在电场计算中的应用	40
1.4.1 不同媒质分界面上的边界条件	11	1.11 二阶矢量位法	42
1.4.2 边界条件与源的等价性	13	1.12 表面阻抗法	43
1.5 电介质极化的等效源及其所产生的电场	13	1.13 罚函数法	47
1.6 磁化磁质的等效源及其所产生的磁场	15	1.13.1 理论基础	47
1.6.1 理论基础	15	1.13.2 在磁场计算中的应用	49
1.6.2 用假想磁荷和磁偶极子求场	16	1.14 双标量位法	50
1.6.3 用等效电流求场	17	1.14.1 理论基础	51
1.7 三维涡流问题有限元分析, \mathbf{A} 法	19	1.14.2 加权积分方程	53
1.7.1 三维涡流场 \mathbf{A} 、 ϕ - \mathbf{A} 法的离散化一般公式	21	1.15 有限元法的插值函数与非协调元	54
1.7.2 \mathbf{A} 、 ϕ - ψ 法	24	1.15.1 有限元法与里兹法	54
1.8 涡流分析中的标量电位和修正矢量磁位及 \mathbf{A}^* - ψ 法	27	1.15.2 插值多项式的项数与次数	54
1.8.1 涡流分析中的自由电荷与标量电位	27	1.15.3 相容性协调性与完备性	56
1.8.2 修正矢量磁位和 \mathbf{A}^* - ψ 法	28	1.15.4 插值多项式的次数与微分方程阶数的关系	58
		1.15.5 叠层有限元插值函数的特点	61
		1.15.6 非协调元	62
		1.16 电磁场数值计算理论的数学概括	64
		1.16.1 理论基础	64
		1.16.2 加权余量法的正交投影原理	65
		参考文献	66

第二章 电磁场有限元网格自动生成方法

2.1 有限元网格自动生成方法综述···	71	2.5 三维有限元网格自动生成方法···	84
2.2 实体模型自动三角化表述·····	74	2.5.1 变压器铁芯剖分·····	84
2.3 计算二维及三维 Delaunay 三角化 和约束 Delaunay 三角化的 方法·····	76	2.5.2 扫描法生成三维网格·····	84
2.3.1 Delaunay 三角化计算算法·····	76	2.5.3 任意三维实体剖分新方法·····	85
2.3.2 计算二维和三维 Delaunay 三角化 和约束 Delaunay 三角化的新 算法·····	77	2.6 有限元后验误差估计与网格自适 应加密·····	86
2.4 有限元网格控制的新思想·····	80	2.6.1 引言·····	86
2.4.1 基本原理·····	80	2.6.2 误差模与收敛速度·····	87
2.4.2 有限元网格生成方法·····	81	2.6.3 后验误差估计方法·····	87
2.4.3 用一个参数 GRAD 进一步总体控制 网格分布·····	82	2.6.4 网格自适应加密·····	89
2.4.4 网格事后加密·····	83	2.6.5 计算实例·····	90
		2.7 MAGTOOLS: 电磁场有限元集成 模拟系统·····	94
		2.8 小结·····	99
		参考文献·····	99

第三章 大型稀疏有限元方程组快速求解法

3.1 概述·····	103	3.7 改进不完全 LDL ^T 分解的“半-行- 和”方法·····	113
3.2 CG 算法和 ICCG 算法·····	103	3.8 非线性各向异性媒质中三维电磁 场计算 N-R 有限元迭代新 公式·····	116
3.3 截断误差对 ICCG 的重要影响···	105	3.9 约束条件的通用处理方法·····	120
3.4 节点优化编号对 ICCG 收敛性的 影响·····	106	3.10 小结·····	123
3.5 材料特性对 ICCG 收敛性的 影响·····	107	参考文献·····	123
3.6 用与 N 成正比的时间快速求解 N 阶 SPD 有限元方程·····	109		

第四章 边界积分方程和边界元法

4.1 边界元法基础·····	125	4.2.6 时间步长的确定·····	139
4.2 瞬态涡流问题的边界元法·····	127	4.2.7 小结·····	140
4.2.1 概述·····	127	4.3 非线性媒质电磁场问题的边界元 法·····	140
4.2.2 边界积分方程·····	127	4.3.1 概述·····	140
4.2.3 数值离散化过程·····	129	4.3.2 非线性恒定磁场问题的边界元法···	140
4.2.4 计算实例·····	131	4.3.3 非线性恒定磁场问题的“单调迭代” 法·····	142
4.2.5 电压源激励下槽内导体的瞬态 响应·····	136		

