

中学数学教学经验选编



重慶人民出版社

中学数学教学經驗选編

重慶市教育局編

重慶人民出版社

中学数学教学經驗选編

重慶市教育局編

吳大俊封面設計

重慶人民出版社出版

(重慶李子壩建設新村91号)

重慶市書刊出版業營業許可証出字1号

重慶市印制公司印刷

新華書店重慶發行所發行

开本787×1092 1/32 印張2 $\frac{1}{2}$ 插表2 字数49千

1957年4月第1版第1次印刷

印数1—22,000

統一書号：7114·35

定价：(5) 0.18元

前 言

收在这里的七篇文章,是本市部分优秀的中学教师改进数学教学工作的经验。其中,有的是谈如何钻研、分析教材的科学性和系统性的;有的是谈如何改进教学方法的;有的是谈如何开展课外数学活动的。……鉴于这些经验有助于改进教学工作,故特编辑出版。

今后,我们准备把总结和推广经验的工作经常化,希望全市的教师们继续努力,丰富已有的经验,并不断创造和积累新的经验,使教学质量得以不断提高,以适应社会主义建设的需要。

重慶市教育局 1956年10月

目 次

教軌跡法作圖的一些体会·····	(1)
在全面鑽研教材的基礎上改進教學方法·····	(8)
在幾何教學中培養學生思維能力的一些体会·····	(27)
鑽研三角教材各章節間內在聯系的体会·····	(41)
如何在高三年級新課教學中復習舊課·····	(50)
教初中算術典型應用問題的一些体会·····	(57)
我們怎樣開展課外數學活動·····	(65)

教軌跡法作圖的一些体会

四川省重慶第四女中数学教研組

(本文只对軌跡法作圖教学中如何啓發學生進行分析和討論部分作介紹)

一 过去教学中存在的問題以及我們对它的認識

軌跡法作圖是學生难于掌握的課題。去年,我們講授這一單元時,也曾作了一定的努力,但由于未能抓着問題的關鍵,效果仍不好。學生的反映是:“听得懂,做不起題”;“作得出圖,分析不來”;“不知分析到那里才算完”;“作圖容易,討論困難”。……

這期講軌跡法作圖之前,教研組根据过去學生的反映和他們掌握知識的情況作了研究,初步找出了學生不能自覺掌握教材的一些原因:

1. 學生未能熟練地掌握基本軌跡。不少學生对教材中指出的六條基本軌跡,只能機械地背誦,对很簡單的軌跡題,如:“以已知線段BC為一邊,并且這邊上的中綫等于已知長 m 的 $\triangle ABC$ 的頂點A的軌跡是什麼?”不能迅速回答。

2. 缺乏分析問題的邏輯習慣。很多學生在解題時常常不經分析就拿起直尺、圓規,東湊西湊,企圖作出圖形來。

3. 分析能力不强。一方面,學生感到無從下手,不懂得根

据什么來作所求作的直綫或三角形或圓；另一方面是不了解軌跡法作圖的實質，不会去分析所要确定的点应滿足的条件，找出相应的軌跡，归之为軌跡交截。

4. 不知道根据什么來討論。很多学生不知道要根据題設条件來討論，討論时自己乱加条件；很多学生不会把各种軌跡交截問題的討論归結为二直綫的相互位置，直綫与圓的相互位置和二圓的相互位置的問題，利用判断定理來討論軌跡在什么条件下相交或不相交。

学生存在有上述的一些缺陷，也深刻的反映了教师在教學过程中存在的嚴重問題：沒有保証学生在学习过程中掌握必要的知識，对几何学科的一些基本概念具有明确性，因此，也就不可能啓发和誘導学生有目的有根据有步驟地去思考問題和解決問題；相反地，知識是被机械地填給学生的，使得学生不懂为什么要这样作的道理。

