

2004 版

1987 年~2003 年

历届数学考研试题研究 (数学一)

考点分析·应试技巧·解题训练

主编 武忠祥

编著 魏战线 吴云江

西安交通大学出版社
·西安·

目 录

2004 版前言

前言

第 1 章 客观题解题方法与技巧

1.1 填空题的求解方法与技巧 (1)

1 利用几何意义 (1)

2 利用物理意义(重心、形心)..... (2)

3 利用对称性和奇偶性 (3)

1.2 选择题的解题方法和技巧 (5)

1 直接法 (5)

2 排除法 (8)

第 2 章 高等数学

(1) 函数 极限 连续 (14)

(20) 1.1 历年试题分数统计..... (14)

(80) 1.2 历年试题..... (14)

(01) 1.3 试题解析..... (15)

(11) 1.4 考点分析..... (21)

(4) 1.5 自测练习题..... (22)

(11) 答案与提示..... (25)

2 一元函数微分学..... (26)

(14) 2.1 历年试题分析统计..... (26)

2.2	历年试题	(26)
2.3	试题解析	(31)
2.4	考点分析	(47)
2.5	自测练习题	(48)
	答案与提示	(52)
3	一元函数积分学	(54)
3.1	历年试题分数统计	(54)
3.2	历年试题	(54)
3.3	试题解析	(58)
3.4	考点分析	(78)
3.5	自测练习题	(79)
	答案与提示	(84)
4	向量代数与空间解析几何	(86)
4.1	历年试题分数统计	(86)
4.2	历年试题	(86)
4.3	试题解析	(87)
4.4	考点分析	(92)
4.5	自测练习题	(93)
	答案与提示	(94)
5	多元函数微分学	(95)
5.1	历年试题分数统计	(95)
5.2	历年试题	(95)
5.3	试题解析	(98)
5.4	考点分析	(110)
5.5	自测练习题	(111)
	答案与提示	(114)
6	多元函数积分学	(116)
6.1	历年试题分数统计	(116)
6.2	历年试题	(116)

6.3	试题解析	(121)
6.4	考点分析	(150)
6.5	自测练习题	(152)
	答案与提示	(157)
7	无穷级数	(158)
7.1	历年试题分数统计	(158)
7.2	历年试题	(158)
7.3	试题解析	(162)
7.4	考点分析	(179)
7.5	自测练习题	(181)
	答案与提示	(185)
8	常微分方程	(187)
8.1	历年试题分数统计	(187)
8.2	历年试题	(187)
8.3	试题解析	(190)
8.4	考点分析	(208)
8.5	自测练习题	(209)
	答案与提示	(212)
第3章 线性代数		
1	行列式	(215)
1.1	历年试题分数统计	(215)
1.2	历年试题	(215)
1.3	试题解析	(215)
1.4	考点分析	(216)
1.5	自测练习题	(216)
	答案与提示	(220)
2	矩阵	(222)
2.1	历年试题分数统计	(222)
2.2	历年试题	(222)

2.3	试题解析	(224)
2.4	考点分析	(236)
2.5	自测练习题	(238)
	答案与提示	(243)
3	向量	(246)
3.1	历年试题分数统计	(246)
3.2	历年试题	(246)
3.3	试题解析	(248)
3.4	考点分析	(258)
3.5	自测练习题	(260)
	答案与提示	(263)
4	线性方程组	(266)
4.1	历年试题分数统计	(266)
4.2	历年试题	(266)
4.3	试题解析	(269)
4.4	考点分析	(282)
4.5	自测练习题	(284)
	答案与提示	(289)
5	矩阵的特征值和特征向量	(294)
5.1	历年试题分数统计	(294)
5.2	历年试题	(294)
5.3	试题解析	(296)
5.4	考点分析	(309)
5.5	自测练习题	(311)
	答案与提示	(315)
6	二次型	(321)
6.1	历年试题分数统计	(321)
6.2	历年试题	(321)
6.3	试题解析	(322)

6.4	考点分析	(329)
6.5	自测练习题	(331)
	答案与提示	(333)