4.3.4	非线性涡流问题的边界元法	143	的边界元法	160
4.3.5	计算实例	144	4.5.1	二阶矢量位及其与磁通密度的关系式
4.3.6	小结	145		160
4.4	有限元和边界元的耦合解法	146	4.5.2	间接边界积分方程及边界元离散
4.4.1	概述	146		160
4.4.2	轴对称涡流问题的 FE-BE 耦合法	146	4.5.3	计算实例
4.4.3	涡流问题与透入深度无关的有限元法	150		162
4.4.4	二维涡流问题的“铰链型”(Hinged)有限元法	152	4.5.4	小结
4.4.5	铁磁导体和高频激励下涡流趋肤问题的 FE-BE 耦合法	157		163
4.4.6	小结	159	附录 4.1	指数积分函数 $Ei[x]$ 的多项式和有理式逼近
4.5	用二阶矢量位计算三维涡流问题			163
			附录 4.2	K、E 函数的多项近似式
				164
			附录 4.3	式(4-69)在三角形单元上面积分的解析表达式
				165
			参考文献	166

第五章 汽轮发电机对称稳定运行时端部涡流场和温度场计算

5.1	概述	170	5.4	端部压圈压指温度场的边界元计算
5.2	汽轮发电机端部三维涡流场的有限元法	171		182
5.2.1	基本假设及数学模型	171	5.4.1	压圈压指温度场的边值问题
5.2.2	三维涡流场有限元计算	172		182
5.2.3	计算结果及分析	174	5.4.2	边界元计算格式
5.3	定子铁芯三维温度场的有限元计算	176		183
5.3.1	热传导方程及边界条件	176	5.4.3	散热系数的确定
5.3.2	有限元计算格式	178		185
5.3.3	导热系数的确定	179	5.4.4	计算实例及分析
5.3.4	散热系数的确定	180		186
5.3.5	热源的计算	181	5.5	汽轮发电机并网进相运行分析
5.3.6	计算实例及分析	182		186
			5.5.1	概述
				186
			5.5.2	发电机无功功率的调节
				188
			5.5.3	静态稳定性的限制
				188
			5.5.4	定子电流值的限制
				189
			5.5.5	各种工况下的磁场和温度分布
				190
			5.5.6	进相运行范围的确定
				192
			参考文献	192

第六章 汽轮发电机端部电动力的计算

6.1	概述	194	析	202
6.2	端部三维电磁场积分方程法	194	6.3.1	行波场有限元离散方程
6.2.1	基本方程	194		202
6.2.2	方程奇异性的处理	197	6.3.2	非线性涡流场的雅可比矩阵
6.2.3	解的收敛性	198		205
6.2.4	端部磁场的积分方程法计算	199	6.3.3	端部行波场计算模型
6.2.5	小结	201		206
6.3	汽轮发电机端部行波场有限元分		6.3.4	端部磁场的计算
				208
			6.3.5	小结
				210
			6.4	端部绕组电动力的计算
				210
			6.4.1	引言
				210

6.4.2	计算电力的基本公式	211	6.5.1	引言	223
6.4.3	端部电动力行波场法的计算	211	6.5.2	网格形成	223
6.4.4	端部电动力积分方程法的三维 计算	212	6.5.3	端部绕组电动力行波场的有限元 计算软件	225
6.4.5	不同功率因数下的端部电动力 分布	216	6.5.4	端部绕组电动力三维计算软件	225
6.4.6	小结	219	6.5.5	小结	227
6.5	端部电动力计算软件	223	参考文献		227

第七章 电力变压器铁芯磁场和损耗分布的分析与计算

7.1	概述	229	问题的讨论	239	
7.2	铁芯磁场的分析模型	229	7.4.1	三维网格生成	239
7.2.1	三相三柱变压器铁芯	230	7.4.2	多媒质单元的有限元分析	242
7.2.2	三相五柱变压器铁芯	233	7.4.3	铁芯磁场的近似解析解及其应用	245
7.2.3	铁芯搭接区	236	7.5	计算实例与结果分析	247
7.3	铁芯损耗的计算方法	237	7.5.1	磁场计算	247
7.3.1	决定铁耗的主要因素	237	7.5.2	损耗计算	256
7.3.2	用磁通密度幅值和磁化角计算 损耗	238	7.6	小结	260
7.4	变压器铁芯磁场数值计算中若干 问题的讨论		参考文献		261

第八章 变压器铁芯温度场的分析与计算

8.1	油流换热计算	263	8.3.2	铁芯温度场的三维分布	272
8.1.1	基本假设	263	8.3.3	铁芯工作磁通密度 B_m 对温度分布 的影响	274
8.1.2	速度分布与平均流速	264	8.3.4	芯柱绝缘套筒尺寸对铁芯温度的影 响	278
8.1.3	管道油流换热计算	265	8.3.5	油流平均速度对温度分布的影响	278
8.2	铁芯温度场计算	267	8.3.6	进油温度对铁芯温度的影响	278
8.2.1	求解域及网格划分	267	8.3.7	铁芯内油道设置情况对温度分布的 影响	278
8.2.2	定解问题	267	8.3.8	小结	278
8.2.3	铁芯温度场的近似解析解	269	参考文献		279
8.2.4	铁芯温度场的数值解	271			
8.3	计算实例与结果分析	272			
8.3.1	计算模型简介	272			

