

高等几何 学习指导与习题选解

梅向明 刘增贤 编



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等几何学习指导与习题选解/梅向明,刘增贤编.
北京:高等教育出版社,2003.12
ISBN 7-04-012947-7

I. 高... II. ①梅...②刘... III. 高等几何 -
师范大学 - 教学参考资料 IV. O18

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 095409 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-82028899		http://www.hep.com.cn

经 销 新华书店北京发行所
排 版 高等教育出版社照排中心
印 刷 高等教育出版社印刷厂

开 本	850 × 1168 1/32	版 次	2003 年 12 月第 1 版
印 张	10.5	印 次	2003 年 12 月第 1 次印刷
字 数	260 000	定 价	13.40 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换.

版权所有 侵权必究

前 言

我们编写的教材《高等几何》，从1983年出版至今已有20年了。2000年出了第二版。20年来不少高等师范院校的数学专业一直在采用这本书作为教材，我们深表感谢。此外，根据1991年底在天津召开的国家教委高等学校理科数学与力学教学指导委员会几何与拓扑教材建设组会议的决定，1994年出版了《高等几何》的教学参考书——《高等几何习题集》。

由于《高等几何》在2000年出了第二版，因此配套的教学参考书：《高等几何习题集》也需要作相应的改编，这就是为什么要出版这本《高等几何学习指导与习题选解》的原因。

为什么把书的题目改了呢？顾名思义，这本书的主题思想是两个：“学习指导”和“习题选解”，而不像前一本书，主题就是一个：“习题集”。

在“学习指导”部分中，我们突出了《高等几何》教材中的重点和难点以及解题所需要的基本概念和基本公式，由于目前高等师范院校的数学专业的教师质量和学生水平很不平衡，我想“学习指导”这部分内容对于一部分教师和学生来说将是很必要的，不过为了尽量避免和第二版教材重复，仅给出内容提要，对于基本概念，我们只写出名词，具体内容读者可以查阅第二版教材。

“习题选解”部分又分成两方面，其一与“学习指导”结合的习题，除了第二版教材中的习题以外，我们还适当地选了一些其他《高等几何》教材中的习题；其二是本书的最后：解题指导与答案。

这本书是由我和首都师范大学数学系的刘增贤教授共同编写的、她负责前六章，我负责后三章与附录。我们希望使用这本书的

高等师范院校数学专业的同志对本书中的错误和不足之处给予批评指正。

梅向明

2003 年 5 月于首都师范大学

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010) 58581897/58581698/58581879/
58581877

传 真：(010) 82086060

E - mail: dd@hep.com.cn 或 chenrong@hep.com.cn

通信地址：北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社法律事务部

邮 编：100011

购书请拨打电话：(010)64014089 64054601 64054588

策划编辑	李 蕊
责任编辑	李 陶
封面设计	王凌波
责任绘图	吴文信
版式设计	马静如
责任校对	王效珍
责任印制	韩 刚

目 录

第一部分 学习指导及习题

第一章 仿射坐标与仿射变换	3
§ 1 透视仿射对应	3
§ 2 仿射对应与仿射变换	4
§ 3 仿射坐标	5
§ 4 仿射性质	8
习 题	11
§ 5 本章小结	12
综合练习题	12
第二章 射影平面	16
§ 1 射影直线和射影平面	16
习 题	21
§ 2 齐次坐标	23
习 题	26
§ 3 对偶原理	28
习 题	36
§ 4 复元素	39
习 题	41
§ 5 本章小结	42
综合练习题	42
第三章 射影变换与射影坐标	46
§ 1 交比与调和比	46
习 题	56
§ 2 一维射影变换	61

