数学类

21 高等师范院校教材

高等代数

GAODENG DAISHU

主　编　徐德余

副主编　何承源　邹国成　钟纯真

蔡学渊　何　聪

四川大学出版社

数学类

21 高等师范院校教材

高等代数

GAODENG DAISHU

主　编　徐德余
副主编　何承源　邹国成　钟纯真
　　　　蔡学渊　何　聪
编　委　李孝齐　何庆高　龙德明
　　　　邹庭荣　姜　希　甘伦知
　　　　蒋自国

四川大学出版社

21 高等师范院校教材

高等代数

总 策 划：陈国弟 张晓舟
责任编辑：张春燕
责任校对：王 平
封面设计：罗 光
责任印制：李 平

图书在版编目(CIP)数据
高等代数/徐德余主编．—成都：四川大学出版社，2002.10
ISBN 7-5614-2404-3
Ⅰ.高… Ⅱ.徐… Ⅲ.高等代数-高等学校-教材 Ⅳ.015
中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第085017号

书名 高等代数

主 编 徐德余
出 版 四川大学出版社
地 址 成都市一环路南一段24号 (610065)
印 刷 郫县犀浦印刷厂
发 行 四川大学出版社
开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 21
字 数 358千字
版 次 2002年11月第1版
印 次 2002年11月第1次印刷
印 数 0 001~2 000册
定 价 32.00元

◆读者邮购本书，请与本社发行科联系。
◆电 话：85408408 85401670 85408023
◆邮政编码：610065
◆本社图书如有印装质量问题，请寄回印刷厂调换。
◆网 址：www.Scupress.com.cn

内 容 提 要

本书是在参考了许多教材与文献的基础上，结合长期教学实践经验，在吸收了一些国内外教学、科研成果的基础上编写而成的。

全书共分 8 章，依次是：行列式、矩阵、线性方程组、多项式、线性空间、线性变换、欧氏空间、二次型。

全书配有较多的例题，除每节的习题外，每章后还编有总习题。

本书可作为高等师范院校、师范专科学校、教育学院、高师函授的教材。

前　言

近几年来，我国高等教育事业蓬勃发展，西部地区高等师范教育的发展尤为迅速。为了适应发展的需要，改变目前教材建设相对滞后的状况，我们编写了这本教材。

高等代数是数学专业的一门重要的基础课，是中学代数的继续与提高的教材，它由多项式理论与线性代数理论两大部分组成，全书共分 8 章。为了使教材内容具有科学性、系统性、先进性与师范性，我们在编写时作了如下考虑：

1. 在教材内容的结构与编排顺序上作了适当的调整，把行列式、矩阵与线性方程组作为前 3 章，多项式为第 4 章。这样既突出了矩阵作为基本工具的作用，又把多项式学习中的难点推后，并把各难点进行了调整，使多项式理论与线性代数理论有机地融为一体。在矩阵这一章里，作为矩阵的特例，引入了 n 元向量及相关性。这样，一方面从代数及向量两个角度全面、完整地讨论了矩阵的秩；一方面也为第 3 章线性方程组的解的结构的讨论与第 5 章线性空间的学习作了准备。我们还把数环和数域、第二数学归纳法、整数的整除性、连加号、映射与积集等预备知识分散到相关各章，这有助于学生理解与应用。

2. 在注意教材内容的科学性与系统性的基础上，我们在编写中突出四个新：体系新、理论新、证明新、方法新。在参考了许多教材与文献的同时，尽量吸取国内外教学科研成果。如利用矩阵求多项式的最大公因式、克莱姆法则的新证法、替换定理的另一证法、非齐次性线性方程组的新结构

定理、正交组的新求法等。

3. 概念抽象、对象抽象、推理抽象是高等代数与中学代数的最大区别。为了减少学生学习的困难，我们在教材中注意了抽象概念与实际背景相联系，与解析几何、数学分析或其他学科相联系，与中学数学相联系，力求使教材通俗易懂、深入浅出、应用面广、师范性强。

4. 为了适应当前学生的数学实际水平，使学生加强对基础知识的理解，掌握好基本理论、基本方法、基本技巧，我们在教材中编写了较多的例题，特别是增加了一些有启发性与新意的例题。

5. 为巩固所学知识的需要，在每章后编写了总习题。总习题是以综合性题为主，含有少量研究生入学考试题，这既有利于一般学生对所学知识的综合应用能力的训练与提高，也满足部分准备考研究生的学生复习。

