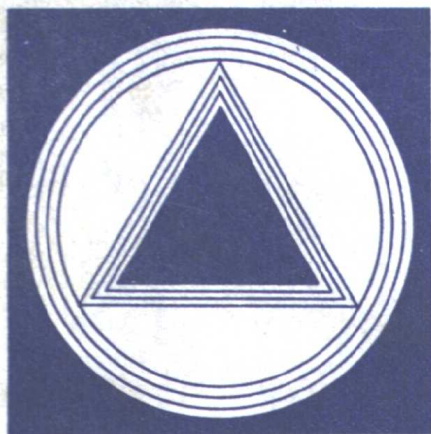


422128



平面几何 习题集



叶添善

平面几何习题集

叶添善 编著

广西人民出版社

平面几何习题集

叶添善 编著

☆

广西人民出版社出版

(南宁市河堤路14号)

广西新华书店发行 广西民族印刷厂印刷

*

开本 787×109 1/32 印张 22.625 字数 504,000

1981年9月第1版 1981年9月第1次印刷

印 数 1—24,000 册

书号: 7113·399 定价: 1.61 元

前 言

本书汇集了各种类型的平面几何题近千题，一一作出解答，部分题目一题多解。解答力求准确、简明。前四章以证明题、计算题和作图题分类编集，第五章为综合题。编入的习题围绕中学教材的重点，既注意广度，也考虑深度，着重启发思路，培养学生掌握解题规律，提高分析和解决问题的能力。

收入本书的习题是编者廿多年来，在教学中留心精选和积累下来的。为了提高数学教学的质量，使中学生在独立思考解题之后得到启示和验证，根据《中学数学教学大纲》和《一九七八——一九八〇年高考数学复习大纲》的精神和要求编写而成，十分切合初、高中学生及同等学历的知识青年自学，同时也是中学青年教师的有益的教学参考书。

本书内容较系统、全面、选题较典型，既注意双基训练，又注意综合分析能力的培养。书前有证题方法分类，每章有定理小结，书末附有常用公式以利巩固记忆。

由于编者水平有限，书中缺点、错误难免，请读者不吝指正。

编 者

一九八〇年五月

目 录

证题方法分类 (1)

一、证明两线段相等 (1)

二、证明两直线平行 (2)

三、证明两直线垂直 (3)

四、证明成比例 (或成等积) 的线段 (4)

五、证明两线段的和、差、倍、分 (5)

六、关于不等的证题 (6)

七、证明两角相等 (6)

八、证明两个三角形全等 (8)

九、证明两个三角形相似 (包括多边形相似) (9)

十、证明共线点、共点线、共圆点、共点圆 (10)

第一章 直线形 (11)

一、证明题 (1 — 110 题) (12)

二、计算题 (111 — 138 题) (91)

三、作图题 (139 — 184 题) (110)

第二章 圆 (151)

一、证明题 (185 — 273 题) (154)

二、计算题 (274 — 314 题) (210)

三、作图题 (315 — 342 题) (241)

第三章 相似形	(259)
一、证明题 (343——451题)	(259)
二、计算题 (452——483题)	(324)
三、作图题 (484——516题)	(343)
第四章 多边形和面积	(369)
一、证明题 (517——576题)	(369)
二、计算题 (577——666题)	(408)
三、作图题 (667——716题)	(466)
第五章 综合题	(505)
(717——973题)	(505)
附：常用公式	(708)
(一) 三角形和四边形的角	(708)
(二) 多边形的角	(708)
(三) 三角形中几个重要的公式	(709)
(四) 正多边形的边长公式	(710)
(五) 三角形相关圆的半径	(711)
(六) 面积的基本图形及计算公式	(711)
(七) 常用的三角公式	(713)
(八) 三角形的边角关系和解直角三角形的四种情况	(715)

证题方法分类

一、证明两线段相等

证明这类问题可以利用：

- 1 两条成轴对称或中心对称的线段相等。
- 2 同一三角形中等角对等边。
- 3 等腰三角形顶角的平分线（或底边上的高）平分底边。
- 4 等腰三角形两腰上的高（中线或底角的平分线）相等。
- 5 全等三角形的对应边相等。
- 6 线段的垂直平分线上的任意一点到线段两端的距离相等。
- 7 角平分线上的任意一点到这角的两边的距离相等。
- 8 过三角形一边中点而平行于第二边的直线平分第三边。
- 9 平行截割定理：一组平行线和两条直线相交，如果在一直线上截得相等的线段，那么在另一条直线上也截得相等的线段。夹在两条平行线间的平行线段相等。
- 10 直角三角形斜边上的中点到三顶点距离相等。
- 11 直角三角形中 30° 角所对的边等于斜边的一半。