第4章 概率论与数理统计

1	随机事件和概率	(340)
1.1	历年试题分数统计	(340)
1.2	历年试题	(340)
1.3	试题解析	(342)
1.4	考点分析	(348)
1.5	自测练习题	(349)
	答案与提示	(350)
2	随机变量及其概率分布	(351)
2.1	历年试题分数统计	(351)
2.2	历年试题	(351)
2.3	试题解析	(353)
2.4	考点分析	(365)
2.5	自测练习题	(366)
	答案与提示	(369)
3	随机变量的数字特征	(372)
3.1	历年试题分数统计	(372)
3.2	历年试题	(372)
3.3	试题解析	(374)
3.4	考点分析	(384)
3.5	自测练习题	(385)
	答案与提示	(388)
4	大数定律和中心极限定理	(389)
4.1	历年试题分数统计	(389)
4.2	历年试题	(389)
4.3	试题解析	(389)

4.4	考点分析	(389)
4.5	自测练习题	(390)
	答案与提示	(390)
5	数理统计的基本概念	(391)
5.1	历年试题分数统计	(391)
5.2	历年试题	(391)
5.3	试题解析	(391)
5.4	考点分析	(395)
5.5	自测练习题	(395)
	答案与提示	(397)
6	参数估计	(398)
6.1	历年试题分数统计	(398)
6.2	历年试题	(398)
6.3	试题解析	(399)
6.4	考点分析	(404)
6.5	自测练习题	(404)
	答案与提示	(406)
7	假设检验	(407)
7.1	历年试题分数统计	(407)
7.2	历年试题	(407)
7.3	试题解析	(407)
7.4	考点分析	(408)
7.5	自测练习题	(408)
	答案与提示	(409)

附录

2002 年全国硕士研究生入学统一考试 数学(一)试题 ...	(410)
2003 年全国硕士研究生入学统一考试 数学(一)试题 ...	(414)
本书(2003 版)与 2003 年考研试题相似题目对照表	(418)

第1章 客观题解题方法与技巧

硕士研究生入学考试数学试题中的客观题有两种：一种是填空题，另一种是选择题。客观题在研究生入学考试中占30分，占总分近三分之一。从目前情况看，考生在客观题部分得分率很低，正是由于这部分得分率很低，所以总分就很难上去。分析其原因主要是两方面：一方面是考生做计算题的准确率较低，基本概念和基本理论没有吃透；另一方面是考生对求解客观题的解题方法和解题技巧掌握得不好。

填空题绝大部分是计算题，但填空题不像一般计算题，它只看结果，不看过程。所以，若做计算题的准确率不高，填空题很容易失分。选择题大部分主要考查基本概念和基本理论，如果基本概念和基本理论没有吃透，选择题部分也就很容易丢分。另一个方面，同一道题出成客观题后往往会有更巧妙更简单的方法。当然客观题用我们平时求解主观题的方法也能求解，但这种一般方法和简单方法从解题时间上看有时相差几倍，甚至十来倍。因此，要提高客观题部分的得分率，一方面要提高做计算题的准确率，吃透基本概念和基本理论；另外一个很重要的方面，就是要掌握一定的客观题的解题方法和技巧。本章主要是通过一些典型例题，归纳总结客观题解题方法和技巧，以提高考生求解客观题的能力。

1.1 填空题的求解方法与技巧

填空题绝大部分是计算题，常用的技巧有三种：一种是利用几何意义；另一种是利用物理意义（重心、形心）；第三种是利用对称性和奇偶性。

1. 利用几何意义

例1 (00年, 数学一) $\int_0^1 \sqrt{2x-x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 本题应填 $\frac{\pi}{4}$. 本题常规的求解方法是先把 $\sqrt{2x-x^2}$ 根号里面配方, 再用三角代换, 但计算量较大. 实际上, 本题根据定积分几何意义立刻知道应填 $\frac{\pi}{4}$. 事实上, 该积分在几何上表示单位圆 $(x-1)^2 + y^2 \leq 1$ 面积的 $\frac{1}{4}$, 如图 1.1.

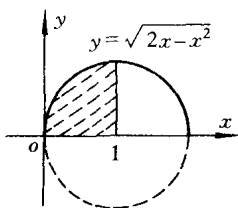
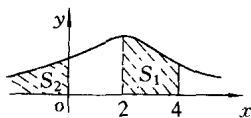


图 1.1

例 2 (91 年, 数学一) 若随机变量 X 服从均值为 2, 方差为 σ^2 的正态分布, 且 $P\{2 < X < 4\} = 0.3$, 则 $P\{X < 0\} =$ _____.

解 应填 0.2.

由于正态分布的密度函数是关于均值 $x = 2$ 对称. 由图 1.2 易知



$$\begin{aligned} P\{X < 0\} &= S_2 = 0.5 - S_1 \\ &= 0.5 - 0.3 = 0.2 \end{aligned}$$

图 1.2

例 3 $\iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy =$ _____.

