数学分析习题课讲义

（下册）

吕　凤　刘玉琏
苑德新　王大海　编著

东北师范大学出版社

9125426
9125426
30
O17
31

数学分析习题课讲义

（下 册）

吕 凤 刘玉琏
苑德新 王大海 编著

东北师范大学出版社

福州大学图书馆藏书印

数学分析习题课讲义（下册）

SHU XUE FENXI XITI KE JIANG YI(XIA CE)

吕 凤 刘玉琏 苑德新 王大海 编著

责任编辑：李殿国 封面设计：李冰彬 责任校对：吕 凤

东北师范大学出版社出版
(长春市斯大林大街110号)
(邮政编码130024)

吉林省新华书店发行
长春市第九印刷厂制版
长春市第九印刷厂印刷

开本 850×1168毫米 1/32
印张 9.0625
字数：229千字

1990年9月第1版
1990年9月第1次印刷
印数：0001－4000册

SBN 7—5602—0453—8/0.51（压膜）定价：3.15元

目　　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第9章
级　　数

§9.1　数值级数

一　基　本　内　容

收敛与发散概念

定义 1　若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和数列$\{S_n\}$收敛，设

$$\lim_{n\to\infty}S_n=S,$$

则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，并称S是级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的和，表为

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots=S.$$

若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和数列$\{S_n\}$发散，则称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$发散。发散的级数没有和。

定义 2　若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，其和是S，第n项部分和是S_n，

而

$$r_n = S - S_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n - \sum_{k=1}^{n} u_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots,$$

称为级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$的$n$**项余和**，简称**余和**。显然，有

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty}(S - S_n) = 0.$$

收敛级数的性质

定理 1　若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$。

级数的柯西收敛准则　级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛的必要充分条件是，对任意$\varepsilon > 0$，总存在自然数$N$，当$n > N$时，对任意自然$p$，有

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

同号级数

正项级数收敛原理　正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛的必要充分条件是，它的部分和数列$\{S_n\}$有上界。

比较判别法　不等式形式：设有两个正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$，若存在自然数$N$，当$n \geqslant N$时，有

$$u_n \leqslant c v_n,$$

其中c是正常数。则

1)若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$也收敛；

2)若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$发散，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$也发散。

极限形式：设有两个正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$($\forall n\in$N，$v_n\neq 0$)，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=k \quad (0\leqslant k\leqslant +\infty).$$

1）若 $0<k<+\infty$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 有相同的敛散性；

2）若 $k=0$，且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛；

3）若 $k=+\infty$，且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$也发散。

柯西判别法 不等式形式： 设有正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$。

1）若存在自然数N，当$n\geqslant N$时，有

$$\sqrt[n]{u_n}\leqslant q\ (\text{常数}),$$

且$q<1$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；

2）若存在无限个自然数n，有

$$\sqrt[n]{u_n}\geqslant 1,$$

则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散。

极限形式：设有正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，且

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l,$$

1）若$l<1$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；

2）若$l>1$，则级数$\sum\limits_{n=1} u_n$发散。

达朗贝尔[①] **判别法**　不等式形式：设有正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(u_n>0)$。

1）若存在自然数N，当$n\geqslant N$时，有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant q\ (\text{常数}),$$

且$q<1$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛；

2）若存在自然数N，当$n\geqslant N$时，有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant 1,$$

则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$发散。

极限形式：设有正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(u_n>0)$，且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l.$$

1）若$l<1$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$收敛；

2）若$l>1$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$发散。

变号级数

莱布尼兹判别法　设有交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n(u_n>0)$。若

1）对任意自然数$n\geqslant 1$，有$u_n\geqslant u_{n+1}$；

2）$\lim\limits_{n\to\infty} u_n=0$，

---

① 达朗贝尔（*D·Alembert* 1717—1783）法国数学家。

则交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$收敛。

绝对收敛与条件收敛

定义 3　若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$每项取绝对值构成的正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$**绝对收敛**。

定义 4　若级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，而每项取绝对值构成的正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$发散，称级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$**条件收敛**。

定理 4　若级数$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛，即绝对收敛的级数必收敛。

狄利克莱判别法　设数列$\{a_n\}$单调减少，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，而级数$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$的部分和数列$\{P_n\}$有界，即存在正数$M$，对任意自然数$n$，有

$$|P_n|=|b_1+b_2+\cdots+b_n|\leqslant M,$$

则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛。

阿贝耳判别法　设数列$\{a_n\}$是单调有界，而级数$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛。

二　几　点　说　明

1．级数与数列。

级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$的敛散性归结为它的部分和数列$\{S_n\}$（$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k$）的敛散性，即级数的敛散性转化为数列的敛散性。反之，数列$\{a_n\}$的敛散性又可转化为级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})\quad（令a_0=0）$$

的敛散性。事实上，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n-1})$的$n$项部分和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k-1})=a_n$，恰是数列$\{a_n\}$的第$n$项$a_n$。