第九章 电力变压器油箱夹件中的漏磁场及涡流损耗计算

9.1	概述	281	阻抗法	289	
9.2	变压器漏磁场的二维计算	282	9.5	计算实例	293
9.3	计算漏磁场的 $A-\phi$ 法	286	9.6	小结	299
9.4	计算漏磁场的双标量位法和表面 参考文献		参考文献		299

第十章 电力变压器线圈区的漏磁场及短路电动力计算

10.1	概述	302	10.5.1	问题的提出	308
10.2	两绕组变压器电动力分析	302	10.5.2	数学模型	308
10.3	两绕组变压器同心式绕组电动力 的计算	304	10.5.3	圆柱坐标下的有限元方程	309
10.4	三绕组变压器电动力分析与计算	306	10.5.4	程序框图	310
10.5	变压器短路电动力有限元分析和 计算实例	308	10.5.5	计算结果	310
			10.5.6	小结	314
			参考文献		314

第十一章 变压器大电流引线漏磁场及其产生的涡流损耗

11.1	概述	315	11.3	箱盖中引线漏磁场的计算	322
11.2	油箱壁中的引线漏磁场	315	11.3.1	物理模型及边界条件	323
11.2.1	物理模型及边界条件	315	11.3.2	数值法与解析法结合的理论 依据	324
11.2.2	自动剖分与输入数据准备	317	11.3.3	有限元网格的子块结构	326
11.2.3	程序简介	318	11.3.4	计算实例	327
11.2.4	屏蔽措施	318	参考文献		332
11.2.5	计算结果与分析	320			

第十二章 电力变压器波过程的数值分析

12.1	概述	333	12.4.1	计算方法的选择	343
12.2	变压器波过程分析的等值电路	334	12.4.2	用广义特征值与特征向量法 求解	344
12.3	参数计算	336	12.4.3	冲击电压函数的确定	344
12.3.1	电感的计算	336	12.4.4	变压器绕组的冲击电压响应	346
12.3.2	电容的计算	340	12.5	计算实例	349
12.4	等值电路的求解和冲击电压的响 应	341	参考文献		354

第十三章 电力变压器铁芯磁场的测量与实验研究

13.1	概述	356	13.3.3	模型变压器的设计和探测线圈的 埋置	360
13.2	磁场测量方法	356	13.3.4	三个典型区域磁场测量结果分 析	361
13.3	电力变压器铁芯磁场的测量与实 验结果的分析	358	13.3.5	结论	364
13.3.1	测量方法的选择	358	参考文献		365
13.3.2	微机磁场测量系统	358			

第十四章 电磁场数值计算在无损检测中的应用

14.1 概述.....	366	14.3.4 差动探头阻抗计算	374
14.2 漏磁法检测的有限元计算.....	367	14.3.5 计算结果	375
14.2.1 探头结构及检测原理	367	14.3.6 涡流检测阻抗图预估	376
14.2.2 物理模型和基本假设	368	14.4 远场涡流检测机理的研究.....	377
14.2.3 基本方程	368	14.4.1 远场涡流效应	377
14.2.4 计算结果与结论	369	14.4.2 远场涡流效应的有限元分析	378
14.3 涡流检测探头信号预估.....	371	14.4.3 磁力线与等值线	380
14.3.1 物理模型和基本假设	371	14.4.4 远场涡流效应中的能量传输	381
14.3.2 基本方程、边界条件和能量泛函...	372	参考文献.....	384
14.3.3 有限元离散及其表达式	372		

第十五章 电磁场数值计算在高能物理磁元件设计中的应用

15.1 高能物理磁元件的设计特点.....	386	磁铁的磁场要求	390
15.2 二维软件包的应用实例: 磁透镜设计.....	386	15.3.2 CYCLONE 类型回旋加速器主磁铁的磁场计算	391
15.2.1 磁透镜的工作原理及其对磁场的要求.....	386	15.4 智能化回旋加速器主磁铁 CAD 系统的研制及应用.....	395
15.2.2 用于 CYCLONE30 回旋加速器的输运系统的四极磁透镜设计	387	15.4.1 整体结构	395
15.3 三维软件包的应用实例: CYCLONE 类型回旋加速器主磁铁设计.....	390	15.4.2 辅助设计	396
15.3.1 回旋加速器的工作原理及其对主磁铁的磁场要求	390	15.4.3 分析技术	397
		15.4.4 辅助制造	400
		15.4.5 运行环境	401
		参考文献.....	401

第一章 理论基础

1.1 电磁场数值计算的发展过程和当前概况

1.1.1 发展过程的简单回顾^[1]