6. 在编写时，十分注意书中概念表述的准确清晰、定理公式的证明与推导的正确无误，语言叙述的简明扼要，分析阐述的透彻精辟，内容包涵及覆盖的重点突出，是一本实用性强的教材。

7. 本书可作为师范教育院校数学专业本科生的教材，也可作为数学专业专科生的教材。

参加本书编写的老师有：徐德余、邹庭荣、李孝齐（绵阳师院），何承源、龙德明（成都师专），邹国成、姜希（乐山师院），钟纯真（内江师院），蔡学渊、何庆高（宜宾学院），何聪（达县师专），甘伦知（自贡师专），蒋自国（阿坝师专）。

限于水平和经验，本书中的缺点和错误在所难免，敬请读者批评指正，以便再版。

编　者

2002 年 10 月

21 高等师范院校教材

高等代数

目　录

第 1 章　行列式

行列式是代数学中的一个基本概念. 它起源于求解线性方程组，尔后不仅成为求解线性方程组的有力工具，而且在数学的许多分支和其他的一些科学技术领域中均有广泛的应用. 本章将利用排列给出 n 阶行列式的定义，讨论它的性质和计算方法，并给出它在线性方程组中的初步应用.

1.1　数环和数域

研究数学问题常常需要明确规定所考虑数的范围，比如讨论方程是否有解的问题就与未知量所允许的取值范围有关，在实数范围内无解，但在复数范围内就可能有解. 又如在整数范围内可以进行加、减、乘三种运算，然而两个整数的商却不一定是整数. 也就是说，在整数范围内，除法不是永远可以实施的，但在有理数范围内不仅可以施行加、减、乘三种运算，而且还可以施行除法（只要除数不为零）运算. 在实数和复数范围内，也同样可以施行这四种运算. 除了上述四个数集外，还有很多数集，其中也可以进行加、减、乘三种运算或加、减、乘、除四种运算，具有这种性质的数集分别叫做数环或数域.

定义 1　*设 S 是复数集 $\mathbf{C}$ 的一个非空子集，如果在 S 中任意两个数的和、差、积仍然属于 S，则称 S 是一个数环.*

如果数的集合 S 中任意两个数作某一运算的结果仍在 S 中，我们就说数集 S 对于这个运算是封闭的，因此数环的定义也可以说成：如果复数集 $\mathbf{C}$ 的一个非空子集 S，对于数的加、减、乘这三种运算封闭，则称 S 是一个数环.

根据定义，整数集 $\mathbf{Z}$，有理数集 $\mathbf{Q}$，实数集 $\mathbf{R}$，复数集 $\mathbf{C}$ 都是数环，而自然数集 $\mathbf{N}$ 不是数环.

例 1　设 n 是某一整数，则 $n\mathbf{Z} = \{nk \mid k \in \mathbf{Z}\}$ 是一个数环.

事实上，$n\mathbf{Z} \neq \Phi$，设 nk_1，$nk_2 \in n\mathbf{Z}$，则

$$nk_1 \pm nk_2 = n(k_1 \pm k_2) \in n\mathbf{Z}, \qquad (nk_1)(nk_2) = n(nk_1k_2) \in n\mathbf{Z}$$

特别地，$2\mathbf{Z}$ 称为偶数环，$\{0\}$ 称为零数环.

容易看出，零数环是最小的数环，即所有的数环都包含零数环.

例 2 两个数环的交是一个数环. 两个数环的并一定是数环吗?

证 设S_1,S_2是两个数环. 因为$0\in S_1$，$0\in S_2$，所以 $S_1\cap S_2\neq\Phi$，如果$a,b\in S_1\cap S_2$，那么$a,b\in S_1,a,b\in S_2$.又因为S_1,S_2均是数环，所以$a\pm b$，$ab\in S_1,a\pm b,ab\in S_2$,即$a\pm b,ab\in S_1\cap S_2$.故 $S_1\cap S_2$是数环.

两个数环的并，不一定是数环.

例如，所有2的倍数$2\mathbf{Z}$是一个数环，所有3的倍数$3\mathbf{Z}$也是一个数环，则$2\in 2\mathbf{Z},3\in 3\mathbf{Z}$，2，$3\in 2\mathbf{Z}\cup 3\mathbf{Z}$,但$2+3=5\notin 2\mathbf{Z}$,且 $5\notin 3\mathbf{Z}$，因而$5\notin 2\mathbf{Z}\cup 3\mathbf{Z}$.故$2\mathbf{Z}\cup 3\mathbf{Z}$不是数环.