习 题	66
§ 3 一维射影坐标	70
习 题	76
§ 4 二维射影变换与二维射影坐标	79
习 题	87
§ 5 本章小结	90
综合练习题	90
第四章 变换群与几何学	95
§ 1 变换群	95
习 题	98
§ 2 变换群与几何学	100
习 题	102
§ 3 本章小结	104
综合练习题	104
第五章 二次曲线的射影理论	106
§ 1 二次曲线的射影定义	106
习 题	113
§ 2 Pascal 和 Brianchon 定理	115
习 题	122
§ 3 极点与极线, 配极原则	124
习 题	129
§ 4 二阶曲线的射影分类	133
习 题	136
§ 5 本章小结	137
综合练习题	137
第六章 二次曲线的仿射性质和度量性质	140
§ 1 二次曲线与无穷远直线的相关位置	140
§ 2 二次曲线的仿射性质	141
习 题	146
§ 3 二次曲线的仿射分类	148
习 题	150

§ 4 二次曲线的度量性质	151
习 题	156
§ 5 二次曲线的度量分类	159
§ 6 本章小结	159
综合练习题	160
第七章 一般体和域上的射影几何	162
§ 1 群、体(域)和向量空间	162
1.1 群	162
1.2 体和域	162
1.3 向量空间	163
§ 2 射影空间和射影几何	163
2.1 射影几何的定义	163
2.2 射影几何中的结合关系	165
习 题	165
2.3 齐次向量	165
2.4 交比和调和点列	166
§ 3 射影变换和射影坐标	167
3.1 射影变换	167
3.2 直射变换	167
3.3 射影坐标	168
习 题	169
§ 4 对偶原理	171
4.1 对偶空间	171
4.2 对偶原理	171
习 题	173
4.3 对射变换	173
习 题	175
§ 5 二次超曲面的射影理论	175
5.1 双线性形式	175
5.2 对称双线性形式和内积空间	177
习 题	179
5.3 对称双线性形式的标准型	179

5.4 二阶超曲面及其射影分类	180
习 题	181
5.5 配极变换	182
习 题	183
第八章 一般体(域)上的仿射几何	185
§ 1 仿射空间和仿射几何	185
习 题	185
§ 2 仿射坐标和仿射变换	186
2.1 共线三点的单比	186
习 题	186
2.2 仿射坐标	186
习 题	187
2.3 仿射变换	187
习 题	188
§ 3 二阶超曲面的仿射理论	188
习 题	191
第九章 射影几何与仿射几何的公理体系	193
§ 1 公理法简介	193
1.1 欧几里得的几何原本(略)	193
1.2 公理法思想	193
§ 2 射影几何的公理体系	194
2.1 基本概念	194
2.2 射影结合公理	194
习 题	195
2.3 射影顺序公理	195
§ 3 仿射几何的公理体系	196
3.1 基本概念	196
3.2 仿射结合公理和平行公理	196
3.3 仿射顺序公理	197
习 题	198
3.4 连续公理	199
附录 实数域上的欧氏几何	201

1. 欧氏空间和欧氏几何	201
2. Descartes 坐标系和正交变换	202
3. 有向距离和单比	205
4. 有心二次曲面的主轴和标准型	209
5. 三维欧氏几何的公理体系——Hilbert 公理体系	211

第二部分 解题指导与答案

第一章 射影坐标与仿射变换	215
§ 1 透视仿射对应	215
§ 2 仿射对应与仿射变换	215
§ 3 仿射坐标	215
§ 4 仿射性质	215
习 题	215
综合练习题	217
第二章 射影平面	219
§ 1 射影直线和射影平面	219
习 题	219
§ 2 齐次坐标	225
习 题	225
§ 3 对偶原理	227
习 题	227
§ 4 复元素	230
习 题	230
§ 5 本章小结	232
综合练习题	232
第三章 射影变换与射影坐标	239
§ 1 交比与调和比	239
习 题	239
§ 2 一维射影变换	243
习 题	243
§ 3 一维射影坐标	251