1960年,随着大型计算机的出现,电磁场数值计算方法开始高速度发展,当时计算机的计算速度可以达到0.36MFLOPS。从1960年到1972年,在美国和欧洲开发了多种软件,帮助设计者解决了许多磁系统计算的难题。当时二维静磁场的计算结果,误差可以小于千分之一。1971年Winslow、Chari和Silvester等人把有限单元法(FEM)用于电磁场计算,这是电磁场计算中的一个重要的转折点^[2-5]。

1970年电磁场数值计算开始研究三维问题。当时应用积分法相当成功,但生成三维网格还有困难,阻碍着数值计算发展的速度。1972年,Muller等人^[6]用有限差分法(FDM)计算了大型汽轮发电机的三维场;1973年,Anderson用有限元法计算了变压器的漏磁场^[7],这些都是富有开创性的成果。近年来,新型个人微机的应用,从根本上改变了数值计算的局面。

从1976年以后,关于电磁场数值计算的理论分析和计算方法的文章,集中发表在一系列COMPUMAG会议的学报上^[8-15]。在这一段时期,有许多重要的突破,如网格的自动生成,有限元误差估计和自适应,二维、三维静磁场和涡流场计算,求解电磁场大型方程组的方法,等等^[16-23]。

电磁场数值计算方法进步虽然很快,但是直到现在还有很多问题没有完全解决。例如,三维非线性时变场含运动系统的分析、媒质中的滞后效应和非线性导致的混沌现象以及任意几何结构的三维自动剖分等都有待进一步研究。

另一个问题是电磁器件中的耦合物理现象,如大型汽轮发电机及电力变压器中的机械应力、热效应、电磁场、电动力、冷却媒质的流速场等多种因素之间的相互联系和相互影响,还需要继续探索。即对电机变压器等的物理过程要做微观分析,本书将对这些问题联系实际作些专题讨论。

1.1.2 当前概况综述

目前,有限元法被认为是最有效、应用最普遍的一种数值方法。其基本步骤是,用变分原理或用加权余量法,对微分形式的控制方程进行离散,导出一个代数方程组。代数方程组具有庞大稀疏对称的系数矩阵,经强加边界条件约束处理后成为正定矩阵,即可求近似解。另外,采用边界元法(BEM)的人也逐渐增多,它是把积分形式的控制方程通过在边界上剖分,离散得到一个代数方程组,这比有限元法对同一问题有较小的、但不稀疏的系数矩阵;当边界上的未知数求出之后,便可求域内任意点的场。过去广泛应用的有限差分法,近些年提出的图论场模型法(GTFM)^[24-28,37]等,各有特点,分别适用于不同场合。

数值计算中的前、后处理也是重要环节。其中关于前述的网格自动生成、误差估计和自适应,以及数据处理和三维矢量场的彩色显示等都发表过许多文献。电磁场数值计算的最终目的

是用后处理输出有关场的的数据作为基础,计算损耗、温度、电动力、力矩、起动电流和电感电容参数等工程技术指标,达到能估计运行性能和优化设计的作用。近年来,上述工作都已逐步实现,并且在工程上的应用范围日益扩大。诸如在无损探伤、高能物理研究、 $P-N$ 节和记录磁头的场分析等方面,均已在普遍推广应用和不断深入进行研究。

三维涡流场的分析仍然是目前最受重视的问题。由二维场扩大到三维场,不仅增加了几何上的复杂性,更加深了对处理场矢量本身的难度。因为每个节点最少有三个未知数,这样方程组的系数矩阵增大到三倍,故对计算机内存要求高,计算工作量大。经过许多人对于三维涡流场长时期的研究,目前基本上形成了两大主要的公式体系。一种是基于传统的矢量磁位 \mathbf{A} (简称 \mathbf{A} 法),这种方法用于二维问题已相当成熟。另一种是用矢量电位 \mathbf{T} (简称 \mathbf{T} 法)。

采用 \mathbf{A} 法,在导体区除了用矢量磁位 \mathbf{A} 外,还要加上标量电位 ϕ ,因此增大了系数矩阵的阶数和解的复杂性。与此同时,矢位 \mathbf{A} 的散度必须给定(赋予规范)或者隐含在公式中,以保证函数 \mathbf{A} 的唯一性。如何选择规范有一些灵活变通的余地。一种是完全删去标量电位,在导体区用所谓修正矢量磁位 \mathbf{A}^* (Modified vector potential),在非导体区用标量磁位 ϕ ,二者的交界面上要求 B_n 和 H_t 连续。这样,节点未知数最少,并能用于解非线性问题。

采用 \mathbf{T} 法,在导体区用矢量电位 \mathbf{T} 和标量磁位 ϕ ,故称为 $\mathbf{T}-\phi$ 法,这样每个节点也有四个未知数,在非导体区只有标量磁位 ϕ 。在交界面上仍按保持 B_n 和 H_t 连续的原则来确定位函数的相容性。在某些条件下,可使 \mathbf{T} 只有两个分量甚至只有一个分量,从而使问题得到简化。