定义 2 设 F 是一个数环，如果

1) F 含有一个不等于零的数，

2) $a,b\in F,b\neq 0$,则$\frac{a}{b}\in F$,

那么就称 F 是一个数域.

类似于数环，我们也可以给出数域的一个等价定义.

非空集合 F 满足:

① 0，$1\in F$;

② F 对于数的加、减、乘、除四种运算封闭，

则称 F 是一个数域.

例如，$\mathbf{Q}$，$\mathbf{R}$，$\mathbf{C}$都是数域，$\mathbf{N}$和$\mathbf{Z}$不是数域.

例 3 证明$F=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$是数域.

证 显然 F 是一个数环，且$1=1+0\sqrt{2}\in F$,所以①成立.设 $c+d\sqrt{2}\neq 0$,那么 $c-d\sqrt{2}\neq 0$;否则在 $d=0$ 的情形下将得出 $c=0$,与 $c+d\sqrt{2}\neq 0$ 的假设矛盾;在 $d\neq 0$ 的情形下将得出$\sqrt{2}=\frac{c}{d}\in\mathbf{Q}$,这与$\sqrt{2}$是无理数的事实相矛盾. 因此

$$\begin{aligned}\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}&=\frac{(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{(c+d\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}\\&=\frac{(ac-2bd)+(bc-ad)\sqrt{2}}{c^2-2d^2}\\&=\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}+\frac{(bc-ad)}{c^2-2d^2}\sqrt{2}.\end{aligned}$$

又由于 $$\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}\in\mathbf{Q},\qquad\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\in\mathbf{Q},$$

所以
$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}\in F.\ 故\ F\ 是数域.$$

数域有以下重要性质.

定理 1.1.1 任何数域都包含有理数域.

证 设 F 是任意一个数域. 证 $\mathbf{Q}\subseteq F$. 由于 0, 1 均属于 F, 于是对任何正整数 m 有:

$$m=\overbrace{1+1+\cdots+1}^{m}\in F,$$
$$-m=0-m\in F,$$

从而 $\mathbf{Z}\subseteq F$, 对于任意 m, $n\in\mathbf{Z}$, 当 $n\neq 0$ 时, 有 $\frac{m}{n}\in F$. 因此, F 包含一切有理数, 即 $\mathbf{Q}\subseteq F$. □

定理 1.1.1 告诉我们, 有理数域 $\mathbf{Q}$ 是最小的数域.

习题 1.1

1. 判断以下数集是否作成数环.

 1) $S=\{b\sqrt{5}\mid b\in\mathbf{Z}\}$;

 2) $S=\{a\neq 0\mid a\in\mathbf{Q}\}$;

 3) $S=\{a+b\sqrt{3}\mid a,\ b\in\mathbf{Z}\}$;

 4) $S=\{a+b\sqrt{3}i\mid a,\ b\in\mathbf{Q}\}$.

2. 填空:

 1) 包含 $5i$ 的最小数域是________;

 2) 包含$\frac{1}{3}$的最小数域是________.

3. 证明: 如果一个数环 $S\neq\{0\}$, 那么 S 含有无限多个数.

4. 证明: $S=\{a+bi\mid a,\ b\in\mathbf{Q}\}$ 是一个数环, F 是不是数域?

6. 设 F_1, F_2 均为数域, 证明 $F_1\cap F_2$ 也是数域, $F_1\cup F_2$ 一定是数域吗? 举例说明.

1.2 n 元排列

定义 1 由 n 个数码 $1,2,3,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $j_1,j_2,\cdots,j_n$ 称为一

个 n 元排列，记作 $j_1j_2\cdots j_n$.

例如 1234 是一个四元排列，35412 是一个五元排列．n 元排列有多少种不同的排列?

例如，全体不同的三元排列是：123，132，213，231，312，321，共有 $3! = 6$ 个.

n 个数码的不同排列共有 $n!$ 个．事实上，在作 n 个数码的一个排列时，第一个位置的数码可以取这 n 个数码中的任何一个，所以有 n 种可能；当这一个位置取定以后，第二个位置的数码只能在剩下的 $n-1$ 个数码中选取，所以只有 $n-1$ 种可能．因此，第一和第二个位置的数码一共有 $n(n-1)$ 种不同的选法．同样，如果第一和第二个位置的数码都已取定，那么第三个位置的数码只能在剩下的 $n-2$ 个数码中选取．因此，前三个位置的数码一共有 $n(n-1)(n-2)$ 种不同的选法．这样下去，一共可以得到 $n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1$ 个不同的排列.