- 13 三角形的两边中点连线（中位线）等于第三边的一半。
- 14 梯形两腰中点连线（中位线）等于两底和的一半。
- 15 过梯形一腰中点而平行于底的直线平分另一腰。
- 16 平行四边形（包括矩形、菱形、正方形）对边相等，对角线互相平分。
- 17 矩形、正方形或等腰梯形的对角线相等。
- 18 垂直于弦（或过一弧的中点）的直径平分这弦（或这弧所对的弦）。
- 19 在同圆（或等圆）中，等弧对等弦。
- 20 在同圆（或等圆）中，等弦的弦心距相等。
- 21 相交两圆的公共弦被连心线平分。
- 22 自圆外一点所引圆的两条切线的长相等。
- 23 两圆的外（内）公切线的长相等。
- 24 圆外切四边形两组对边的和相等。
- 25 三角形的重心到各边中点的距离等于这边上中线长的三分之一。
- 26 在一比例式中，若两个后项相等，则两个前项亦相等，反之亦然。
- 27 等线段的和、差、同倍量或同分量相等。

二、证明两直线平行

证明这类问题可以利用：

- 1 平行于同一条直线的两条直线平行。
- 2 垂直于同一条直线的两条直线平行。
- 3 两直线与第三直线相交，若同位角（或内错角）相

等，则两直线平行。

- 4 两直线与第三直线相交，若同旁内角(或同旁外角)互补则两直线平行。
- 5 三角形两边中点的连线平行于第三边。
- 6 梯形两腰中点的连线平行于两底。
- 7 分三角形两边成比例的线段，平行于第三边。
- 8 平行四边形对边平行。
- 9 在同圆中夹等弧且不相交的二弦(或一弦一切线或两切线)互相平行。
- 10 到一条直线的距离等于定长的点的轨迹是和这条直线平行且距离等于定长的两条直线。

三、证明两直线垂直

证明这类问题可以利用：

- 1 直角的两边互相垂直。
- 2 一直线垂直于两平行线中之一条、则必垂直于另一条。
- 3 等腰三角形底边上的中线或顶角的平分线垂直于底边。
- 4 到线段两端距离相等的点，在线段的垂直平分线上。
- 5 三角形的一个角等于其他两个角的和，这个三角形是直角三角形。
- 6 三角形一边上的中线等于这边的一半，这个三角形是直角三角形。
- 7 若两邻角互为余角，则两外边互相垂直。
- 8 两邻补角的平分线互相垂直。

- 9 三角形中两边的平方和等于第三边的平方，这个三角形是直角三角形。
- 10 菱形、正方形的两对角线互相垂直。
- 11 过弦的中点的直径垂直于这弦。
- 12 过弧的中点的直径垂直于这弧所对的弦。
- 13 切线垂直于过切点的半径。
- 14 直径（半圆）上的圆周角为直角。
- 15 相交两圆的连心线垂直于公共弦。
- 16 三角形三条高相交于一点，这交点叫做三角形的垂心。
- 17 自圆外一已知点向此圆引两条切线，两切点的连线与已知点和圆心的连线互相垂直。

四、证明成比例（或成等积）的线段

证明几条线段成比例可以利用：

- 1 相似三角形或相似多边形对应边成比例。
- 2 平行线截得比例线段定理：一组平行线截两条直线所截得的线段对应成比例。
- 3 三角形内（外）角平分线定理：三角形一内（外）角的平分线，内（外）分对边所成的二线段，跟它们的邻边成比例。
- 4 平行于三角形一边的直线截其他两边，截得的线段对应成比例。
- 5 平行于三角形一边的直线截其他两边，一边和这边上的一条线段与另一边和另一边上的对应线段成比例。

- 6 直角三角形比例中项定理：直角三角形中，斜边上的高是两条直角边在斜边上的射影的比例中项；每一条直角边是斜边和这一条直角边在斜边上的射影的比例中项。
- 7 应用有关的比例线段定理（如圆的切线割线定理、相交弦定理、割线定理）。
- 8 应用相似三角形或相似多边形的性质定理和比例线段的基本性质定理。
- 9 应用相等的比或相等的积进行代换。