棱单元 (Edge Element) 法是最近几年发展起来的一种新方法。这种方法在导体区用棱变量 (Edge-variable),在非导体区用适当节点变量,容易耦合。其主要优点是棱元变量能保证单元交界面上切向分量连续,插值基函数能自动满足库伦规范;在导体区可直接计算场强 \mathbf{H} 或 \mathbf{E} ,不必从位函数求导,这样变量较少,在微分算子中不包含非线性项。

除了 \mathbf{A} 法、 \mathbf{T} 法、棱单元法之外,还有二阶矢量位法、表面阻抗法等,也在逐渐发展中。

近年来,国际上专门为解决三维涡流问题召开了多次学术会议,提出一些基准问题 (Benchmark problem) 和标准答案,可作为检验程序和计算结果的校核依据,从而得到许多规律性的结论,也可作为按具体问题选择计算方法的参考。

随着计算机设备和软件技术的进步,以及场的分析计算水平的提高,电磁场数值计算向更广阔的工程领域的推广和应用,方兴未艾^[10]。本章将讨论理论方面的一些问题,其余各章则结合实际课题的研究,介绍其方法和应用,各章的内容具有相对的完整性与独立性。

1.2 电磁场的基本方程和亥姆霍兹定理

电磁场的基本方程通常是指麦克斯韦方程组。但是求解场一般是用由麦克斯韦方程组导出的三种偏微分方程,即调和方程(又称位势方程,拉普拉斯方程属椭圆型,泊松方程为非齐次方程)、波动方程(属双曲型)和扩散方程(热传导方程,属抛物型)。这三种方程分别描述场的平衡、波动和扩散三种状态和过程,都是通过场矢量的闭合线积分和封闭面积分及相应的旋度和散度得出。因为,许多物理场和网络系统的主要特性都可以用横越变量 (Across variable,如电压)和直贯变量 (Through variable,如电流)来表征。横越变量在单位距离上的值称为场强(或梯度),直贯变量在单位面积上的值称为面密度。因此,场强的线积分和面密度的面积分就成了研究场

的起点。表 1.1 列出了四种场的闭合线积分与封闭面积分和相应的旋度与散度以及微分方程(式中各物理量及单位一律采用国家标准)。

表 1.1 四种场的线积分、面积分和相应的旋度、散度以及微分方程

场	闭合线积分和相应的旋度	封闭面积分和相应的散度	由旋度和散度导出的微分方程
静电场	$\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0, \nabla \times \mathbf{E} = 0$	$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = q, \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$	$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon}, \nabla^2 \phi = 0 (\rho = 0)$
恒定电流场	$\oint_l \frac{\mathbf{J}}{\sigma} \cdot d\mathbf{l} = \oint_l (\mathbf{E}_q + \mathbf{E}_i) \cdot d\mathbf{l}$ $\oint_l \mathbf{E}_q \cdot d\mathbf{l} = 0, \nabla \times \mathbf{E}_q = 0$ $\oint_l \frac{\mathbf{J}}{\sigma} \cdot d\mathbf{l} = \oint_l \mathbf{E}_i \cdot d\mathbf{l}$ 相当于 KVL $\sum u = \sum \epsilon$ \mathbf{E}_q 为库伦场强 \mathbf{E}_i 为局外场强	在电源以外区域 $\oint_s \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = 0, \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$ $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}_q$ 相当于直流电路 KCL $\sum_k i_k = 0$ 考虑位移电流, 则 $\oint_s \left(\mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S} = 0$ $\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$	在电源以外区域 $\nabla^2 \phi = 0$
静磁场	有电流区 $\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \sum i$ $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s$ (自由电流密度)	$\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$	$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ $\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{J}_s$ $\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}_s$ (取规范 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$)
	无电流区 $\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 0$ $\nabla \times \mathbf{H} = 0$		$\nabla^2 \psi = 0$
时变电磁场	麦克斯韦方程组 (I—IV 为积分形式, V—VIII 为微分形式)		$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}_s$ $\nabla^2 \phi - \mu\sigma \frac{\partial \phi}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$ (取规范 $\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} - \mu\sigma \phi$, 并计入了涡流密度 $\mathbf{J}_e = \sigma \mathbf{E}$)
	$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \left(\mathbf{J}_s + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{S}$ (I) $\oint_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$ (II) $\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ (V) $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ (VI)	$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \oint_v \rho dS = q$ (III) $\oint_s \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$ (IV) $\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$ (VII) $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ (VIII)	

表中 $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ 。

亥姆霍兹定理指出: 一个有限区域的矢量场, 由它的旋度和散度共同唯一地确定。表 1.1 也表明, 四种场都是从场矢量的旋度和散度决定的。对于矢量磁位 \mathbf{A} , 则必须对 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 给定适