因此，级数与数列只是形式上的不同，没有本质的区别。所以说："研究级数及其和只不过是研究数列及其极限的一种新形式"。而级数这种形式更有着特殊的意义。例如，我们已知圆周率π是一个无理数，它可以表为十进无限非循环小数，即

$$\pi=3.141592653589793\cdots,$$

显然，我们找不到一个规律能够说出小数点后的第n位是几。但是，$\frac{\pi}{4}$却能写成下面级数的形式

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}+\cdots①$$

或
$$\pi=4(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}+\cdots)$$

于是，数π可表为一般项很有规律的级数，这充分地显示出级数的优越性。

正是因为级数与数列的敛散性可互相转化，所以收敛级数与收敛数列的有些性质也是平行的。现列表对比如下：

① 刘玉琏傅沛仁 数学分析讲义（下册），高等教育出版社，1982，第88页

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

	级　数	数　列
线性性质	若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$都收敛，其和分别是A与B，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(au_n+bv_n)$ 也收敛，其和是 $aA+bB$，其中a与b是常数。	若$\{a_n\}$与$\{b_n\}$都收敛，其极限分别是a与b，则 $\{\alpha a_n+\beta b_n\}$ 也收敛，其极限是$\alpha a+\beta b$，其中α，β是常数。
收敛条件	若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的部分和数列$\{S_n\}$有上界，则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛。	若数列$\{a_n\}$单调增加有上界，则$\{a_n\}$收敛。
柯西收敛准则	级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛$\Longleftrightarrow \forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}$，$n>N$，$\forall P\in N \Rightarrow$ $\lvert u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}\rvert<\varepsilon$。	数列$\{a_n\}$收敛$\Longleftrightarrow\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}$，$n>N,\forall P\in\mathbf{N}$ $\Rightarrow$ $\lvert a_{n+p}-a_n\rvert<\varepsilon$。

2．判别数值级数敛散性的一般判别法。

1）利用敛散定义

用定义自然能够判别同号级数，任意项级数的敛散性，但应用定义，必须先求出级数的部分和 S_n，然后再求出它的极限，而求前n项的部分和 S_n往往是非常困难的，所以利用敛散定义判别级数的敛散性有一定局限性。

2）利用级数基本性质

（i）若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，其和为S，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$也收

敛，其和是cS，其中c是常数。

(ii) 若级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$都收敛，其和分别是A与B，则级数$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$也收敛，其和是$A \pm B$。

(iii) 若去掉，增添或改变级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的有限项，则不改变级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$的敛散性。

(iV) 收敛级数依序，若干项加括号后所成的新级数仍然收敛，且收敛于原级数的和。

3）利用收敛的必要条件

$$若级数\sum_{n=1}^{\infty} u_n收敛\Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0。$$

即 $$若\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0 \Rightarrow 级数\sum_{n=1}^{\infty} u_n发散。$$

$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$是级数收敛的必要条件，而$\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$是级数发散的充分条件。

4）利用级数收敛的充要条件——柯西收敛准则

理论上应用柯西收敛准则能够判断正项级数，变号级数的敛散性，但是对多数级数在实际计算中会遇到一定困难。它在理论上的意义大于在应用上的意义。

3．判别正项级数敛散性常用的六种方法。

1）正项级数收敛原理。

2）比较判别法。

一般来说，运用极限形式的比较判别法方便些。但是无论用哪种形式的比较判别法都需要和已知敛散性的级数作比较。常用到的比较级数有等比级数，调和级数，p级数等。

3）柯西判别法。

一般来说，当u_n为n次方的形式，或含有n^n及a^n形式时，用柯西判别法比较方便。但是，当$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=1$时，判别法失效，另寻其它方法。

4）达朗贝尔判别法

一般来说，当u_n含有n^n、$n!$及a^n形式时，用达朗贝尔判别法比较方便。但是，当$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$时，判别法失效，另寻其它方法。

尽管柯西判别法与达朗贝尔判别法都是与几何级数比较得到的，但是，这两个判别法仍有区别，我们能够证明，若$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$。从而判别正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n_n$的敛散性，若能够用达朗贝尔判别法，则一定能够用柯西判别法。反之则不然。例如，判别正项级数

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^4}+\cdots+\frac{1}{2^{2n-1}}+\frac{1}{3^{2n}}+\cdots$$

的敛散性。若用柯西判别法，$\forall n\in N$，有

$$\sqrt[k]{u_k}=\begin{cases}\frac{1}{2} & \\ \frac{1}{3} & \end{cases}\leqslant\frac{1}{2},\quad \begin{matrix}当k=2n-1,\\ 当k=2n.\end{matrix}$$

则该级数收敛，而用达朗贝尔判别法，$\forall n\in N$，有

$$\frac{u_{k+1}}{u_k}=\begin{cases}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k<1, & 当k=2n-1,\\ \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^k>1, & 当k=2n.\end{cases}$$