解 应填 $\frac{2}{3}\pi a^3$.

事实上, 在几何上原题中积分应等于球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ 的体积的一半, 因此应为 $\frac{2}{3}\pi a^3$

2. 利用物理意义(重心, 形心)

例 4 (94 年, 数学三) 设 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq x + y + 1\}$, 则

$$\iint_D (x+y) dx dy = \text{_____}.$$

解 应填 $\frac{3}{2}\pi$.

积分域 D 实际上是圆域 $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{3}{2}$.

$$\text{由形心公式知: } \bar{x} = \frac{\iint_D x dx dy}{S_D}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_D y dx dy}{S_D}$$

其中 $\bar{x}$, $\bar{y}$ 分别表示区域 D 形心的 x 坐标和 y 坐标, S_D 表示区域 D 的面积.

本题中的圆域 $(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{3}{2}$ 形心显然是圆心 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, 则

$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{1}{2}, \text{ 而 } S_D = \pi \times \frac{3}{2} = \frac{3}{2}\pi$$

$$\text{则 } \iint_D x dx dy = S_D \cdot \bar{x} = \frac{3}{2}\pi \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4}\pi, \iint_D y dx dy = \frac{3}{4}\pi$$

$$\text{故 } \iint_D (x + y) dx dy = \frac{3}{2}\pi$$

注 本题原题是计算题.

例 5 (99 年, 数学三, 数学四) 设 D 是由直线 $x = -2, y = 0, y = 2$ 以及曲线 $x = -\sqrt{2y - y^2}$ 所围成的平面域, 则 $\iint_D y dx dy =$ _____.

解 应填 $4 - \frac{\pi}{2}$.

积分域 D 如图 1.3 所示, 由图 1.3 不难看出 $\bar{y} = 1$, 积分域 D 的面积 S_D 应为正方形面积减去半圆面积, 即

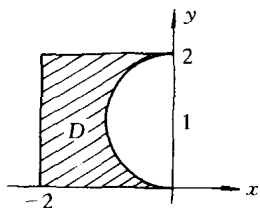


图 1.3

$$S_D = 4 - \frac{\pi}{2}$$

$$\text{因此, } \iint_D y dx dy = \bar{y} \cdot S_D = 4 - \frac{\pi}{2}.$$

注 本题原题是计算题, 事实上数学三和数学四中有 5 年的试题都可用此技巧求解.

3. 利用对称性和奇偶性

$$\text{例 6 (87 年, 数学三、数学四)} \int_{-\pi}^{\pi} x^4 \sin x dx = \text{_____}.$$

解 应填 0.

由于 $x^4 \sin x$ 为奇函数, 且积分区间 $[-\pi, \pi]$ 关于原点对称.

$$\text{例 7 (94 年, 数学三, 数学四)} \int_{-2}^2 \frac{x + |x|}{2 + x^2} dx \text{ _____}.$$

解 应填 $\ln 3$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_{-2}^2 \frac{x}{2 + x^2} dx + \int_{-2}^2 \frac{|x|}{2 + x^2} dx \\ &= 0 + 2 \int_0^2 \frac{x}{2 + x^2} dx \end{aligned}$$

$$= \ln(2+x^2) \Big|_0^2 = \ln 3$$

例8 (01年, 数学二) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3 + \sin^2 x) \cos^2 x dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 应填 $\frac{\pi}{8}.$

$$\begin{aligned} \text{原式} &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3 \cos^2 x dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x dx \\ &= 0 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^2 x dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x (1 - \sin^2 x) dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx \\ &= 2 \left[\frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} - \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \right] = \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

注 本题中用到基本公式 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2},$
(n 为偶数).

例9 (94年, 数学一, 数学二) 设区域 D 为 $x^2 + y^2 \leq R^2$, 则
 $\iint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy = \underline{\hspace{2cm}}.$

解 应填 $\frac{\pi}{4} R^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right).$

由于本题积分域为 $x^2 + y^2 \leq R^2$, 由 x 和 y 的对称性知

$$\iint_D x^2 dx dy = \iint_D y^2 dx dy$$

因此

$$\begin{aligned} \iint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy &= \iint_D \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} \right) dx dy \\ &= \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \iint_D x^2 dx dy \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \iint_D (x^2 + y^2) dx dy \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R r^3 dr = \frac{\pi}{4} R^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)$$

例 10 (98 年, 数学一) 设 l 为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 其周长记为 a , 则 $\oint_l (2xy + 3x^2 + 4y^2) ds = \underline{\hspace{2cm}}$.