本学期教軌跡法作圖时，我們特別注意到并尽力使学生在分析和討論过程中，明确軌跡法作圖的目的、根据和步驟。

二 我們是怎样分析軌跡法作圖的

本單元的教學目的是使学生了解什么是軌跡法作圖，掌握其實質，自觉地应用这种方法來解作圖題。为了說明軌跡法作圖的實質，用学生所熟知的“求到三个定点等远的点”來說明，学生是容易理解的。同时，应该使学生認識軌跡法是几何作圖最基本的方法，早在初二上就运用过了。本單元的一开始，就应该使学生再次認識到分析对于作圖是必要的，从而明确分析的目的在于探求作圖的方法，也就是要找出適合題

設條件的點的軌跡，得到軌跡的交點。其次，要使学生明確分析的依據，否則，分析是無法進行的。

對於分析的依據，我們把它歸納為下列各個方面：

1. 分析總是在一定的已知條件下進行，並充分應用着給出的所有已知條件的。

2. 分析依據於滿足條件的圖形(草圖)的性質及已知件與未知件的關係，這些關係規定了所要確定的點應滿足的條件或這種點的軌跡。因此，學生必須具有必要的軌跡知識，如了解課本中的六條基本軌跡以及習題31中的軌跡題，才能找到適當的軌跡和軌跡的交點。

3. 分析依據下列諸概念：

- a. 作直線可確定屬於它的兩個點，或一點及一方向；
- b. 作三角形可確定它的三個頂點的位置；
- c. 作圓可確定它的圓心和半徑。

4. 研究兩軌跡有無交點時，在一般情況下，應歸結為下列諸關係：

- a. 直線與直線的相互位置關係；
- b. 直線與圓的相互位置關係；
- c. 圓與圓的相互位置關係。

如果學生事前沒有具備這些必要的基本知識和概念，分析將會是無依據的，不能順利進行的。

現在，我們舉一例來說明怎樣引導學生進行分析。

例：已知三角形的一邊，以及這邊上的中綫和高作此三角形。

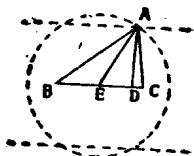
教师在黑板上寫出題目后，一定要求学生理解題意，分清已知条件和求作什么？并在黑板上寫出來。

画出草圖，“假定求作的三角形已經作出來了……”，分析就这样开始。如有必要，仍应再度向学生講明这种“假定”的目的和意义。

根据草圖再來理解一次題意。

教师：草圖中那些条件是已知的？

学生： $BC=a$ ， BC 上的高 $AD=h$ ， BC 上的中綫 $AE=m$ 。



分析过程中，尽可能讓学生自己得出所有問題的結論。我們又通过下列問題進行啓发。

教师：三角形的三个頂点的位置和这个三角形的形狀、大小、位置有什么关系？

学生：三个頂点的位置一定，这三角形的形狀、大小、位置就一定。

教师：那么，要作出这个三角形，我們需要确定什么？

学生：三个頂点的位置。

教师：我們怎样确定这三个頂点的位置呢？

这时，應該讓学生多想一想，这个題目曾在初二下作为例題講过。因此，学生会用过去所掌握的方法來回答，就是：先作出基礎三角形ADE，确定了点A，然后延長ED至C使 $EC = \frac{1}{2}a$ ，延長DE至B，使 $EB = \frac{1}{2}a$ ，就确定了B，C兩点， $\triangle ABC$ 即可作出。教师應該肯定这种分析，然后再提出問題。

教师：我們在探求作法时，即是以确定三角形的三个頂点的位置着眼，而 $BC=a$ ，只要作出 BC ，三角形的兩個頂点B

与C就确定了,然后再設法确定点A, 三角形也是可以作出來的。如果确定了B、C兩点之后,点A又該怎样确定呢?

讓学生根据草圖中标出的已知件來考虑点A与它們的关系,一定時間后又問: B与C确定后,三角形的第三个頂点A应滿足哪些条件?

学生: 到BC的距离应等于 h , 到BC中点E的距离应等于 m 。

这时,教师着重指出,点A必須同时滿足这两个条件。接着提出如何去找同时滿足这两个条件的点,而归结为軌迹交截。

教师: 放棄第二个条件, 滿足第一个条件的点的軌迹是什么?

学生: 是与BC平行,并且距离等于 h 的兩条平行直綫。

教师: 放棄第一个条件,引進第二个条件,滿足第二个条件的点的軌迹是什么?

