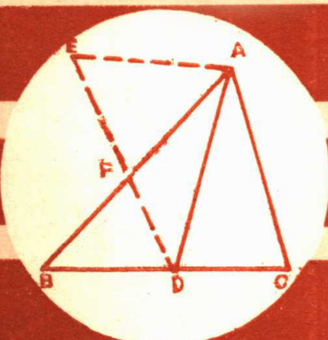
中学数学教学研究

第一辑

ZHONGXUE
SHUXUE
JIAOXUE
YANJIU



福建教育出版社

中学数学教学研究

（第　一　辑）

福 建 教 育 出 版 社

中学数学教学研究

（第一辑）

福建教育出版社编

*

福建教育出版社出版

福建省新华书店发行

福建教育出版社印刷厂印刷

*

787×1092毫米 32开本5·125印张107千字

1982年10月第一版 1982年10月第一次印刷

印数：1——8,900

书号：7159.757 定价：0.41元

说　　明

为了帮助教师了解中学数学教育科学研究的进展状况，我们从1981年我国报刊里选辑了有关改进数学教学方法的研究论文和经验文章十八篇，以供读者研究参考。

我们计划今后每年选编出版一本《中学数学教学研究》文选。欢迎读者为改进本书的编辑出版提供宝贵意见。

福建教育出版社

1982年5月25日

目　录

培养和提高学习数学的能力

梁之舜

数学是通向一切科学大门的钥匙。人们从学习文化开始，就接触到数学。小学和中学都开设有数学课程，在大学里，有些专业过去和数学不发生关系或关系不大，但随着科学技术向纵深和边沿发展，它们也与数学建立了不解之缘，以至有些本来怕学习数学的人，又与它狭路相逢。

在科学技术高度发展的今天，数学除了作为探索、了解和刻划自然规律的重要工具外，作为培养一个人的科学头脑和才能，也是必不可少的。

因此，并不是只有以后准备专门在数学方面进行学习和从事工作的人，才存在培养和提高数学能力的问题。也不能把学好数学只看作是为跨进大学的门槛捡一块“敲门砖”。

那么我们这里所说的数学能力是什么呢？

有人可能认为学好数学最重要的是记忆力。必要的记忆总是需要的，例如我们很早就记熟了乘法九九表，以后还要记熟一些三角公式、一些定理、一些级数的展式等，但历史上有贡献的伟大数学家没有一个是完全靠“伟大的记忆”而成功的。

下面就个人的所见谈几个方面：

1．运算能力——变换与化简

在学习数学中经常要进行各种运算，包括数学计算，公式的演算等。“心算很快”可能也是一种特异的才能。但不管用何种方式进行运算，绝不能完全靠单纯的机械方法达到快速的目的。不论初等数学或高等数学，利用“变换”，把复杂的问题变为简单问题，都是一个重要的方法。举两个初等数学的例子：

1．求 $\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\cdots\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ 之和。

2．求 $3\cdot5\cdot17\cdot\cdots\cdots\cdot(2^{2^{n-1}}+1)$ 之值。

第一题利用直接通分、第二题直接相乘当然都不会成功的，但经过一些简单的变换，第一题就可以化为

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$=\frac{n}{2n+1},$$

第二题则可变成

$$(2+1)(2^2+1)(2^{2^2}+1)\cdots(2^{2^{n-1}}+1)$$

$$=\frac{1}{2-1}(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^{2^2}+1)\cdots(2^{2^{n-1}}+1)$$

$$=2^{2^n}-1.$$

再举一个稍微复杂的问题：

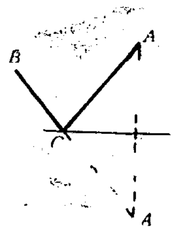
求 $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)+35$ 在 $-4<x<-1$ 的 极

值和极小值。

这个问题如直接展开为一个 x 的四次式来求解是较困难的。但如写为 $(x+2)(x+3)(x+1)(x+4)+35=(x^2+5x+6)\cdot(x^2+5x+4)+35=(x^2+5x+5+1)(x^2+5x+5-1)+35$ 再利用变换 $y=x^2+5x+5$ 化为 y^2+34 就容易了。

当然，这种变换与化简的运算能力的获得，有借于基础知识、基本技能以及观察能力的加强与提高。

2. 几何直观能力



一个大家熟悉的问题是：一条牛在河边一块草地 A 吃草，然后走到河边 l 喝水，再返回牛栏 B，问走哪一条路径最短？答案是作 A 对河岸 l 的对称点 A'，连 $A'B$ 交 l 于 C，则 ACB 是最短路径。这里利用了初等几何的一些简单知识（两点之间线段最短），借助几何图象的直观解决了问题。