解 应填 $12a$.

由于 l 关于 y 轴对称, 且 $2xy$ 是 x 的奇函数, 则 $\oint_l 2xy ds = 0$, 又因为 l 的方程可改写为 $3x^2 + 4y^2 = 12$

$$\text{则 原式} = \oint_l (3x^2 + 4y^2) ds = 12 \oint_l ds = 12a$$

1.2 选择题的解题方法和技巧

疑究生入学考试数学试卷中的选择题是单项选择题. 所谓单项选择题也就是四个选项中有且仅有一个选项是正确的. 因此, 常用的解题方法是两大类: 一种是直接验证某个选项正确, 则其余选项必定不正确 (不必验证). 这种方法通常称为直接法; 另一种方法是验证其中三个选项不正确, 则剩下的一个选项必定正确 (也不必验证), 这种方法通常称作排除法.

1. 直接法

直接法就是直接验证某个选项正确, 通常有两种途径, 一种是通过直接计算或推演得出某个选项正确, 这种方法通常称为推演法; 另一种方法是借助几何分析得出正确选项, 这种方法叫几何法. 下面举例说明推演法和几何法的应用.

1) 推演法

例 1 (91 年, 数学一, 数学二) 曲线 $y = \frac{1 + e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}}$

- (A) 没有渐近线. (B) 仅有水平渐近线.
(C) 仅有铅直渐近线. (D) 既有水平渐近线也有铅直渐近线.

解 因为 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}} = 1$, 则原曲线有水平渐近线 $y = 1$, 又

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + e^{-x^2}}{1 - e^{-x^2}} = \infty$, 则原曲线有铅直渐近线 $x = 0$, 所以应选 (D).

例2 (93年, 数学一, 数学二) 设 $f(x) = \int_0^{\sin x} \sin(t^2) dt$, $g(x) = x^3 + x^4$, 则当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x)$ 是 $g(x)$ 的

- (A) 等价无穷小. (B) 同阶但非等价无穷小.
(C) 高阶无穷小. (D) 低阶无穷小.

$$\begin{aligned} \text{解} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{\sin x} \sin(t^2) dt}{x^3 + x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sin^2 x) \cos x}{3x^2 + 4x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x^2 + 4x^3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

则应选(B).

例3 (98年, 数学三, 数学四) 设周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内可导, 周期为 4, 又 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-x)}{2x} = -1$, 则曲线 $y = f(x)$ 在点 $(5, f(5))$ 处的切线斜率为

- (A) $\frac{1}{2}$ (B) 0 (C) -1 (D) -2

解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1) - f(1-x)}{2x} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1-x) - f(1)}{-x} = \frac{1}{2} f'(1) = -1$
则 $f'(1) = -2$, 由 $f'(x)$ 周期性知, $f'(5) = f'(1) = -2$
故应选(D).

2) 几何法

例4 (97年, 数学一, 数学二) 设在区间 $[a, b]$ 上 $f(x) > 0$, $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$, 令 $S_1 = \int_a^b f(x) dx$, $S_2 = f(b)(b-a)$, $S_3 = \frac{1}{2}[f(a) + f(b)](b-a)$ 则

- (A) $S_1 < S_2 < S_3$ (B) $S_2 < S_1 < S_3$
(C) $S_3 < S_1 < S_2$ (D) $S_2 < S_3 < S_1$

解 由题设可知, 在 $[a, b]$ 上, $f(x) > 0$ 单调减, 曲线 $y = f(x)$ 上凹, 如图 1.4. S_1 表示 $y = f(x)$ 和 $x = a$, $x = b$ 及 x 轴围成曲边梯形面积, S_2 表示矩形 $abCB$ 的面积, S_3 表示梯形 $AabbB$ 的面积. 由图 1.4 可知, $S_2 < S_1 < S_3$. 故应选(B).