当约束(规范), 才能用独立方程唯一地求出。下面分别对静磁场和时变电磁场两种情况进行考察。

因为在静磁场(设媒质线性均匀各向同性, 不加特别说明时, 都指这种媒质), 有

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{J}_s \quad (1-1)$$

如果令

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (\text{库伦规范}) \quad (1-2)$$

则

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}_s \quad (1-3)$$

矢量位 \mathbf{A} 便是唯一确定的。其值为(在自由空间)

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{V'} \frac{\mathbf{J}_s(\mathbf{r}')}{R} dV' \quad (1-4)$$

这与由毕奥-沙伐定律导出的完全相同, 自然满足 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 。上式中, $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$, \mathbf{r} 为场点矢径, \mathbf{r}' 为源点矢径, dV' 为包含源点的体积元, 如图 1.1 所示(以后未作特别说明, 一律按此规定, 矢径有时亦称位置矢量)。可以看出, 矢量泊松方程式(1-3)与 \mathbf{A} 的旋度旋度方程加零散度条件等价。

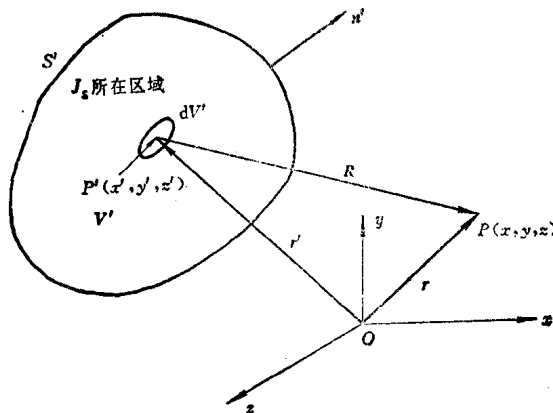


图 1.1 场点与源点相关位置的几何示意图

如果不加条件式(1-2), 式(1-1)按公式展开, 得

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = & \left(-\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial x \partial z} \right) \mathbf{i} \\ & + \left(-\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial z} \right) \mathbf{j} + \left(-\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} \right. \\ & \left. - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z \partial y} \right) \mathbf{k} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{J} \quad (1-5) \end{aligned}$$

如果媒质不均匀或(和)非线性, 则 $\frac{1}{\mu}$ ($=\nu$ 称为磁阻率)不能提出旋度算子, 展开得

$$\nabla \times \nu \nabla \times \mathbf{A} = -\nu \nabla^2 \mathbf{A} + \nabla \nu \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \nu \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{J}_s \quad (1-6)$$

显然, 公式(1-5)及(1-6)很难直接求解。

对于时变电磁场,从 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ 和 $\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$ 可以导出

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (1-7)$$

式中,右端第一项代表库伦场强,它决定于外加电压与自由电荷;第二项代表感应场强。这时,因为 \mathbf{A} 和 ϕ 都是时变量,所以称为动态位。

建立 \mathbf{A} 、 ϕ 的微分方程,必须同时利用麦克斯韦方程组的全部四个方程。先由涡流密度

$$\mathbf{J}_c = \sigma \mathbf{E} = \sigma \left(-\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \quad (1-8)$$

及位移电流密度

$$\mathbf{J}_D = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \quad (1-9)$$

代入表 1.1 中的式 (V),得

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H} &= \nabla \times \nu \nabla \times \mathbf{A} = \nu [\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}] = \mathbf{J}_s + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{J}_c \\ &= \mathbf{J}_s + \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) + \sigma \left(-\nabla\phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

将上式整理移项,得

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mu\sigma\phi \right) = -\mu \mathbf{J}_s \quad (1-10)$$

再将式(1-7)代入表 1.1 的式 (VII),加上并减去某些项,也能得到与式(1-10)类似的式子:

$$\nabla^2 \phi - \mu\sigma \frac{\partial \phi}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mu\sigma\phi \right) = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (1-11)$$

式(1-10)和式(1-11)是描述 μ 、 ε 、 σ 均为常数时,电磁场的位势 \mathbf{A} 、 ϕ 随时空变化的微分方程。不难察觉,要导出这些公式,电场和磁场的旋度与散度四个公式(表 1.1 中 V—VIII)是缺一不可的。但这样求得的式(1-10)和(1-11)是 \mathbf{A} 、 ϕ 的联立方程,直接求解是非常困难的,因此必须设法使它们分离开。因为 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 还未定,利用这一条件,只要令

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mu\sigma\phi = 0, \text{ 即给定 } \nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\varepsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} - \mu\sigma\phi \quad (1-12)$$

就有

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}_s \quad (1-13)$$

$$\nabla^2 \phi - \mu\sigma \frac{\partial \phi}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\rho/\varepsilon \quad (1-14)$$