解析几何是用代数方法研究几何问题，但反过来，利用几何图象中各种元素的关系，却可以使我们更直观地了解研究对象的性质。例如，把两个二元一次联立方程或三个三元一次联立方程的求解问题，分别化为平面上两条直线和空间三个平面求交点问题，就可以直观地看出，为什么方程之间系数不成比例才有解。

“几何直观”在所有数学中、甚至最抽象的分支的研究工作中起很大作用。这种能力还包括“空间想象能力”，具有这种能力的人可以在没有图象的条件下，闭起眼睛也能想象出来。例如，经过一个立方体的中心垂直于一条对角线的平

面和立方体相交的样子。这当然需要多观察研究一些立体图形或实物的点、线、面相交相切的情况，学会描绘一些立体图形或透视图。

除了“几何直观能力”以外，一般的“直观思维能力”（即数学观察力）也应受到重视。例如上面谈到的，在运算中应采用什么变换，以至如何从一般复杂问题察看出关键所在等，都属于这方面。

3．抽象思维能力

对客观事物的研究，都是从个别事物的研究开始的。首先分析它的特性，再和其它类似事物进行比较找出它们的共通点；然后进一步察看其他差异较大的事物，看能否概括抽象出更本质的共性的东西：概念或一般规律。一般说来，抽象思维的过程大致就是这样。

譬如自由落体下落的距离 s 随着时间 t 而改变，根据观察结果，s 与 t^2 成正比，比例常数是重力加速度的 $\frac{1}{2}g$，关系式是 $s=\frac{1}{2}gt^2$；而圆面积 A 随着半径 r 而变化，比例常数是圆周率 π，关系式是 $A=\pi r^2$。它们的表达式类似，但这并不是最本质的。最本质的关系是每一个可取的 t 或 r 值都对应一个 s 或 A 的值。从这里抽象出函数的概念。函数 $y=f(x)$ 可以描述千千万万对不同的变量彼此之间的关系，而且不只描述变化的对应关系，还可以通过它描述变化率和更高级的关系。从函数的定义范围又引出集合的概念。“函数”与“集合”都是近代数学最重要的概念之一。集合 A 可以表示时间从2秒到5秒，也可以表示半径从2cm到5cm，它还可表示全体有理

数或一个圆的所有内接三角形等等。应通过学习观察，培养从分析、综合、概括到抽象的能力，也应习惯于撇开具体内容进行抽象思考的能力。

还要提到的是，综合能力还应包括从各科数学不同结论中看出数学内在的和谐与一致，这对于增进我们对数学兴趣和了解是很有作用的。巴黎的“发明宫”中，在古代数学与近代数学两部分的间墙上，写上从欧拉公式推出的一个结果：$e^{i\pi}=-1$，这是很发人深省的。它不只通过这个简单公式表达了负数与虚数的关系，最重要的是把两个超越数 π 和 e 通过指数函数的形式表达出来，还有更深刻的涵义，例如通过欧拉公式建立了三角函数和级数、三角函数和指数函数、实变函数与复变函数的关系等，具有划时代的意义。

4．逻辑推理与表达的能力

数学是一门精确的科学。它之所以精确是因为它的结论都建立在严格的逻辑推理的基础上。要证明一个问题，或很快地找出解决问题的症结或关键，或把一个复杂的问题归结为较简单的问题，都需要有严密的逻辑思维的能力。当然所谓严格的逻辑推理，只涉及从什么前提应该得出什么结论，而结论的是否正确、是否符合实际，还得依赖于作为出发点的前提条件。因此不应把通过严格逻辑推理得出的结论，都看作绝对真理。

另一方面，数学是一种最科学的语言，它简练确切，逻辑性强。既然是一种语言，它就应能描述或表达某些深刻的科学内容，使别人听得懂看得懂，这样才起到通过“语言”进行思想交流的作用。往往有一些学生不重视逻辑的表达能

力，很难通过他所写的或所讲的东西，知道他是否把问题搞清楚了。这样，他当然不可能成为一个好的科学工作者。

数学能力还应包括提出问题，建立模型，解决问题和探究问题的能力，但这些都是上述各种能力的综合。

有些人对数学望而生畏，认为自己缺乏“数学头脑”。学好数学确实是需要有科学的脑袋，但这不纯粹是靠先天的条件。人与人之间在天赋上总会有些差异，正如土地之间的肥瘠会有差异一样。但土壤的改良，农田水利建设与合理的耕耘、轮种、施肥，可以改变土壤的性质。对学习数学来说，数学能力的培养正起这样的作用。

附记：本文可作为我在本刊一九八〇年第一期中发表的《谈谈数学学习中的想、推、猜、算》的续文。

〔选自《广东教育》1981年第1期〕

加强基础 开发智力 培养能力

刘孟德

《河南教育》编者按：应河南省中小学数学教学研究会的邀请，东北师范大学数学系刘孟德教授，于今年四月来我省作了“加强基础，开发智力，培养能力”的专题报告，受到了与会者的好评。现将报告的主要部分刊登出来。