学生: 是以BC的中点E为圓心, m 的長为半径所画的圓。

教师: 这两个軌迹如果有交点,交点滿足了哪些条件呢?

这时,学生自然会知道兩軌迹的交点同时滿足了这两个条件。因此,它是我們要确定的第三个頂点A。

在这里應該告訴学生,分析过程是否完結。这要看三角形的三个頂点的位置是否已被确定而定。如果三頂点的位置都被确定了,分析过程則已完成。

討論与分析过程一样,也应启发和誘導学生來進行。因此,我們也向学生提出了下列諸問題:

教师: 点A是怎样被确定的?

学生：兩軌跡的交点。

教师：兩軌跡如果沒有交点，我們能得到点A嗎？

学生：不能。

教师：第三个頂点不存在，能說这个題目有解嗎？

学生：不能。

告訴学生这个題目有解無解，就决定于這兩個軌跡有無交点。要判断這兩軌跡有無交点，必須弄清楚這兩個軌跡分別是什么圖形。由于它們分別直綫和圓，因此，兩軌跡有無交点的問題，就是直綫与圓的相互位置关系的問題。判断兩軌跡有無交点也就必然歸結为構成直綫与圓的各种位置关系的判断。

教师：直綫与圓的相互位置关系有几种情况？

学生：有相离、相切和相交三种。

教师：怎样來判定直綫与圓是相离、相切或相交呢？

这时，学生会想到要根据圓心到直綫的距离与圓的半徑的关系來判定。而本題中圓心到直綫的距离就等于底边上的高，圓的半徑就是底边上的中綫 m 。这就容易啓发学生作出下面的結論：

1. 圓心到直綫的距离小于半徑，即 $h < m$ 时，兩軌跡有4个交点。

2. 圓心到直綫的距离等于半徑，即 $h = m$ 时，兩軌跡有2个交点。

3. 圓心到直綫的距离大于半徑，即 $h > m$ 时，兩軌跡沒有交点。

讓学生完全明确上面的結論后，再向学生說明： 当求作

的圖形須依照一定的位置時，有幾個不同的位置，就算有幾個解，不管這些圖形是否全等；對求作的圖形的位置沒有一定的要求時，雖然有幾個不同的位置，只要是全等的，都算一個解。因此討論解的個數時，先要分析題目，看是上述中的哪一種，然後再根據軌跡交點的個數來決定解的個數。

題目解完後，應啟發學生對軌跡法的實質——尋求軌跡交截點，如何尋求軌跡的交點以及怎樣判斷軌跡有無交點進行總結。

由於這個題目用兩種方法解過，最後可以把三角形奠基法和軌跡法作一下比較：

1. 這兩種方法都要應用基本軌跡，都要找軌跡的交點。有的問題用軌跡法比較直捷些。

2. 如果是定位置的問題，用軌跡法來解對解的個數容易看得出來。在討論時，更易于從各種圖形的相互位置關係的判定把軌跡的有無交點、多少交點以及在什麼情況下有無解和多少解作全面的討論。

以上是我們在軌跡法作圖的教學中，如何啟發學生有依據有目的有步驟地來進行分析和討論的一點體會，錯誤之處，請各位老師指正。

在全面鑽研教材的基礎上 改進教學方法

四川省重慶第二中學校 胡世榮

一 向前看、向后看——掌握教材前後 聯繫、改進教學方法

馬克思主義辯證法告訴我們說，宇宙間任何事物都不是、也不可能是孤立存在的，而是互相聯繫着、互相制約着、互相依存着的。數學雖有高度的抽象性，但是，它是研究現實世界空間的與數量的形式與關係的科學，是建立在客觀存在的事物的基礎上的。因此，它本身更具有嚴格的邏輯系統、科學體系。我們在教學工作中，就必須掌握數學本身的這一特點，深入鑽研教材的系統性科學性，才能使學生獲得的知識是一個有机的整體，而不是一些支離破碎的知識。我們應該特別注意鑽研章節之間、高初中教材之間的聯繫。