则该级数的敛散性无法确定，即达朗贝尔判别法失效。

5）拉阿伯判别法① 设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，若

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=l.$$

(i) 当$l>1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛；

(ii) 当$l<1$时，级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散；

(iii) 当$l=1$时，另选别法

例如，判别正项级数

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}$$

$(\alpha>0,\ \beta>0,\ \gamma>0)$ 的敛散性。

若用达朗贝尔判别法，有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(1+n)(\gamma+n)}=1.$$

无法判别级数的敛散性。

若用拉阿伯判别法，有

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty} n\left[\frac{(1+n)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)}-1\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n[\gamma-\alpha\beta+(1+\gamma-\alpha-\beta)n]}{(\alpha+n)(\beta+n)}$$

$$=1+\gamma-\alpha-\beta.$$

则，当$\gamma>\alpha+\beta$时，级数收敛；当 $\gamma<\alpha+\beta$ 时，级数发散；当$\gamma=\alpha+\beta$时，判别法失效。

从而看出，拉阿伯判别法有时可以弥补达朗贝尔判别法的缺陷，即当$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$达朗贝尔判别法失效时，可以试用拉阿伯判别法。

① 东北师范大学等校编，数学分析(下)，高等教育出版社，第18页。

6）积分判别法　若$f(x)$在$[a, +\infty)$（$a>0$）上是正的单调减少的连续函数，则级数$\sum_{n=0}^{\infty} f(a+n)$与无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$同时收敛或同时发散。

4. 判别变号级数敛散性常用的四种方法.

1）级数的柯西收敛准则。

2）绝对收敛（见"基本内容"定理4）.它仅实用于绝对收敛的级数，而不实用于条件收敛的级数.

3）狄利克莱判别法。它是判别变号级数条件收敛一个有用的判别法。特别是，交错级数的莱布尼兹判别法是它的特殊情况。

4）阿贝尔判别法．它也是判别级数条件收敛的一个有用的判别法.

5. 判别数值级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$敛散性的程序：

首先，若$\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$，则级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散。

其次，若$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$或难确定$\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$时，则依正项、交错、任意项级数的次序判别其敛散性。一般来说，可按下列图表程序进行：（见下页表）

6. 绝对收敛与条件收敛级数的特点及其区分绝对收敛与条件收敛的意义

设数值级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$是变号级数。令

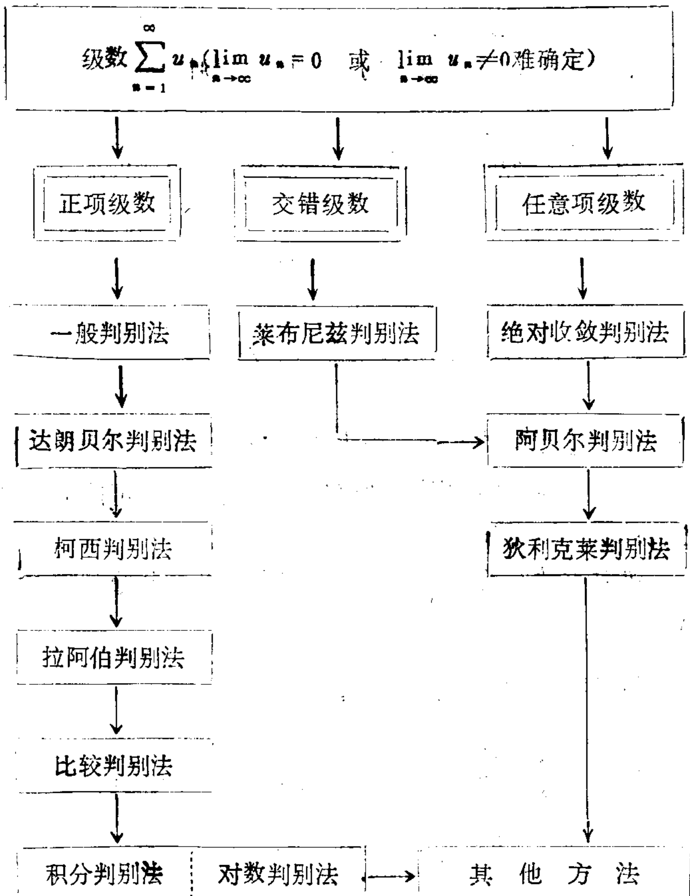
$$u_n^+ = \begin{cases} u_n, & \text{当} u_n \geq 0, \\ 0, & \text{当} u_n < 0, \end{cases} \qquad u_n^- = \begin{cases} 0, & \text{当} u_n \geq 0, \\ -u_n, & \text{当} u_n < 0. \end{cases}$$

有　　$$u_n^+ = \frac{|u_n| + u_n}{2}, \quad u_n^- = \frac{|u_n| - u_n}{2}.$$

显然，$u_n = u_n^+ - u_n^-$，$|u_n| = u^+ + u_n^-$。

级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^+$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n^-$都是正项级数，前者是原级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$中的正项和零（负项位置都换为 0）构成的级数；后者是原级数中负项的绝对值和零（正项位置都换为0）构成的级数。例如，

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots.$$



试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com