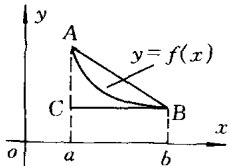


图 1.4

例5 (97年, 数学三, 数学四) 若 $f(-x) = f(x)$, $(-\infty < x < +\infty)$, 在 $(-\infty, 0)$ 内 $f'(x)$

> 0 , 且 $f''(x) < 0$, 则在 $(0, +\infty)$ 内

(A) $f'(x) > 0, f''(x) < 0$

(B) $f'(x) > 0, f''(x) > 0$

(C) $f'(x) < 0, f''(x) < 0$

(D) $f'(x) < 0, f''(x) > 0$

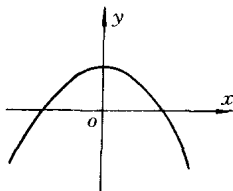


图 1.5

解 由 $f(-x) = f(x)$ 知, $f(x)$ 为偶函数, 而由在 $(-\infty, 0)$ 内 $f'(x) > 0$, 且 $f''(x) < 0$ 知在 $(-\infty, 0)$ 内, $y = f(x)$ 的图形下凹单调增, 则如

图 1.5 可知, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 内, $f'(x) < 0, f''(x) < 0$, 则应选(C).

例 6 (93 年, 数学三) 设随机变量 X 的密度函数是 $\varphi(x)$, 且 $\varphi(-x) = \varphi(x)$, $F(x)$ 是 X 的分布函数, 则对任意实数 a , 有

(A) $F(-a) = 1 - \int_0^a \varphi(x) dx$

(B) $F(-a) = \frac{1}{2} - \int_0^a \varphi(x) dx$

(C) $F(-a) = F(a)$

(D) $F(-a) = 2F(a) - 1$

解 由 $\varphi(-x) = \varphi(x)$ 知, $\varphi(x)$ 为偶函数, 其图形关于 y 轴对称, 如图 1.6 由几何意义可知, $F(-a) = S_1$

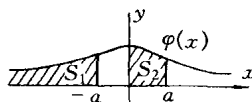


图 1.6

$$\int_0^a \varphi(x) dx = S_2$$

则 $S_1 = \frac{1}{2} - S_2$, 即 $F(-a) = \frac{1}{2} - \int_0^a \varphi(x) dx$

故应选(B).

例 7 (99 年, 数学一) 设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 $N(0,1)$ 和 $N(1,1)$, 则

(A) $P\{X + Y \leq 0\} = \frac{1}{2}$

(B) $P\{X + Y \leq 1\} = \frac{1}{2}$

(C) $P\{X - Y \leq 0\} = \frac{1}{2}$

(D) $P\{X - Y \leq 1\} = \frac{1}{2}$

解 由于独立正态分布的随机变量的线性组合仍服从正态,则

$$X + Y \sim N(1, \sqrt{2}^2), X - Y \sim N(-1, \sqrt{2}^2)$$

由正态分布的几何意义知,正态分布的密度函数关于均值左右对称,则其小于均值的概率为 $\frac{1}{2}$, 则

$$P\{X + Y < 1\} = \frac{1}{2}$$

故应选(B).

2. 排除法

所谓排除法就是说明原题四个选项中某三个均不正确,则剩余一个选项必然正确;这种方法在使用时通常是举反例.

例8 (96年,数学二) 设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\delta, \delta)$ 内有定义,若当 $x \in (-\delta, \delta)$ 时,恒有 $|f(x)| \leq x^2$, 则 $x = 0$ 必是 $f(x)$

- (A) 间断点.
- (B) 连续而不可导的点.
- (C) 可导的点,且 $f'(0) = 0$.
- (D) 可导的点,且 $f'(0) \neq 0$.

解 令 $f(x) = x^3$, 显然 $x \in (-\delta, \delta)$ 时, $|f(x)| = |x^3| \leq x^2$. 且 $f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$, 则(A) (B) (D) 均不正确,故应选(C).

例9 (90年,数学一,数学二) 已知 $f(x)$ 在 $x = 0$ 某邻域内连续,且 $f(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - \cos x} = 2$, 则在点 $x = 0$ 处 $f(x)$

- (A) 不可导.
- (B) 可导且 $f'(x) \neq 0$.
- (C) 取得极大值.
- (D) 取得极小值.

解 由于当 $x \rightarrow 0$ 时, $1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2$, 所以令 $f(x) = x^2$, 则 $f(x)$ 符合原题设条件. 而 $f(x) = x^2$ 在 $x = 0$ 处可导, $f'(0) = 0$, 取极小值, 则(A) (B) (C) 均不正确,故应选(D).