五、证明两线段的和、差、倍、分

证明线段的和、差、倍、分关系，可以利用：

- 1 作出两线段之和，再证明其与第三线段相等。
- 2 在第三线段上截取一段等于第一线段，证其余下部分等于第二线段。
- 3 延长短线段为其 2 倍，再证其与较长线段相等。
- 4 取长线段的中点，证其一半等于短线段。
- 5 利用特殊定理：
 - ① 三角形中位线等于底边的一半；过三角形一边的中点而平行于第二边的直线，平分第三边。
 - ② 梯形中位线等于两底和的一半；过梯形一腰的中点而平行于底的直线，平分另一腰。
 - ③ 直角三角形中 30° 角所对的边等于斜边的一半。
 - ④ 直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半。
 - ⑤ 三角形的任一中线被重心分成 $2:1$ 。
 - ⑥ 相似三角形对应边成比例和比例线段的基本性质定理。

六、关于不等的证题

(1) 证明线段的不等关系, 可以利用:

- 1 多边形的一边小于其他各边和。
- 2 同一三角形中, 大角对大边。
- 3 两个三角形中, 如果有两对边对应相等, 则两边夹角大的所对第三边也大。
- 4 自直线外一点向这直线所引的垂线和斜线中, 垂线最短; 并且在直线上射影长的斜线长, 反之, 长的斜线在直线上射影也长。
- 5 同圆或等圆中, 大弧对大弦, 大弦的弦心距较小, 反之亦成立。
- 6 全量大于分量。

(2) 证明两角的不等关系, 可以利用:

- 1 同一三角形中, 大边对大角。
- 2 三角形的外角大于其不相邻的任意一个内角。
- 3 两个三角形中, 如果有两对边对应相等, 则第三边大的所对的角大。
- 4 在同圆或等圆中, 大弧所对的圆心角(或圆周角)大。
- 5 全量大于分量。

七、证明两角相等

证明这类问题可以利用:

- 1 全等三角形的对应角相等。

- 2 相似三角形的对应角相等。
- 3 同一三角形中，等边对等角。
- 4 平行线的内错角（或同位角）相等。
- 5 两个角的两边对应平行，且方向相同（或完全相反），则这两个角相等。
- 6 两个角的两边对应垂直，若一角的左边垂直于另一角的左边（把目光正视角的顶点而向角的内部望去），一角的右边垂直于另一角的右边，则这两个角相等（或以两角同为锐角或钝角来判别）。
- 7 等腰三角形两底角相等；底边上的高、中线、中垂线均平分顶角。
- 8 等边三角形的三个角相等（均等于 60° ）。
- 9 两个等腰三角形顶角相等，则底角也相等。
- 10 三角形任一外角等于和它不相邻的两个内角的和。
- 11 两个三角形有两个角对应相等，则第三个角也相等。
- 12 平行四边形对角相等；等腰梯形同一底上的两角相等。
- 13 菱形（正方形）对角线平分内角。
- 14 同圆或等圆中，同弧或等弧所对的圆心角（或圆周角）相等。
- 15 弦切角等于它所夹弧上的圆周角。
- 16 自圆外一点引圆的两条切线所夹的角被这点和圆心的连线平分。
- 17 圆内接四边形的一个外角等于它的内对角；圆内接四边形两组对角的和相等（等于 180° ）。
- 18 到一个角两边距离相等的点在这个角的平分线上。

- 19 同角(等角)的余角相等;同角(等角)的补角相等.
- 20 等角的和、差、同倍量和同分量相等.
- 21 利用相关定理:
 - ①平行线的同旁内角的和等于 180°
 - ②两个角的两边对应平行,方向一边相同,一边相反,则这两个角的和等于 180°
 - ③两个角的两边对应垂直,一为锐角,一为钝角时,则这两个角的和等于 180° .
 - ④三角形三内角的和等于 180° .
 - ⑤直角三角形的两个锐角互余;等腰直角三角形每一个锐角等于 45° .
 - ⑥在直角三角形中,如果一直角边等于斜边的一半,则这条直角边所对的角等于 30° .
 - ⑦直径(半圆)上的圆周角是直角.
 - ⑧四边形四个内角的和等于 360° .
 - ⑨ n 边形所有内角的和等于

$$(n-2) \times 180^\circ = 2(n-2) \times 90^\circ.$$

八、证明两个三角形全等

证明这类问题可以利用:

- 1 两边及一夹角对应相等,则这两个三角形全等
(s 、 a 、 s)
- 2 两角及一夹边对应相等,则这两个三角形全等
(a 、 s 、 a).
- 3 两角及一对边对应相等,则这两个三角形全等
(a 、 a 、 s).

