2004 版

1987 年～2003 年

历届数学考研试题研究

(数学一)

考点分析·应试技巧·解题训练

主编　武忠祥

编著　魏战线　吴云江

西安交通大学出版社

·西安·

目 录

第3章　线性代数

第1章 客观题解题方法与技巧

硕士研究生人学考试数学试题中的客观题有两种:一种是填空题,另一种是选择题.客观题在研究生人学考试中占30分,占总分近三分之一.从目前情况看,考生在客观题部分得分率很低,正是由于这部分得分率很低,所以总分就很难上去.分析其原因主要是两方面:一方面是考生做计算题的准确率较低,基本概念和基本理论没有吃透;另一方面是考生对求解客观题的解题方法和解题技巧掌握得不好.

填空题绝大部分是计算题,但填空题不像一般计算题,它只看结果,不看过程.所以,若做计算题的准确率不高,填空题很容易失分.选择题大部分主要考查基本概念和基本理论,如果基本概念和基本理论没有吃透,选择题部分也就很容易丢分.另一个方面,同一道题出成客观题后往往会有更巧妙更简单的方法.当然客观题用我们平时求解主观题的方法也能求解,但这种一般方法和简单方法从解题时间上看有时相差几倍,甚至十来倍.因此,要提高客观题部分的得分率,一方面要提高做计算题的准确率,吃透基本概念和基本理论;另外一个很重要的方面,就是要掌握一定的客观题的解题方法和技巧.本章主要是通过一些典型例题,归纳总结客观题解题方法和技巧,以提高考生求解客观题的能力.

1.1 填空题的求解方法与技巧

填空题绝大部分是计算题,常用的技巧有三种:一种是利用几何意义;另一种是利用物理意义(重心、形心);第三种是利用对称性和奇偶性.

1. 利用几何意义

例1 (00年,数学一) $\int_0^1 \sqrt{2x - x^2}\mathrm{d}x =$ ________.

解　本题应填$\frac{\pi}{4}$. 本题常规的求解方法是先把$\sqrt{2x-x^2}$根号里面配方，再用三角代换，但计算量较大. 实际上，本题根据定积分几何意义立刻知道应填$\frac{\pi}{4}$. 事实上，该积分在几何上表示单位圆$(x-1)^2+y^2\leqslant 1$面积的$\frac{1}{4}$，如图 1.1.

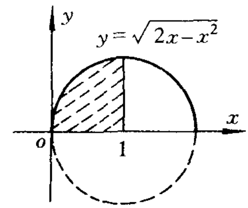

图 1.1

例 2　(91 年，数学一) 若随机变量 X 服从均值为 2，方差为 σ^2 的正态分布，且 $P\{2<X<4\}=0.3$，则 $P\{X<0\}=$ ________.

解　应填 0.2.

由于正态分布的密度函数是关于均值 $x=2$ 对称. 由图 1.2 易知

$$P\{X<0\}=S_2=0.5-S_1$$
$$=0.5-0.3=0.2$$

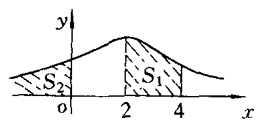

图 1.2

例 3　$\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant a^2}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy=$ ________.

解　应填$\frac{2}{3}\pi a^3$.

事实上，在几何上原题中积分应等于球体 $x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$ 的体积的一半，因此应为$\frac{2}{3}\pi a^3$

2. 利用物理意义(重心，形心)

例 4　(94 年，数学三) 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant x+y+1\}$，则 $\iint\limits_D(x+y)dxdy=$ ________.

解　应填$\frac{3}{2}\pi$.

积分域 D 实际上是圆域 $(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2\leqslant\frac{3}{2}$.

由形心公式知：　$\bar{x}=\dfrac{\iint\limits_D x\,dxdy}{S_D}$，$\bar{y}=\dfrac{\iint\limits_D y\,dxdy}{S_D}$

其中 $\bar{x}$，$\bar{y}$ 分别表示区域 D 形心的 x 坐标和 y 坐标，S_D 表示区域 D 的面积.