$123\cdots n$ 是按由小到大的自然顺序排列的，称为自然排列，而其他排列或多或少地破坏了自然顺序，都有较大的数码排在较小数码的前面.

定义 2 在一个排列中，如果某一个较大数码排在某一个较小数码之前，则称这两个数码构成一个反序．一个 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 所有反序的总数称为这个排列的反序数，记作 $\pi(j_1j_2\cdots j_n)$.

例如，四元排列 3421 有 5 个反序，所以 $\pi(3421)=5$，而 $\pi(1234)=0$.

任给一个排列，我们可以用以下方法计算这个排列的反序数：先数排在 1 前面的数码的个数（显然，这些数码都与 1 构成反序，而 1 后面的数码都不会与 1 构成反序），设为 m_1，然后把 1 划去；再数排在 2 前面的数码个数，设为 m_2，然后把 2 划去；如此继续下去．最后，设排在 n 前面的数码的个数为 m_n（显然 $m_n=0$）．那么，这个排列的反序数就是 $m_1+m_2+\cdots+m_n$，即 $\pi(j_1j_2\cdots j_n)=m_1+m_2+\cdots+m_n$.

例如，排列 7215463 中，$m_1=2, m_2=1, m_3=4, m_4=2, m_5=1, m_6=1, m_7=0$，

所以 $\pi(7215463)=2+1+4+2+1+1+0=11$.

一个排列的反序数可能是奇数，也可能是偶数.

定义 3 反序数是奇数的排列称为奇排列，反序数是偶数的排列称为偶排列.

在许多问题中，需要把一个 n 元排列变成另一个 n 元排列，最简单的方

法就是把某两个数互换位置，而其余数不动．例如，在34512中，把1和4互换位置，而其余数不动，就得到排列31542.

定义4 把一个 n 元排列中某两个数码 i，j 的位置互换，其余的数码保持不动，就得到一个新的排列，对排列施行的这种变换称为一个对换，记为 (i, j).

例1 $34251 \xrightarrow{(3,\ 1)} 14253 \xrightarrow{(4,\ 2)} 12453 \xrightarrow{(4,\ 3)} 12354 \xrightarrow{(5,\ 4)} 12345.$

而 $$12345 \xrightarrow{(4,\ 5)} 12354 \longrightarrow \cdots \longrightarrow 34251.$$

由此可知：把一个排列通过一系列对换化为另一排列的过程是可逆的．因此我们有

定理1.2.1 设 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 和 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是 n 个数码的任意两个排列，那么总可以通过一系列对换由 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 得到 $j_1 j_2 \cdots j_n$.

证 先证任一个 n 元排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 可经过一系列的对换变为自然排列 $12\cdots n$.

(1) $n=2$ 时，二元排列 $i_1 i_2$，若 $i_1 \neq 1$，交换 i_1，i_2 得二元排列12.

(2) 假设 $n-1$ 元排列结论成立，考察 n 元排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$. 现分 $i_n = n$ 与 $i_n \neq n$ 两种情况讨论.

① $i_n = n$，则由归纳假设 $i_1 i_2 \cdots i_{n-1}$ 可经过一系列对换变为 $12\cdots n-1$，于是经过同样的对换，可把 $i_1 i_2 \cdots i_{n-1} i_n$ 变到 $12\cdots(n-1)n$.

② $i_n \neq n$ 设 $i_k = n (1 \leqslant k \leqslant n-1)$ 我们有

$$(i_1 \cdots i_k \cdots i_n) \xrightarrow{(i_k, i_n)} (i_1 \cdots i_n \cdots i_k),$$

于是归结为(1)的情况．因此对 n 元排列结论成立.

通过一系列对换可由 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 得出 $12\cdots(n-1)n$，由可逆性，按照相反的次序施行这些对换，就可以由 $12\cdots(n-1)n$ 得出 $j_1 j_2 \cdots j_n$. 因此 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 可经过一系列对换变成 $j_1 j_2 \cdots j_n$. □

定理1.2.2 每施行一次对换都改变排列的奇偶性.