1. 鑽研一章教材的系統性，改進教學方法。

舉立體幾何第三章“旋轉體”為例。

“旋轉體”一章內所研究的幾種旋轉體（圓柱、圓錐、圓台、球、球缺、球扇形），是某幾個平面圖形分別以在同一平面內的一條直線為軸旋轉而成的幾何體；此外，還研究幾種旋轉面（圓柱面、圓錐面、圓台面、球面、球冠、球帶），它們是一條

綫(綫段或圓弧)以在同一平面內的直綫為軸而旋轉成的幾何面。通過這些旋轉體、旋轉面的學習,能使學生的空間想象力得到進一步發展,能培養學生以運動的觀點去認識事物。因此,在“旋轉體”一章的教學過程中,要經常抓緊“旋轉”這一觀點來進行講解,這是使學生深刻掌握教材的一個關鍵。

某些“旋轉體”或“旋轉面”之間,存在着密切的內在聯系,而不是各自孤立存在的。它們之間,因條件改變而相互轉化。下面舉出球、球扇形、球缺之間的聯系來說明。

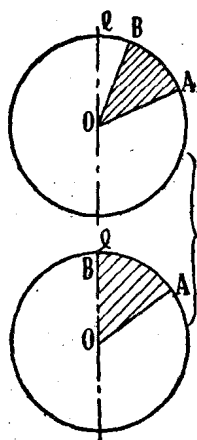


圖1.球扇形

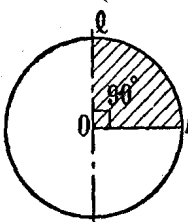


圖2.半球

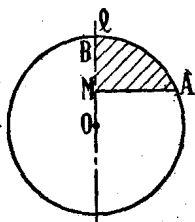


圖3.球缺

它們之間的聯系是這樣的:圖1中的圓扇形OAB繞着軸 l 旋轉一周,得一個球扇形。當這個圓扇形OAB兩條半徑的夾角 $\angle AOB$ 是一個直角的時候,即得一個特殊的圓扇形AOB,如圖2,這樣的一個圓扇形繞軸 l 旋轉一周,即得一個新的幾何體——半球。球扇形與半球之間之所以存在着這樣的聯系,又是建立在平面幾何中的圓扇形之間的關系上的。再就

圖 3 來看，一個圓面的一部分 ABM 繞着軸 l 旋轉一周而得一個幾何體——球缺。當 MA 過圓心 O 點時，即如圖 2，這時所得的一個球缺即是一個半球，而半球是一個特殊的球缺。它們之間之所以有這樣的聯繫，也是建立在兩個平面圖形之間存在有那樣的聯繫的基礎上的。

球扇形與半球之間、球缺與半球之間既然存在着如上所述的內在聯繫，在教學中就按照下列步驟把這一精神貫徹進去：

第一步，在講授定義的時候就注意它們之間的聯繫。教材的順序是先講球，次講球扇形，再講球缺。教材給球的定義是這樣的：“一個半圓以它的直徑作軸旋轉一周所得的面叫球面。球面圍成的幾何體，叫球。”（圖 4）。此後，即引導學生思考，如圖 5 中， AOB 是圓面的 $\frac{1}{4}$ ，它繞着直線 l 旋轉，得到的一個幾何體是半球。此時，即告訴學生圖 5 中的 AOB 是一個特殊的圓扇形，便於以後為發現半球與球扇形之間的關係作準備。至講球扇形的定義之後，又讓學生回顧圖 1 及圖 2 中兩個圓扇形之間的關係，因此使學生認識到球扇形與半球之間的本質上的聯繫。同樣地，在最後講到球缺的時候，又指出球缺與半球之間的聯繫，即半球是一個特殊的球缺。

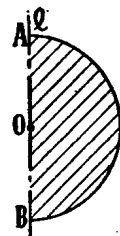


圖 4.