本题中的圆域 $(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2\leqslant\frac{3}{2}$ 形心显然是圆心 $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，则 $\bar{x}=\bar{y}=\frac{1}{2}$，而 $S_D=\pi\times\frac{3}{2}=\frac{3}{2}\pi$

则 $\iint\limits_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=S_D\cdot\bar{x}=\frac{3}{2}\pi\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\pi$，$\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3}{4}\pi$

故
$$\iint\limits_D (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3}{2}\pi$$

注　本题原题是计算题.

例 5　(99 年,数学三,数学四) 设 D 是由直线 $x=-2$, $y=0$, $y=2$ 以及曲线 $x=-\sqrt{2y-y^2}$ 所围成的平面域,则 $\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$ ________.

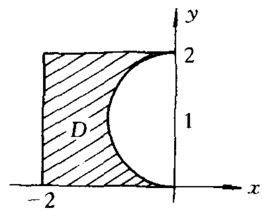

图 1.3

解　应填 $4-\frac{\pi}{2}$.

积分域 D 如图 1.3 所示,由图 1.3 不难看出 $\bar{y}=1$，积分域 D 的面积 S_D 应为正方形面积减去半圆面积,即

$$S_D=4-\frac{\pi}{2}$$

因此,$\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\bar{y}\cdot S_D=4-\frac{\pi}{2}$.

注　本题原题是计算题,事实上数学三和数学四中有5年的试题都可用此技巧求解.

3. 利用对称性和奇偶性

例 6　(87 年,数学三、数学四) $\int_{-\pi}^{\pi}x^4\sin x\mathrm{d}x=$ ________.

解　应填 0.

由于 $x^4\sin x$ 为奇函数,且积分区间 $[-\pi,\pi]$ 关于原点对称.

例 7　(94 年,数学三,数学四) $\int_{-2}^{2}\frac{x+|x|}{2+x^2}\mathrm{d}x$ ________.

解　应填 ln3

$$\text{原式}=\int_{-2}^{2}\frac{x}{2+x^2}\mathrm{d}x+\int_{-2}^{2}\frac{|x|}{2+x^2}\mathrm{d}x$$
$$=0+2\int_{0}^{2}\frac{x}{2+x^2}\mathrm{d}x$$

$$= \ln(2 + x^2)\Big|_0^2 = \ln 3$$

例 8　(01 年,数学二) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(x^3 + \sin^2 x)\cos^2 x \mathrm{d}x =$ ________.

解　应填$\frac{\pi}{8}$.

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3\cos^2 x \mathrm{d}x + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos^2 x \mathrm{d}x \\
&= 0 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos^2 x \mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x(1 - \sin^2 x)\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \mathrm{d}x - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \mathrm{d}x \\
&= 2\left[\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{8}
\end{aligned}$$

注　本题中用到基本公式 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \mathrm{d}x = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdot \cdots \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$,($n$ 为偶数).

例 9　(94 年,数学一,数学二) 设区域 D 为 $x^2 + y^2 \leqslant R^2$,则 $\iint\limits_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$ ________.

解　应填$\frac{\pi}{4}R^4\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)$.

由于本题积分域为 $x^2 + y^2 \leqslant R^2$,由 x 和 y 的对称性知

$$\iint\limits_D x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_D y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

因此

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\iint\limits_D x^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\iint\limits_D (x^2 + y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi}{4} R^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right)$$

例 10 (98 年,数学一) 设 l 为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$,其周长记为 a,则 $\oint_l (2xy + 3x^2 + 4y^2) ds =$ ________.

解 应填 $12a$.