- 4 三边对应相等，则这两个三角形全等（ $s、s、s$ ）
- 5 直角三角形斜边和一直角边对应相等，则这两个直角三角形全等（斜边、直角边）。
- 6 直角三角形斜边和一锐角对应相等，则这两个直角三角形全等（斜边、一锐角）。
- 7 互为对称（轴对称或中心对称）的两个图形是全等形。
- 8 把一个图形放到另一个图形上去，若它们处处都是重合的，则这两个图形是全等形。

九、证明两个三角形相似（包括多边形相似）

证明这类问题可以利用：

- 1 平行于三角形一边的直线截其他两边，所截得的三角形和原三角形相似。
- 2 有两个角对应相等的两个三角形相似。
- 3 有两条边对应成比例，夹角相等的两个三角形相似。
- 4 有三条边对应成比例的两个三角形相似。
- 5 斜边和一直角边对应成比例的两个直角三角形相似。
- 6 相似多边形判定定理：
 - ①各角对应相等，各边对应成比例的两个多边形相似。
 - ②各边对应平行，且过对应顶点的直线交于一点的两个多边形相似（位似形）。

十、证明共线点、共点线、共圆点、共点圆

(一) 证明三点 A 、 B 、 C 共线，可以利用：

- 1 将其中二点 A 、 B 用直线连结，证直线 AB 过 C 点，
则 A 、 B 、 C 共线。
- 2 将其中一点 A 和另外二点 B 、 C ，分别用直线连结，
证这两直线 AB 、 AC 合一。
- 3 直线 l 过其中一点 A ， M 点在 l 上：
①若 B 、 C 在 l 同侧，则当 $\angle MAB = \angle MAC$ 时，
 A 、 B 、 C 共线。
②若 B 、 C 在 l 异侧，则当 $\angle MAB + \angle MAC = 180^\circ$
时， A 、 B 、 C 共线。

(二) 证明三条直线 a 、 b 、 c 共点，可以利用：

- 1 设 a 、 b 相交，证 c 过此交点。
- 2 a 与 b 和 c 的交点重合。
- 3 利用三角形的外心，内心，重心的性质。

(三) 证明 A 、 B 、 C 、 D 四点共圆，可以利用：

- 1 若 C 、 D 两点在线段 AB 所在直线的同侧，
且 $\angle ACB = \angle ADB$ ，则 A 、 B 、 C 、 D 四点共圆。
- 2 对角互补的四边形内接于圆。
- 3 外角等于内对角的四边形内接于圆。
- 4 有一定点到四边形各顶点等远，这四边形内接于圆。

证明几个圆共点：

证许多圆共点，往往可以化为共圆点的问题再来解决。

第一章 直线形

直线形的分类及其判定和性质

名 称	判 定	性 质
等腰 $\triangle$	1. 两边相等的$\triangle$. 2. 两内角相等的$\triangle$.	1. 等腰$\triangle$的两底角相等. 2. 等腰$\triangle$两腰的高、中线和两底角的平分线均分别相等. 3. 等腰$\triangle$顶角平分线是底边上的高、中线或垂直平分线, 也是这$\triangle$的对称轴.
等边 $\triangle$	1. 三个内角相等的$\triangle$. 2. 三边相等的$\triangle$.	1. 等边三角形的三内角、三中线、高、角平分线均分别相等. 2. 等边三角形每一内角平分线是其对边上的高、中线或垂直平分线, 也是这三角形的对称轴.
平行四边形	1. 两组对边分别平行. 2. 两组对边分别相等. 3. 一组对边平行且相等. 4. 两组对角分别相等. 5. 对角线互相平分.	1. 对边平行且相等. 2. 对角相等. 3. 邻角互补. 4. 是中心对称图形.
矩 形	1. 有一个角是直角的平行四边形. 2. 对角线相等的平行四边形. 3. 三个角都是直角的四边形.	1. 具有平行四边形的一切性质. 2. 四个角都是直角. 3. 对角线相等. 4. 既是中心对称图形, 又是轴对称图形.
菱 形	1. 一组邻边相等的平行四边形. 2. 对角线互相垂直的平行四边形. 3. 四边相等的四边形.	1. 具有平行四边形的一切性质. 2. 四条边相等. 3. 对角线互相垂直平分, 且每一条对角线平分它的一组对角. 4. 既是中心对称图形, 又是轴对称图形.
正方形	1. 一组邻边相等的矩形. 2. 有一个角是直角的菱形.	1. 具有矩形和菱形的一切性质. 2. 对角线与边成45°角.