证 设施行的对换为 (i, j).

1）特殊情形：i，j 为相邻数码．设给定的排列为

$$\cdots ij \cdots \tag{1}$$

施行对换 (i,j) 后变为

$$\cdots ji \cdots \tag{2}$$

这里“…”表示那些不动的数码．在(1)和(2)中，这些数之间所构成的反

序显然相同；i,j 分别与“…”中所构成的反序也相同．但是由于i,j 互换，这两数之间的秩序发生了变化．如果i,j 是反序，那么ji 不构成反序；如果ij 不构成反序，那么ji 是反序，因此(2)的反序数比(1)的反序数增加或减少一个，所以这两个排列的奇偶性总是相反的．

2）一般情形，i，j 为不相邻数码．设给定的排列为

$$\cdots ik_1k_2\cdots k_sj\cdots \tag{3}$$

将(3)中的 i 依次与$k_1,k_2,\cdots,k_s,j$ 相交换，这样经过 $s+1$ 次相邻数码的对换后得到

$$\cdots k_1k_2\cdots k_sji\cdots \tag{4}$$

再将(4)中的 j 依次与$k_s,\cdots,k_2,k_1$ 相交换，这样经过 s 次相邻数码的对换后得到

$$\cdots jk_1k_2\cdots k_si\cdots \tag{5}$$

(5)恰好是对(3)施行对换(i,j)而得到的排列．因此，对(3)施行对换(i,j)可以经过 $2s+1$ 次相邻数码的对换来实现．因为每施行一次相邻数码的对换排列的奇偶性都改变，而 $2s+1$ 是奇数，所以排列(3)与(5)的奇偶性相反．□

我们看到，在所有三元排列中，123，231，312 是偶排列，而 132，213，321 是奇排列，奇偶排列各占一半．这不是偶然的，在一般的 n 元排列中也有这样的规律．

推论 1 $n\geqslant 2$ 时，全部 n 元排列中，奇偶排列各占一半，即各有$\frac{n!}{2}$个．

证 假设 $n!$ 个 n 元排列中奇排列共有s 个，偶排列共有 t 个，将这 s 个奇排列都施行同一对换(i, j)，则由定理 1.2.2 得到 s 个偶排列，它们各不相同．但是偶排列总数为t，故有 $s\leqslant t$．同理可得 $t\leqslant s$，因此 $s=t$．而$s+t=n!$，所以 $s=t=\frac{n!}{2}$．□

例 2 选择 i 与j 使 $1274i56j9$ 为偶排列．

解 i 与j 可为 3 与 8 或 8 与 3．

当 $i=3$，$j=8$ 时，$\pi(127435689)=5$ 对应的排列为奇排列．由定理 1.2.2 可知，当 $i=8$，$j=3$ 时，12485639 为偶排列．

习题 1.2

1．计算下列排列的反序数：

1) 75231468;

2) $n(n-1)\cdots 21$;

3) $(2k)1(2k-1)2\cdots(k+1)k$.

2. 利用对换把排列 12345 变为 35241.

3. 选择 i 与 j 使

1) $54278i96j$ 为奇排列;

2) $2i15j8973$ 为偶排列.

4. 设 n 元排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的反序数是 k,求 $i_ni_{n-1}\cdots i_2i_1$ 排列的反序数.

1.3 n 阶行列式的定义

我们知道，行列式的概念是从解线性方程组的问题中引出来的. 所谓线性方程组是指未知量的最高次数是一次的方程组，线性方程即一次方程. “线性”一词来源于解析几何中笛卡尔坐标系下的一次方程是直线方程，后来凡是一次的方程均称为线性的方程. 这一称呼，现已深入到科学技术的很多领域.

设二元线性方程组为

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases}$$

利用加减消元法，当 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 时，此方程组有惟一解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \end{cases}$$

为了便于记忆，对上述公式进行分析：发现它的两个分母都是 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，并且只含有未知量的系数，如果把方程组中未知量的系数按在方程组中原来的位置写出并引进记号||，规定 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称其为二阶行列式. 其中 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 称为行列式的元素，a_{ij} 的第一个下标称为行标，第二个下标称为列标，即 a_{ij} 是位于行列式第 i 行第 j 列相交处的一个元素，行列式的横排称为行，竖排称为列，由于只有二行二列，所以称为二阶行列式.

利用二阶行列式，上述公式可以表示为