由于 l 关于 y 轴对称,且 $2xy$ 是 x 的奇函数,则 $\oint_l 2xy ds = 0$, 又因为 l 的方程可改写为 $3x^2 + 4y^2 = 12$

则 原式 $= \oint_l (3x^2 + 4y^2) ds = 12\oint_l ds = 12a$

1.2 选择题的解题方法和技巧

蜒究生入学考试数学试卷中的选择题是单项选择题. 所谓单项选择题也就是四个选项中有且仅有一个选项是正确的. 因此,常用的解题方法是两大类:一种是直接验证某个选项正确,则其余选项必定不正确(不必验证). 这种方法通常称为**直接法**;另一种方法是验证其中三个选项不正确,则剩下的一个选项必定正确(也不必验证),这种方法通常称作**排除法**.

1. 直接法

直接法就是直接验证某个选项正确,通常有两种途径,一种是通过直接计算或推演得出某个选项正确,这种方法通常称为*推演法*;另一种方法是借助几何分析得出正确选项,这种方法叫*几何法*. 下面举例说明推演法和几何法的应用.

1) *推演法*

例 1 (91 年,数学一,数学二) 曲线 $y = \frac{1 + e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}}$

(A) 没有渐近线. (B) 仅有水平渐近线.

(C) 仅有铅直渐近线. (D) 既有水平渐近线也有铅直渐近线.

解 因为 $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1 + e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}} = 1$, 则原曲线有水平渐近线 $y = 1$, 又 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1 + e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}} = \infty$, 则原曲线有铅直渐近线 $x = 0$, 所以应选(D).

例 2　(93 年，数学一，数学二) 设 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin(t^2)\mathrm{d}t$，$g(x)=x^3+x^4$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的

(A) 等价无穷小．　　(B) 同阶但非等价无穷小．

(C) 高阶无穷小．　　(D) 低阶无穷小．

解
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x}\sin(t^2)\mathrm{d}t}{x^3+x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin^2 x)\cos x}{3x^2+4x^3}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2+4x^3}=\frac{1}{3}$$

则应选(B)．

例 3　(98 年，数学三，数学四) 设周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，周期为 4，又 $\lim_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(5,f(5))$ 处的切线斜率为

(A) $\frac{1}{2}$　　(B) 0　　(C) -1　　(D) -2

解　$\lim_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(1-x)-f(1)}{-x}=\frac{1}{2}f'(1)=-1$

则　$f'(1)=-2$，由 $f'(x)$ 周期性知，$f'(5)=f'(1)=-2$

故应选 (D)．

2) 几何法

例 4　(97 年，数学一，数学二) 设在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)>0$，$f'(x)<0$，$f''(x)>0$，令 $S_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，$S_2=f(b)(b-a)$，$S_3=\frac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)$ 则

(A) $S_1<S_2<S_3$　　(B) $S_2<S_1<S_3$

(C) $S_3<S_1<S_2$　　(B) $S_2<S_3<S_1$

解　由题设可知，在 $[a,b]$ 上，$f(x)>0$ 单调减，曲线 $y=f(x)$ 上凹，如图 1.4．S_1 表示 $y=f(x)$ 和 $x=a$，$x=b$ 及 x 轴围成曲边梯形面积，S_2 表示矩形 $abBC$ 的面积，S_3 表示梯形 $AabB$ 的面积．由图 1.4 可知，$S_2<S_1<S_3$．故应选(B)．

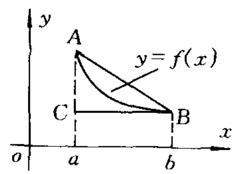

图 1.4

例 5　(97 年，数学三，数学四) 若 $f(-x)=f(x)$，$(-\infty<x<+\infty)$，在 $(-\infty,0)$ 内 $f'(x)$

>0，且 $f''(x)<0$，则在 $(0,+\infty)$ 内

(A) $f'(x)>0,\ f''(x)<0$

(B) $f'(x)>0,\ f''(x)>0$

(C) $f'(x)<0,\ f''(x)<0$

(D) $f'(x)<0,\ f''(x)>0$

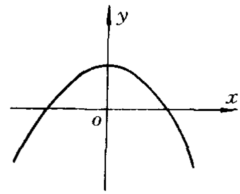

图 1.5

解 由 $f(-x)=f(x)$ 知，$f(x)$ 为偶函数，而由在 $(-\infty,0)$ 内 $f'(x)>0$，且 $f''(x)<0$ 知在 $(-\infty,0)$ 内，$y=f(x)$ 的图形下凹单调增，则如图 1.5 可知，$f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内，$f'(x)<0,\ f''(x)<0$，则应选(C).

