四川科学技术出版社

许仁忠 钟冠国 吴庭璧
蒋万里 江之源 编著

应用概率统计

3

经济管理应用数学基础

经济管理应用数学基础（三）

应用概率统计

许仁忠　钟冠国
蒋万里　吴庭壁　江之源　编著

四川科学技术出版社

一九八七年·成都

责任编辑：周　军
封面设计：朱德祥
技术设计：周　军

经济管理应用数学基础(三)

应用概率统计

许仁忠　钟冠国　蒋万里　吴庭壁　江之源　编著

四川科学技术出版社出版
(成都盐道街三号)
四川省新华书店发行
四川省地震局印刷厂印刷
统一书号：4298·93

1987年8月第一版　开本787×1092毫米1/32
1987年8月第一次印刷　字数155千
印数1—14900册　印张7
定价1.50元
ISBN 7—5364—0157—4/F·33

《经济管理应用数学基础》编写组成员（以姓氏笔划为序）

王其义　许仁忠　江之源　李茂男

刘祖佑　吴庭壁　孙　富　封长安

钟冠国　蒋万里

主纂　　许仁忠　江之源

主审　　吴　怀　王荫清

前　言

近年来，经济管理类成人教育发展很快，这套《经济管理应用数学基础》就是供成人数学教学和自学使用的。

本书是在分析了成人教育中数学课程教学的特点和需要的基础上编写的，它的基本特点是注重数学概念特别是数学计算方法，对数学理论，在不影响整体的逻辑性、系统性的前提下，进行了较大幅度的删减。特别是对成人数学教学中的难点，进行了恰当的处理。例如对《微积分》中的中值定理、《线性代数》中的向量组线性相关线性无关、《概率论》中的中心极限定理与大数定律等，进行了删舍，加强了数学基本运算特别是数学在经济管理中应用的内容。我们期望这样会对成人教育的数学教学有所补益和帮助。

全书共分三册：《微积分》、《线性代数与线性规划》、《应用概率统计》，全部讲完约需200个学时。本册《应用概率统计》由许仁忠、钟冠国、吴庭壁、蒋万里、江之源同志主编。由许仁忠、江之源同志主纂。

本书在编写和成稿过程中得到西南财经大学数学教授吴怀先生和成都科技大学数学教授王荫清先生的关心和指导，并承蒙他们审阅全书。初稿完成后，由西南财经大学、北京财贸学院、北京商学院、复旦大学管理学院、云南财贸学院、贵州财经学院、解放军军事经济学院、山西经济学院、山西经济管理干部学院、中国人民银行管理干部学院、保险管理干部学院等近

四十所院校五十余名数学教师参加讨论，提出了不少宝贵的意见和建议，使本书增色不少。在此，向吴怀先生、王荫清先生及参加教材讨论的老师们表示衷心的感谢。

编者水平有限，加之成书时间仓促，错误在所难免，恳请读者批评指正，以利提高和改进。

《经济管理应用数学基础》编写组

一九八七年元月十五日

目　录

第一章 随机事件及其概率

§1—1 随机事件

一、概率论和数理统计研究的对象

自然界和社会上发生的现象是多种多样的，有一类现象，在一定的条件下必然发生(或必然不发生)，例如：在标准大气压下，水加热到 100℃必然沸腾，同性电荷互相排斥，等等。这些现象称为确定性现象。过去，我们学过的微积分和线性代数等就是研究这类现象的数学工具。然而，在自然界和社会中也还存在着另一类现象，例如：在同一条件下抛同一枚硬币，其结果是可能出现正面，也可能出现反面；自动车床加工出来的机械零件，可能是合格品，也可能是废品。诸如此类，这样的现象称为随机现象。

应当指出，随机现象虽然在一次试验（如抛一次硬币，掷一颗骰子等）中其结果具有不确定性，但若进行大量重复的试验，其结果呈现出某种规律性。例如，多次重复抛一枚硬币，则出现正面与反面的次数大致相等；又如自动车床加工的大批零件中，其每批的废品率具有一定的规律。

综上所述，随机现象在个别的试验中呈现出不确定性，在大量重复试验中，又具有统计规律性。概率论与数理统计是研

究和揭示随机现象的统计规律性的一门数学学科。它是现代数学的一个重要分支。

概率统计的理论和方法在应用上是很广泛的。目前它几乎遍及所有的科学技术领域、工农业生产和国民经济各部门之中，例如：使用概率统计的方法可以进行气象预报、水文预报及地震预报，产品的抽样验收；在研制新产品时，为寻求最佳生产方案可用以进行试验设计和数据处理；在自动控制中可用以给出数学模型以便通过电子计算机来控制工业生产等。

二、随机事件

我们对随机现象的观察和试验称为随机试验，如上抛一枚硬币，掷一颗骰子，记录某地某天的最高气温，抽查某件产品的质量等等，都是随机试验。上抛一次硬币，我们就认为进行了一次随机试验，观察某地某天的最高气温也认为进行了一次随机试验。