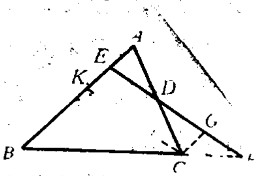
为了给国家培养合格的建设人才，并在实践活动中能够进行创造性工作，那么在中小学教育中就应该尽量地让学生模拟科学家发现和验证科学真理那样主动地学习，使他们从小就养成观察、分析和思考问题的习惯和能力，为将来进行创造性活动打下良好的基础。这里就涉及到如何用科学方法去整理观察到的感性材料，进行归纳分析，去粗取精、去伪存真，抽象概括出科学真理，从而顺利地达到解决问题的能力，也就是说，在教学过程中如何训练学生的合理的思维方法，充分发展他们的智力，培养他们创造性才能。落实到数学上，我认为教师应该以数学基础知识为基础进行如下的思维方法的训练，来培养学生分析问题和解决问题的能力，从而加深理解数学基础知识的内容，为进一步学习数学知识创造良好条件。

1. 实验观察法

一般说来数学题目基本分为两类：一类是条件和结论都

是已知的，让学生论证它的合理性；另一类是已知条件让学生获得合理结论。这两类问题有一个共同的特点，就是如何从已知条件求得正确的结论。因此人们必须根据已知条件结合过去所学的知识和方法对新问题进行比较性的尝试，最后得出正确的结论来。

例1 过$\triangle ABC$边AC的中点D作直线交AB于E，交BC的延长线于F。求证$AE:EB=CF:BF$。



解题的时候，学生开始会联想到过E点作平行BC的线段，利用平行线截割定理来证明，但是采取这种尝试法去实验，学生马上就会发现它与条件没有关系，正确的结论得不出来。

(1)如果联系D是AC的中点，那么过C点作$CG \parallel AB$，进行实验，马上就会发现利用$\triangle CGF \backsim \triangle BEF$及$CG=AE$，便可求得$AE:BE=CF:BF$。

(2)如果学生从中位线的知识出发来观察D是AC的中点时，他们就会作$CK \parallel FE$，把AE翻折成EK，从而利用平行线截割定理得$KE:BE=CF:BF$。

例2 求一个四位数，它的前两位数字相同，后两位数字相同，而且还是个完全平方数。

这个题目如果采取从1000到9999进行试验，那就十分麻烦了。反之，如果采取实验观察法，便知它的形式可写成：

$N=\overline{aabb}$，其中$0<a\leqslant 9$，$0\leqslant b\leqslant 9$。

联想到11倍数的性质。可知N能被11整除，因此

$$N=11\cdot\overline{a0b}.$$

再根据11倍数性质和N是完全平方数。那么$a+b$必为11的倍数。但由于

$$0<a+b\leqslant 18,$$

$$\therefore \quad a+b=11.$$

令 $b=11-a$，则

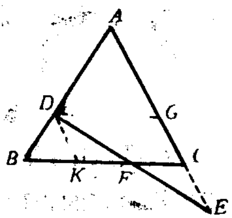
$$\overline{a0b}=100a+11-a=11(9a+1).$$

两位数$9a+1$应为完全平方数，从而得出$a=7$，$b=4$。所求的四位数为$7744=88^2$。

2．直觉思维法

人们的思维，一类是逻辑思维，即所谓的分析综合、归纳演绎、推理论证等思维形式；另一类就是直觉思维，它以感觉为前提，知觉为基础，对问题进行观察以后，联系旧知识作出大胆的猜测或试探性的结论来，其结论是否正确有待于验证。这种方法对发现真理确有好处。

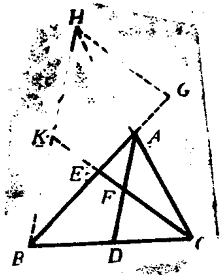
例3 在等腰$\triangle ABC$的两腰AB和AC的延长线上各取一点D和E，令$BD=CE$；那么DE必被底边BC平分。



通过观察，知道由$BD=CE$，要证F是DE的中点，马上由中位线定理可以得出过D点（或E）作$DG\parallel BC$的解题方法；或者联想到全等形定理，就知道过D点（或E）作$DK\parallel AC$的解题方法。

例4 已知AD是$\triangle ABC$的中线，过C点作CE交AB于E，交AD于F。求证 $2AE\cdot FD=AF\cdot BE$。

这一题的证明方法很多，但是都得利用比例方法证明。

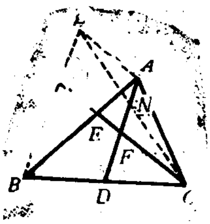


(1)要证：$2AE:BE=AF:FD$，就需要延长EA到G，使$AG=EA$，作$HB\parallel AD$，把$AF:FD$转化为$HK:KB$，进而证得$\triangle GAH\cong\triangle EAC$，及$HK:KB=2AE:BE$。