例 6 (93 年，数学三) 设随机变量 X 的密度函数是 $\varphi(x)$，且 $\varphi(-x)=\varphi(x)$，$F(x)$ 是 X 的分布函数，则对任意实数 a，有

(A) $F(-a)=1-\int_0^a\varphi(x)\mathrm{d}x$

(B) $F(-a)=\frac{1}{2}-\int_0^a\varphi(x)\mathrm{d}x$

(C) $F(-a)=F(a)$

(D) $F(-a)=2F(a)-1$

解 由 $\varphi(-x)=\varphi(x)$ 知，$\varphi(x)$ 为偶函数，其图形关于 y 轴对称，如图 1.6 由几何意义可知，

$F(-a)=S_1$

$$\int_0^a\varphi(x)\mathrm{d}x=S_2$$

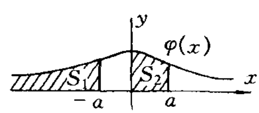

图 1.6

则 $S_1=\frac{1}{2}-S_2$，即 $F(-a)=\frac{1}{2}-\int_0^a\varphi(x)\mathrm{d}x$

故应选(B).

例 7 (99 年，数学一) 设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(0,1)$ 和 $N(1,1)$，则

(A) $P\{X+Y\leqslant 0\}=\frac{1}{2}$

(B) $P\{X+Y\leqslant 1\}=\frac{1}{2}$

(C) $P\{X-Y\leqslant 0\}=\frac{1}{2}$

(D) $P\{X-Y\leqslant 1\}=\frac{1}{2}$

解　由于独立正态分布的随机变量的线性组合仍服从正态，则

$$X+Y \sim N(1,\sqrt{2}^2),\ X-Y \sim N(-1,\sqrt{2}^2)$$

由正态分布的几何意义知，正态分布的密度函数关于均值左右对称，则其小于均值的概率为 $\frac{1}{2}$，则

$$P\{X+Y<1\}=\frac{1}{2}$$

故应选(B).

2. 排除法

所谓排除法就是说明原题四个选项中某三个均不正确，则剩余一个选项必然正确；这种方法在使用时通常是举反例.

例 8　(96年，数学二) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\delta,\delta)$ 内有定义，若当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时，恒有 $|f(x)|\leqslant x^2$，则 $x=0$ 必是 $f(x)$

(A) 间断点.

(B) 连续而不可导的点.

(C) 可导的点，且 $f'(0)=0$.

(D) 可导的点，且 $f'(0)\neq 0$.

解　令 $f(x)=x^3$，显然 $x\in(-\delta,\delta)$ 时，$|f(x)|=|x^3|\leqslant x^2$. 且 $f'(x)=3x^2$，$f'(0)=0$，则(A)(B)(D)均不正确，故应选(C).

例 9　(90年，数学一，数学二) 已知 $f(x)$ 在 $x=0$ 某邻域内连续，且 $f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则在点 $x=0$ 处 $f(x)$

(A) 不可导.　　　　(B) 可导且 $f'(x)\neq 0$.

(C) 取得极大值.　　　　(D) 取得极小值.

解　由于当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$，所以令 $f(x)=x^2$，则 $f(x)$ 符合原题设条件. 而 $f(x)=x^2$ 在 $x=0$ 处可导，$f'(0)=0$，取极小值，则(A)(B)(C)均不正确，故应选(D).