一般地，随机试验具有以下三个特点：

(1)可以在相同的条件下重复地进行；

(2)每次试验可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

(3)进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现。

随机试验的结果称为随机事件。如上抛一枚硬币出现正面，掷一颗骰子出现2点等等都是随机事件。随机事件简称为事件。通常用大写的字母 A、B、C 等表示。在随机事件中，有的可以看成是由某些事件复合而成的，而有些事件则不能分解为其它事件的组合，这种不能分解成其它事件组合的最简单的事件称为基本事件。而由某些事件复合而成的事件称为

复合事件。例如，掷一颗骰子的试验中，观察其出现的点数，“1点”、“2点”、…“6点”就是基本事件。出现“奇数点”也是随机事件，但它不是基本事件，它是由出现“1点”、“3点”、“5点”这三个基本事件组成的，只要这三个基本事件中的一个发生，“奇数点”这个事件就发生，这是复合事件。同样，出现“偶数点”，“小于3的点数”都是复合事件。

每次试验中一定发生的事件称为**必然事件**，用符号Ω表示。每次试验中一定不发生的事件称为不可能事件，用符号ϕ表示。例如，在上面提到的掷骰子试验中出现“点数小于7”是不可能事件。

〔例〕已知一批产品100个，其中有95个合格品和5个次品。检查产品质量时，从这批产品中任意抽取10个来检查，则在抽出的10个产品中，“次品数不多于5个”这一事件是必然事件Ω；“次品数多于5个”这一事件是不可能事件ϕ；而事件A：“没有次品”，B：“恰有一个次品”，C：“有2个或3个次品”，D：“次品数小于4个”等等都是随机事件。

应该注意，必然事件和不可能事件本不属于随机事件，它们都是确定性事件，但为了研究上的方便，我们把它们当成特殊的随机事件。

§1－2　事件的关系与运算

为了研究随机事件及其概率，首先说明事件之间的各种关系。

1．事件的包含　如果事件A发生必然导致事件B发生，则称事件B包含事件A，或称事件A包含于事件B。记作

$$B \supset A \quad 或 \quad A \subset B$$

$B \supset A$的一个等价说法是，如果事件B不发生必然导致A也不会发生。显然，对任何事件A有：

$$\phi \subset A \subset \Omega$$

2．事件的相等 如果事件B包含事件A，且事件A也包含事件B，即二事件A与B中任一事件发生必导致另一事件发生，则称事件A与事件B相等。记作

$$A = B$$

3．事件的并(和) 两事件A与B中至少有一事件发生，是一个事件，即"A或B"，称为事件A与B的并(和)。记作

$$A \cup B \quad 或 \quad A + B$$

例如：$A=\{$ 掷骰子出现1点 $\}$

$B=\{$ 掷骰子出现2点或3点 $\}$

$A \cup B=\{$ 掷骰子出现不大于3点 $\}$

同样，n个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$中至少有一个发生，这一事件就称为$A_1, A_2, \cdots, A_n$的并(和)，即$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$

4．事件的交(积) 事件A与B同时发生，是一个事件，即"A且B"，称为事件A与B的交。记作

$$A \cap B \quad 或 \quad AB$$

例如，对某种钢珠的要求包括两方面：直径和光洁度。

$A=\{$直径合格$\}$

$B=\{$光洁度合格$\}$

$AB=\{$钢珠合格$\}$

同样，n个事件A_1，A_2，…，A_n都发生，这一事件称为事件A_1，A_2，…A_n的交(积)，记作

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$$

5. 事件的差　事件A发生而事件B不发生，这一事件称为事件A与B的差。记作

$$A-B$$

例如$A=\{$ 掷骰子出现奇数点 $\}$

$B=\{$ 掷骰子出现5点 $\}$

$A-B=\{$ 掷骰子出现1点或3点 $\}$

6. 互不相容事件　如果事件A与事件B不能同时发生，即$AB=\phi$，称事件A与B互不相容（或称互斥）。显然，基本事件间都是互不相容的。

7. 对立事件　事件“非A”称为A的对立事件（或逆事件）。记作$\bar{A}$

显然，$A\bar{A}=\phi$ 且 $A+\bar{A}=\Omega$

$$\bar{A}=\Omega-A,\quad \bar{\bar{A}}=A$$

$$\overline{A+B}=\bar{A}\cdot\bar{B}$$

例如，上抛两枚硬币，事件“至少一个出现正面”是事件“两个都是反面”的对立事件。

8. 完备事件组　若事件A_1，$A_2\cdots$，A_n为两两不相容，且$A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$，称$A_1$，$A_2$，$\cdots$，$A_n$构成一个完备事件组。

可用图1—1来表示上述的关系及运算。

〔例1〕事件A_i表示第i次取到合格品（$i=1$，2，3），试用符号表示下列事件：三次都取到了合格品；三次中至少一次取到了合格品；三次恰好二次取到合格品；三次中最多有一次取到合格品。