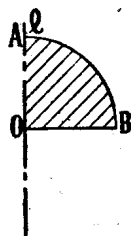
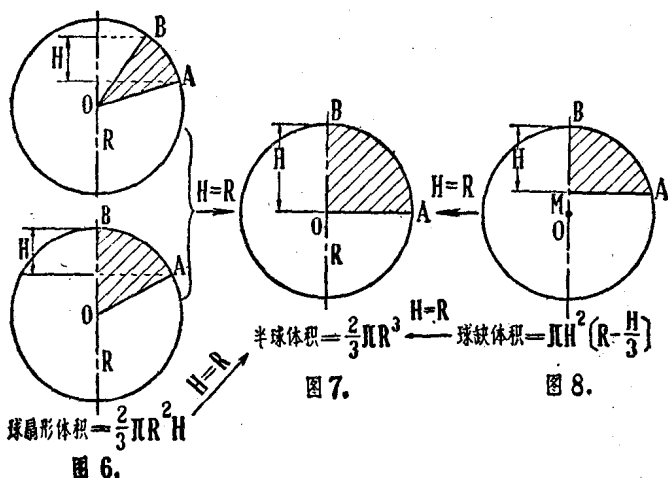


圖 5.

第二步，指出它們求體積公式之間的聯繫。這是建立在這三個幾何體在本質上有如上所說的聯繫這一基礎上

的。按教材順序是先講球扇形的體積，得到：球扇形體積 $= \frac{2}{3} \pi R^2 H$ 。接着又求得：球體積 $= \frac{4}{3} \pi R^3$ 。此時，又照圖 6 及圖 7 來看，圖 6 中球扇形的底面（球冠或球帶）上的高是 H ，當 $H=R$ 時，即如圖 7，也就是得一個半球。因此，在球扇形體積 $= \frac{2}{3} \pi R^2 H$ 中，若 $H=R$ ，則直接推出半球體積 $= \frac{2}{3} \pi R^3$ ，因而球體積 $= \frac{4}{3} \pi R^3$ 。這樣，就找出球扇形體積公式與半球體積公式之間的密切聯繫。也以同樣方式，再找出球缺體積公式與半球體積公式之間的聯繫，如圖 7 及圖 8 所示。

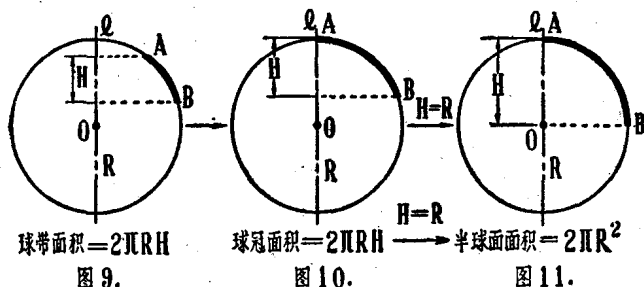
第三步，全面地進行復習。應用圖 6——圖 8 中的全部內容，從定義到求體積公式，進行全面的系統的復習，使學生獲得的知識系統化。



總起來說，緊緊抓住教材的內在聯繫進行教學，使學生在認識了個別事物的特殊本質的基礎上，進而認識有關事物的

共同本質，最后又由一般到特殊進行概括复習，这是合乎人的認識过程的。因此，学生獲得的知識是深刻的、全面的，也是系統的。这正如用一条綫把許多珠子串來，穿好后只要提起綫來，所有珠子都会被提起來。

同样地，在球帶、球冠、半球面之間，也存在着密切的联系，



如圖 9——圖 11 所示。同样地，在稜柱、稜錐、稜台之間，在圓柱、圓錐、圓台之間，都有着这样密切的联系，这里不再詳談。

2. 掌握高初中教材的內在联系，改進教学。

高初中数学課本的編寫，是根据“直綫式”原則的（不是“圓周式”）。这是苏联課本的一个突出特点，与旧課本是不同的。因此，我們要从高初中教材的联系中去深入鑽研，对教材的精神實質才可能深刻掌握。現举出兩個例子來說明鑽研高初中教材联系的重要意义。

第一，代数中为什么不用“十字相乘法”進行因式分解？

首先，就初中代数教材來看。

初中二年級所學習的“多項式的因式分解”，大綱規定要通曉三種方法：提出各項的公因式于括号外、集項、运用公式。在学生熟練掌握三種基本方法的基礎上，“当分解二次三