例10 (01年,数学三,数学四) 设 $f(x)$ 的导数在 $x = a$ 处连续,又 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{x - a} = -1$, 则

- (A) $x = a$ 是 $f(x)$ 的极小值点.
- (B) $x = a$ 是 $f(x)$ 的极大值点.
- (C) $(a, f(a))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

(D) $x = a$ 不是 $f(x)$ 的极值点, $(a, f(a))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

解 若取 $f'(x) = -(x - a)$, 即令 $f(x) = -\frac{1}{2}(x - a)^2$, 则显然 $f(x)$ 符合原题条件, $f(x) = -\frac{1}{2}(x - a)^2$ 在 $x = 0$ 取极大值, 且 $(a, f(a))$ 也不是 $y = -\frac{1}{2}(x - a)^2$ 的拐点, 则(A)(C)(D) 均不正确, 故应选(B).

例 11 (99 年, 数学一, 数学二, 数学三, 数学四) 设 $f(x)$ 是连续函数, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数, 则

- (A) 当 $f(x)$ 是奇函数时, $F(x)$ 必是偶函数.
- (B) 当 $f(x)$ 是偶函数时, $F(x)$ 必是奇函数.
- (C) 当 $f(x)$ 是周期函数时, $F(x)$ 必是周期函数.
- (D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时, $F(x)$ 必是单调增函数.

解 令 $f(x) = \cos x + 1$, $F(x) = \sin x + x + 1$.

显然 $f(x)$ 是偶函数, 周期函数, 但 $F(x)$ 不是奇函数, 也不是周期函数, 则(B)(C) 均不正确.

若令 $f(x) = x$, $F(x) = \frac{1}{2}x^2$, 则 $f(x)$ 单调增, 但 $F(x)$ 不单调增, 因此, (D) 也不正确, 故应选(A).

例 12 (96 年, 数学四) 设 $f(x)$ 处处可导, 则

- (A) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$ 时, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- (B) 当 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ 时, 必有 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty$.
- (C) 当 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$ 时, 必有 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.
- (D) 当 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ 时, 必有 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty$.

解 令 $f(x) = x$, 则 $f'(x) \equiv 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \text{ 但 } \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 1 \neq +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \text{ 但 } \lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = 1 \neq -\infty$$

则(B) 和(D) 均不正确

若令 $f(x) = x^2$, 则 $f'(x) = 2x$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -\infty, \text{ 但 } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \neq -\infty$$

所以(C) 也不正确, 故应选(A).

例13 (96年, 数学一, 数学二) 设 $f(x)$ 有连续导数, $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$, $F(x) = \int_0^x (x^2 - t^2)f(t)dt$, 且当 $x \rightarrow 0$ 时, $F'(x)$ 与 x^k 是同阶无穷小, 则 k 等于

- (A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

解 由 $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$. 取 $f(x) = x$

则
$$F(x) = \int_0^x (x^2 - t^2)t dt = \frac{x^4}{4}$$

$F'(x) = x^3$. 由 $x \rightarrow 0$ 时, $F'(x)$ 与 x^k 是同阶无穷小, 知 $k = 3$, 从而, (A)(B)(D) 均不正确, 故应选(C).

例14 (87年, 数学二) 设 $f(x)$ 在 $x = a$ 处可导, 则

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+x) - f(a-x)}{x}$ 等于

- (A) $f'(a)$ (B) $2f'(a)$
(C) 0 (D) $f'(2a)$

解 令 $f(x) = x$, 则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(a+x) - f(a-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a+x - (a-x)}{x} = 2$$

但 $f'(x) = 1$, 从而 $f'(a) = f'(2a) = 1$, 则(A)(C)(D) 均不正确, 故应选(B).

例15 (91年, 数学一, 数学二) 若连续函数 $f(x)$ 满足关系式

$$f(x) = \int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right)dt + \ln 2$$

则 $f(x)$ 等于

- (A) $e^x \ln 2$ (B) $e^{2x} \ln 2$
(C) $e^x + \ln 2$ (D) $e^{2x} + \ln 2$

解 由 $f(x) = \int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right)dt + \ln 2$ 知

$$f(0) = \ln 2 \quad (1)$$

$$f'(x) = 2f(x) \quad (2)$$

显然(C)(D) 选项不符合(1)式, (A) 选项不符合(2)式, 故应选(B).

例16 (95年, 数学二) 设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义, $f(x)$ 为连续函数, 且 $f(x) \neq 0$, $\varphi(x)$ 有间断点, 则

- (A) $\varphi[f(x)]$ 必有间断点.