这是两个一般化的非齐次波动方程。关系式(1-12)称为洛伦兹条件(洛伦兹规范)。这样选择 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 的优点不仅使 \mathbf{A} 和 ϕ 的方程互相独立(解耦),并且还得到了 \mathbf{A} (三个分量)和 ϕ 四个完全相同形式(在直角坐标系)的标量方程。只要解出一个,即可以此类推。

根据实际上存在的非导电媒质和导电媒质两种情况,式(1-12)~(1-14)三者均可化简。在

非导电媒质中(例如自由空间), $\sigma = 0$, 式(1-12)–(1-14)可分别写成

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad \text{即} \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (1-15)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{J}_s \quad (1-16)$$

$$\nabla^2 \phi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\rho/\epsilon \quad (1-17)$$

后两式是非齐次的波动方程, 又称达朗贝尔方程。它们有波动方程的通解和对应右端项的特解, 所以 \mathbf{A} 和 ϕ 都有确定的动态位函数解。

在导电媒质中, 在工频下忽略位移电流, 式(1-12)–(1-14)分别变成

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\sigma\phi = 0 \quad \text{即} \quad \nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\sigma\phi \quad (1-18)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mu \mathbf{J}_s \quad (1-19)$$

$$\nabla^2 \phi - \mu\sigma \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (1-20)$$

后两式是 \mathbf{A} 和 ϕ 的非齐次扩散方程, 也有确定的解。

对于静态场, 所有对时间的导数均为零, 式(1-13)和(1-14)分别变成矢量和标量泊松方程, 如果场源为零, 则成拉普拉斯方程。

由以上的分析表明, 必须处处同时给定 \mathbf{A} 的旋度和散度, 矢量函数 \mathbf{A} 才能唯一确定。这与表 1.1 中所列举的其它各种场由旋度和散度两个源方程共同求解同出一辙。

从另一角度来看, 因为场矢量的切向分量和法向分量分别与旋度和散度相联系, 所以只有同时给定旋度和散度, 才能完全确定不同媒质分界面(或媒质与自由空间的边界面)上场的连续性。根据参考文献[56], 有

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1) = \lim_{h \rightarrow 0} [h(\nabla \times \mathbf{F})] \quad (1-21)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1) = \lim_{h \rightarrow 0} [h(\nabla \cdot \mathbf{F})] \quad (1-22)$$

式中, h 为媒质分界面过渡层的厚度。对于矢量 \mathbf{A} 来说 $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ 。因为 \mathbf{B} 总是有限, 所以

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) = \lim_{h \rightarrow 0} (h\nabla \times \mathbf{A}) = \lim_{h \rightarrow 0} (h\mathbf{B}) = 0 \quad (1-23)$$

故得

$$\mathbf{A}_{2t} = \mathbf{A}_{1t} \quad (1-24)$$

即 \mathbf{A} 的切向分量恒连续(上式中的下标 t 表示切线方向)。

同时, 按照式(1-22), 有

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1) = \lim_{h \rightarrow 0} (h\nabla \cdot \mathbf{A}) \quad (1-25)$$

对于上面所设条件 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 或 $\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} - \mu\sigma\phi$, 只要过渡层内 $\frac{d\phi}{dt}$ 和 ϕ 保持

有限, 则将 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 代入式(1-25), 其右端项极限为零。从而有

$$\mathbf{A}_{2n} = \mathbf{A}_{1n} \quad (1-26)$$

由式(1-24)和(1-26)可见,矢量位 \mathbf{A} 在分界面连续,即

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 \quad (1-27)$$

如果 $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 不定,则 \mathbf{A}_n 及 \mathbf{A} 本身的连续性都不能确定。

1.3 场解的多值性与唯一性

1.3.1 位的多值性

电磁场解多值性的产生,一方面是由于对磁场的无源性采用了矢量磁位;另一方面是由于对电流密度等于零的区域,采用了标量磁位,其位差与路径有关而不是单值。后者用拟想的磁壳(壁障)来消除,就能使问题解决;而前者只能用规范函数来限制,究竟限制到什么程度,这是问题的焦点(不考虑磁滞引起的多值性)。

由于任意标量函数 f 的梯度 ∇f 的旋度恒等于零,因此, \mathbf{A} 隐含任意多值性,可记为

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f \quad (1-28)$$

同时用

$$\phi' = \phi - \frac{\partial f}{\partial t} \quad (1-29)$$

来代替 ϕ ,显然 $\nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A}$, $-\nabla \phi' - \frac{\partial \mathbf{A}'}{\partial t} = -\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ 。所以对于同一个电磁场,可