(2)要证：$AE:\frac{1}{2}BE=AF:FD$，只需要过D作$DM\parallel CE$，交AB于M，利用平行线截比例线段定理即可得证。

(3)要证：$AE:BE=AF:2FD$，就需要过B作$BL\parallel EC$。

(4)要证：$AE:BE=\frac{1}{2}AF:FD$，就需要过A和B分别作$AL\parallel CE$和$BL\parallel DA$，连CL交AD于N，从而得到$AN=NF$。



从上述证题中，完全可以看到它们是以观察为起点，利用D点是BC的中点，而联想到中位线定理而得到证题的思路的。如果没有基础知识作后盾，那就很难进行思维活动了。

3．归纳分析法

我们知道一般寓于特殊之中，人们在社会实践中，往往从特殊中归纳出一般规律，再经过推理论证来检验它的正确性。

例5 证明数列49，4489，444889，…中，每一项都是一个完全平方数。

解答这个问题，应从特例入手。首先由$49=7^2$，$4489=67^2$，$444889=667^2$和$44448889=6667^2$归纳出一般规律，即

$\overbrace{44\cdots4}^{n}\overbrace{88\cdots8}^{n}9$可能等于$(\overbrace{66\cdots6}^{n}+1)^2$。这样就可以促使我们作进一步的推断：

$$\overbrace{44\cdots4}^{n}\overbrace{88\cdots8}^{n-1}9=\overbrace{44\cdots4}^{n}\cdot 10^n+\overbrace{88\cdots8}^{n}+1$$

$$=\overbrace{44\cdots4}^{n}(\overbrace{99\cdots9}^{n}+1)+\overbrace{88\cdots8}^{n}+1$$

$$=36(\overbrace{11\cdots1}^{n})^2+12\cdot\overbrace{11\cdots1}^{n}+1$$

$$=(6\cdot\overbrace{11\cdots1}^{n}+1)^2=\overbrace{6\cdots6}^{n}7^2。$$

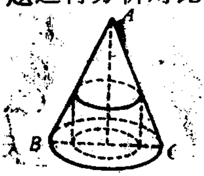
例 6 问 n 条彼此相交而无三线共点的直线能把平面分割成几块？

解这个问题，也应该从画直线开始。当一条直线画出后，它把平面分为 2 块；再画一条直线就增加了两块，而成为 $2+2$(块)，再画一条直线就增加了3块，共有$2+2+3$(块)：根据归纳思维就可以推测出画 n 条直线可能分割平面为：$2+2+3+\cdots+n=1+(1+2+\cdots+n)=\frac{1}{2}n(n+1)+1$(块)。

这个结论是否正确，可以采用数学归纳法加以证明。

4．类比联想法

这个方法就是把所要解决的新问题和过去所熟悉的问题进行分析对比，找出它们的内在联系，从而获得新问题的解决方法。



例7 在已知的圆锥体内，求侧面积最大的内接圆柱体。

从图形上看来，只要能把内接圆柱体

的直径算出，问题就解决了。这个问题的解决，实质上就和过去已熟悉的“在三角形内求面积最大的内接矩形”方法相类似。

设圆锥体的高为 H，底面直径为 D，内接圆柱体的高为 h，底面直径为 d，那么

$$\frac{H-h}{H}=\frac{d}{D},$$

$$=\frac{\pi dH}{D}(D-d)=\frac{\pi DH}{4}-\frac{\pi H}{D}\left(d-\frac{D}{2}\right)^2,$$

$$\therefore \quad d=\frac{D}{2}, \qquad h=\frac{H}{2}.$$

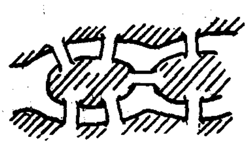
5. 抽象概括法

这个方法就是去掉实际问题中的枝节问题，揭露出它的本质内容，使问题简化，从而获得问题的解决。

例8 某铁路共有40个站，总局要印制多少种车票才能满足需要？

为了简化题目内容，我们可以不去考虑车站具体名称，而以1,2,3,…,40 标记站名，那么将40个数每取两个进行排列，其中一种排列就是一种车票。例如，31—5和5—2分别是从第三十一站到第五站和从第五站到第二站的车票。因此总共得印制 $P_{40}^2=40\times39$种不同的车票。

例9 七桥命题 我们知道十八世纪东普鲁士哥尼斯堡有



条布勒尔河，中间有一个小岛，然后分为两支流出。该城为了便利行人，在河上搭了七座桥（如图所示）。在这里的大学生每天