习 题	251
§ 4 二维射影变换与二维射影坐标	256
习 题	256
§ 5 本章小结	259
综合练习题	259
第四章 变换群与几何学	267
§ 1 变换群	267
习 题	267
§ 2 变换群与几何学	269
习 题	269
§ 3 本章小结	270
综合练习题	270
第五章 二次曲线的射影理论	273
§ 1 二次曲线的射影定义	273
习 题	273
§ 2 Pascal 和 Brianchon 定理	276
习 题	276
§ 3 极点与极线, 配极原则	279
习 题	279
§ 4 二阶曲线的射影分类	282
习 题	282
§ 5 本章小结	283
综合练习题	283
第六章 二次曲线的仿射性质和度量性质	290
§ 1 二次曲线与无穷远直线的相关位置	290
§ 2 二次曲线的仿射性质	290
习 题	290
§ 3 二次曲线的仿射分类	296
习 题	296
§ 4 二次曲线的度量性质	298
习 题	298

§ 5 二次曲线的度量分类	305
§ 6 本章小结	305
综合练习题	305
第七章 一般体和域上的射影几何	309
§ 2.2 射影几何中的结合关系	309
习 题	309
§ 3.3 射影坐标	309
习 题	309
§ 4.2 对偶原理	311
习 题	311
§ 4.3 对射变换	311
习 题	311
§ 5.2 对称双线性形式和内积空间	313
习 题	313
§ 5.4 二阶超曲面及其射影分类	313
习 题	313
§ 5.5 配极变换	315
习 题	315
第八章 一般体(域)上的仿射几何	318
§ 1 仿射空间和仿射几何	318
习 题	318
§ 2.1 共线三点的单比	318
习 题	318
§ 2.2 仿射坐标	319
习 题	319
§ 2.3 仿射变换	320
习 题	320
§ 3 二阶超曲面的仿射理论	320
习 题	320
第九章 射影几何与仿射几何的公理体系	322
§ 2.2 射影结合公理	322

习 题	322
§ 3.3 仿射顺序公理	322
习 题	322

第一部分 学习指导及习题

第一章 仿射坐标与仿射变换

§ 1 透视仿射对应

1. 主要概念

定义 1.1 共线三点 P_1, P_2, P 的单比, 表示为 $(P_1 P_2 P)$,

$$(P_1 P_2 P) = \frac{P_1 P}{P_2 P},$$

其中 $P_1 P, P_2 P$ 是有向线段的数量, P_1, P_2 称为基点, P 为分点.

当 P 为线段 $P_1 P_2$ 之中点时 $(P_1 P_2 P) = -1$.

定义 1.2 二直线间的透视仿射对应, 如图 1-1-1; 二平面间的透视仿射对应, 如图 1-1-2.

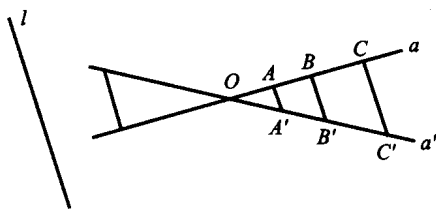


图 1-1-1

图 1-1-1 中, O 为自对应点(二重点), 图 1-1-2 中, m 是自对应直线(二重直线).

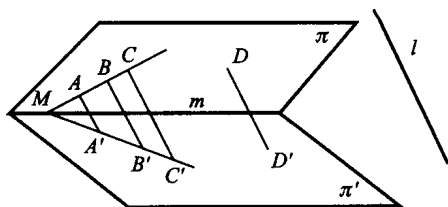


图 1-1-2

2. 主要性质

透视仿射对应的性质：

- (1) 保持同素性；
- (2) 保持点和直线间的结合性；
- (3) 保持共线三点的单比不变；
- (4) 保持平行性。

§ 2 仿射对应与仿射变换

1. 主要概念

定义 2.1 直线 a_1 到 a_n 的仿射对应用 φ 表示, 如图 1-1-3, 如果 a_1 和 a_n 重合, 则 φ 称为 a_1 到自身的仿射变换。

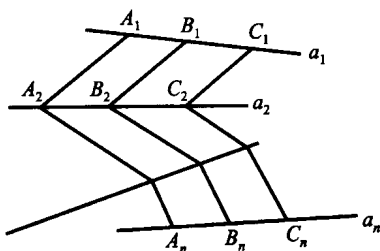


图 1-1-3