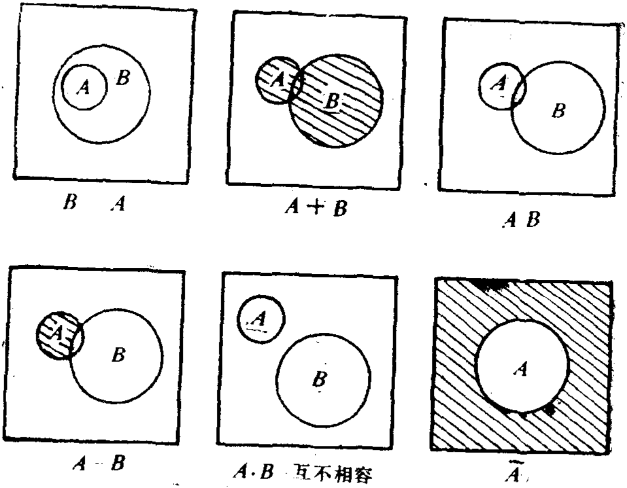

图1—1

解：三次都取到合格品：$A_1A_2A_3$

三次中至少有一次取到合格品：$A_1+A_2+A_3$

三次中恰有二次取到合格品：

$A_1A_2A_3+A_1\bar{A}_2A_3+\bar{A}_1A_2A_3$

三次中至多有一次取到合格品：

$\bar{A}_1\bar{A}_2+\bar{A}_1\bar{A}_3+\bar{A}_2\bar{A}_3$

〔例2〕事件A_i表示某射手第i次（$i=1, 2, 3$，）击中目标，试用文字叙述下列事件：A_1+A_2；$A_1+A_2+A_3$；$A_1A_2A_3$；$\bar{A}_2$；A_3-A_2；$A_3\bar{A}_2$；$\overline{A_2+A_3}$；$\bar{A}_1\bar{A}_2$；$\bar{A}_2+\bar{A}_3$；$\overline{A_2A_3}$；

$A_1A_2A_3+A_1A_2\bar{A}_3+A_1\bar{A}_2A_3+\bar{A}_1A_2A_3$

解： A_1+A_2：前两次射击中至少有一次击中目标；

$A_1+A_2+A_3$：三次射击中至少有一次击中目标；

$A_1A_2A_3$：三次射击都击中目标；

$\bar{A}_2$：第二次射击未射中目标；

$A_3-A_2=A_3\bar{A}_2$：第三次射击中目标而第二次 未击中目标；

$\overline{A_1+A_2}=\bar{A}_1\bar{A}_2$：前两次射击均未击中目标；

$\bar{A}_2+A_3=\overline{A_2A_3}$；后两次射击中至少有一次未 击中目标；

$A_1A_2A_3+A_1\cancel{A}A_2\bar{A}_3+A_1\bar{A}_2A_3+\bar{A}_1A_2A_3$：三次射击中至少有两次击中目标。

§1—3 事件的概率

一、概率的统计定义

设事件A在n次重复试验中发生了 m 次，比值$\frac{m}{n}$称为事件A发生的频率，它满足不等式：

$$0\leqslant\frac{m}{n}\leqslant1$$

如果A是必然 事 件，有 $m=n$，则$\frac{m}{n}=1$；如果A是不可 能 事件，有 $m=0$，则$\frac{m}{n}=0$。故必然事件频率为1，不可能事件频率为0。

对于随机事件在一次试验中是否发生是不确定的，但在大量重复试验中，它的发生具有统计规律性。

例如，看下面的实验结果，表1—1中n表示抛掷硬币的次数，m表示正面向上的次数，$\frac{m}{n}$表示正面向上的频率。

表1—1

实验序号	n=5		n=50		n=500	
	m	w	m	w	m	w
1	2	0.4	22	0.44	251	0.502
2	3	0.6	25	0.50	249	0.498
3	1	0.2	21	0.42	256	0.512
4	5	1.0	25	0.50	253	0.506
5	1	0.2	24	0.48	251	0.502
6	2	0.4	21	0.42	244	0.492
7	4	0.8	18	0.36	246	0.488
8	2	0.4	24	0.48	258	0.516
9	3	0.6	27	0.54	262	0.524
10	3	0.6	31	0.62	247	0.494

由表1—1可看出，出现正面的频率接近0.5，并且抛掷次数越多，频率越接近0.5。说明试验次数n很大时，事件A的频率具有一种稳定性，它的数值徘徊在某个确定的常数附近。而且一般地说，试验次数越多，事件A的频率就越接近那个确定的常数。于是，我们就看到，随机事件A发生可能性可用一个数来表示，这个刻划随机事件A在试验中发生可能性程度的小于1的正数就是随机事件A的概率。

定义1.1 在不变条件下，重复进行n次试验，事件A发生