例 10　(01年，数学三，数学四) 设 $f(x)$ 的导数在 $x=a$ 处连续，又 $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{x-a}=-1$，则

(A) $x=a$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

(B) $x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

(C) $(a,f(a))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D) $x=a$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(a, f(a))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

解 若取 $f'(x)=-(x-a)$，即令 $f(x)=-\frac{1}{2}(x-a)^2$，则显然 $f(x)$ 符合原题条件，$f(x)=-\frac{1}{2}(x-a)^2$ 在 $x=0$ 取极大值，且 $(a, f(a))$ 也不是 $y=-\frac{1}{2}(x-a)^2$ 的拐点，则(A)(C)(D) 均不正确，故应选(B).

例 11 (99 年，数学一，数学二，数学三，数学四) 设 $f(x)$ 是连续函数，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时，$F(x)$ 必是偶函数.

(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时，$F(x)$ 必是奇函数.

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时，$F(x)$ 必是周期函数.

(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时，$F(x)$ 必是单调增函数.

解 令 $f(x)=\cos x+1$，$F(x)=\sin x+x+1$.

显然 $f(x)$ 是偶函数，周期函数，但 $F(x)$ 不是奇函数，也不是周期函数，则(B) (C) 均不正确 .

若令 $f(x)=x$，$F(x)=\frac{1}{2}x^2$，则 $f(x)$ 单调增，但 $F(x)$ 不单调增，因此，(D) 也不正确，故应选(A).

例 12 (96 年，数学四) 设 $f(x)$ 处处可导，则

(A) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

(B) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=+\infty$.

(C) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

(D) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ 时，必有 $\lim\limits_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty$.

解 令 $f(x)=x$，则 $f'(x)\equiv 1$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty, \text{但} \lim_{x\to+\infty} f'(x)=1\neq+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty, \text{但} \lim_{x\to-\infty} f'(x)=1\neq-\infty$$

则(B) 和(D) 均不正确

若令 $f(x)=x^2$，则 $f'(x)=2x$

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x)=-\infty, \text{但} \lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty\neq-\infty$$

所以(C) 也不正确，故应选(A).

例 13 (96 年，数学一，数学二) 设 $f(x)$ 有连续导数，$f(0)=0$，$f'(0)\neq 0$，$F(x)=\int_0^x (x^2-t^2)f(t)\mathrm{d}t$，且当 $x\to 0$ 时，$F'(x)$ 与 x^k 是同阶无穷小，则 k 等于

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

解 由 $f(0)=0$，$f'(0)\neq 0$. 取 $f(x)=x$

则
$$F(x)=\int_0^x (x^2-t^2)t\mathrm{d}t=\frac{x^4}{4}$$

$F'(x)=x^3$. 由 $x\to 0$ 时，$F'(x)$ 与 x^k 是同阶无穷小，知 $k=3$，从而，(A)(B)(D) 均不正确，故应选(C).

例 14 (87 年，数学二) 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导，则

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(a+x)-f(a-x)}{x}$ 等于

(A) $f'(a)$　　(B) $2f'(a)$

(C) 0　　(D) $f'(2a)$

解 令 $f(x)=x$，则
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(a+x)-f(a-x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{a+x-(a-x)}{x}=2$$
但 $f'(x)=1$，从而 $f'(a)=f'(2a)=1$，则(A)(C)(D) 均不正确，故应选(B).

例 15 (91 年，数学一，数学二) 若连续函数 $f(x)$ 满足关系式
$$f(x)=\int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t+\ln 2$$
则 $f(x)$ 等于

(A) $\mathrm{e}^x\ln 2$　　(B) $\mathrm{e}^{2x}\ln 2$

(C) $\mathrm{e}^x+\ln 2$　　(D) $\mathrm{e}^{2x}+\ln 2$

解 由 $f(x)=\int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right)\mathrm{d}t+\ln 2$ 知
$$f(0)=\ln 2 \tag{1}$$
$$f'(x)=2f(x) \tag{2}$$
显然(C)(D) 选项不符合(1) 式，(A) 选项不符合(2) 式，故应选(B).

例16 (95 年，数学二) 设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，$f(x)$ 为连续函数，且 $f(x)\neq 0$，$\varphi(x)$ 有间断点，则

(A) $\varphi[f(x)]$ 必有间断点.