以选择无穷多组位函数 \mathbf{A} 和 ϕ ,保持 \mathbf{B} 和 \mathbf{E} 不变。式(1-28)和(1-29)的变换称为规范变换,变换中保持 \mathbf{B} 和 \mathbf{E} 的不变性称为规范不变性,式中的标量函数 f 称为规范函数。这里的分析表明,经过规范变换,位函数并没有唯一确定,矢量磁位仅仅确定到一个规范函数的梯度,标量电位则仅仅确定到同一规范函数的时间导数,所以位函数的多值性没有完全消除。 \mathbf{A} 的多值性说明:有不同 \mathbf{A} 的分布模型能产生同样的 \mathbf{B} 场^[51]。

如果要求变换过的位函数 \mathbf{A}' 、 ϕ' 也和 \mathbf{A} 、 ϕ 一样满足相同的规范条件,则规范函数不能是任意的,此时位函数的多值性就不是任意的,也要受到一定的约束。下面求出在不同规范下对规范函数的限制。

例如,取洛仑兹条件,能使 \mathbf{A} 、 ϕ 的两个方程式(1-10)及(1-11)解耦。如果要求 \mathbf{A}' 、 ϕ' 也满足洛仑兹条件:

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' + \mu\epsilon \frac{\partial \phi'}{\partial t} + \mu\sigma\phi' = 0 \quad (1-30)$$

即

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} + \nabla f) + \mu\epsilon \frac{\partial}{\partial t} \left(\phi - \frac{\partial f}{\partial t} \right) + \mu\sigma \left(\phi - \frac{\partial f}{\partial t} \right) = 0$$

若化简为

$$\nabla^2 f - \mu\epsilon \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \mu\sigma \frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (1-31)$$

则要求规范函数 f 满足一般化齐次波动方程。表 1.2 给出了几种情况下对规范函数的限制。

由此可以得出结论,采用规范条件并不能完全消除位函数 \mathbf{A} 、 ϕ 的多值性,只是消除了多值

表 1.2 不同规范条件下对规范函数的限制

场	静磁场	时变电磁场		
	库伦规范	洛伦兹规范	两种简化型的洛伦兹规范	
	$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$	$\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} + \mu\sigma\phi = 0$	非导体区(或自由空间) $\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\epsilon \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$	导体区(忽略位移电流) $\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu\sigma\phi = 0$
\mathbf{A}, ϕ 的微分方程	$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu\mathbf{J}$ $\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon}$	$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mu\epsilon \nabla \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{J}_s$ $\nabla^2 \phi - \mu\sigma \frac{\partial \phi}{\partial t} - \mu\epsilon \nabla \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$	$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathbf{J}_s$ $\nabla^2 \phi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$	$\nabla^2 \mathbf{A} - \mu\sigma \mathbf{A} = -\mu\mathbf{J}_s$ $\nabla^2 \phi - \mu\sigma\phi = -\rho/\epsilon$
规范函数应满足的方程	$\nabla^2 f = 0$	$\nabla^2 f - \mu\sigma \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} - \mu\sigma \nabla \frac{\partial f}{\partial t} = 0$	$\nabla^2 f - \mu\epsilon \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$	$\nabla^2 f - \mu\sigma f = 0$

性的任意性。总结规范还起到下列作用：(1) 使 \mathbf{A}, ϕ 二者的微分方程解耦，使方程简化；(2) 满足亥姆霍兹定理， $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 和 $\nabla \times \mathbf{A}$ 共同唯一地决定矢量位 \mathbf{A} 的函数；(3) 有时可以减少矢量 \mathbf{A} 的独立分量数。例如，取库伦规范 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ ，使 \mathbf{A} 只剩下两个独立分量。有时，规范可能隐含在方程中，不必强加。例如，在方程 $\nabla \times \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} = -\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ 中，隐含规范 $\nabla \cdot \sigma \mathbf{A} = 0$ ，如 σ 为常数，即隐含 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ 。还可以看出， $\nabla \cdot \mathbf{A}$ 的选定会影响 ϕ ，所以 $\mathbf{A} \cdot \phi$ 一对函数称为规范相依。

1.3.2 场解的唯一性

如上所述，亥姆霍兹定理只阐明了矢量场函数的确定性；施加规范条件只是消除了位函数多值性的任意性；对于有界场，还必须给予适当条件，才能得到唯一解。唯一性定理指出，只要给定 $t = 0$ 时场矢量 \mathbf{E} 和 \mathbf{H} (或 \mathbf{B}) 在空间所有各点上的初值，便可以由方程组唯一地决定在空间每一点上和每一时刻的电磁场。但是，这样表述的“唯一性定理”并不是总能具体适用的，因为一般不能决定整个无界空间的场，只是局限于一定区域，所以还需赋予边界条件，才能求得唯一解。由于提法不同，偏微分方程的型式不同，保证场解唯一的条件也就不尽相同，必须分别研究。

1.3.2.1 静电场

在一封闭面 S 上的电位、电场强度的值(或电偶极矩和电荷面密度)和在 S 面内体积 V 中 ρ 的分布均为已知时(ρ 可以为零)，则利用公式