流体力学の進歩 乱 流

谷 一郎 編

流体力学の進歩 乱流

谷　一　郎　編

序　　言

流体力学は古典物理学の一部門に数えられる．それは空気や水などの流体を連続体と見なし，ニュートン力学の法則を適用することによって，流体の運動が記述されるからである．確かにこの意味では古典的な学問であるけれども，その発達がすでに終了したわけではない．質点の力学や剛体の力学には，研究すべき問題がほとんど残されていないが，流体力学はそうではなくて，現在もなお発達の途上にあるように思われる．われわれは空気や水とともに生活するので，それらの運動といつも密接に関係している．空気中を飛ぶ飛行機の誕生はこの世紀の始めであるが，その実現に先立って解決されなければならない問題の一つは，空気中を固定の翼面が一定の速度で運動するとき，どれだけの抵抗が働き，どれだけの揚力が働くかを予測することであった．しかしそのような予測は，当時の流体力学の知識だけでは困難であった．それ以来飛行機の進歩とともに，流体力学も著しい発達を遂げたが，それにしても例えば都会の真中に高い建物を作るとして，そのために路上の歩行者がどれだけの突風に晒されるかというような問題に直面すると，まだ計算だけでは満足に答えられず，縮尺模型を作って実験をする以外に方法がない．しかも充分に正しい推定をするのに，模型実験の結果にどのような修正を施せばよいかということも明らかでない．このように流体運動の実際面では，まだ判らない問題がたくさんあり，それは結局は基礎となる流体力学の知識に，さらに研究を続けなければならない部分が残されているのを示すことに他ならない．

質点の力学や剛体の力学の教科書は，表現の形式を除いて，もはや内容がほとんど変わらないであろうが，これに比べて流体力学の教科書は，少なくとも局所的に，かなり短い期間に時代遅れになる可能性を包蔵している．このことは内容が専門的になるほど著しいが，たとえ入門的な教科書であっても免れないように思われる．編者はこれを補う意味から，流体力学の新しい進歩をモノグラフの形で編むことが望ましいと考えていたが，怠惰のために率先して実行することがなかった．このたび本書が刊行される運びになったのは，編者の年来の念願の線に沿うものである．

本書は流体力学の中から，乱流に関する5個の項目を選び，それぞれの項目について造詣の深い執筆者による新しい進歩の解説を集成したものである．すなわち層流から乱流への遷移現象の中で，特に固体境界のない自由剪断流における乱流の発生について佐藤　浩（東京大学宇宙航空研究所，教授），充分に発達した乱流の構造，特に剪断乱流に潜在する組織的な構造について小橋安次郎（北海道大学工学部機械工学教室，教授），乱流の計算，特に平均操作を施した方程式から乱流の特性を数値的に計算する方法について大路通雄（電気通信大学流体工学講座，教授），密度成層流，すなわち流体の密度が流れに直角の方向に変化する場合の乱流について日野幹雄（東京工業大学土木工学教室，教授），音の発生機構の中で特に乱流に関係するものについて坂尾富士彦（広島大学工学部精密工学教室，助教授）の諸論を煩わすとともに，これらの項目の研究が歴史的発達の中で占める位置を示す意味で，編者による乱流研究の発達の歴史的概説を添えたものである．5個の項目は最近に著しい進歩が見られたり，執筆に適任者の得られるなどの理由から選ばれたものであるが，これだけで乱流の重要な問題が尽くされるわけではない．さらに言えば，乱流の問題だけが流体力学の最近の進歩を代表するわけではない．何も彼も網羅して事典的なものを計画するよりも，まず手近の着手し易いところから始めよう，そしてそれには，最近に関心の集まっている乱流の問題を採りあげて見ようという試みが具体化し，その結果が本書になったというのが実際の経過なのである．

編者はよいモノグラフ，つまり良質の総合的な評論の価値を高く認めるものであるが，ただそれを作り出す立場から見ると，費やす労力の割に報いられることの薄く，しかも原著論文に比べて不当に低く評価される恐れのあることを否定できない．しかし学問の発達のために，よいモノグラフやよい教科書の果たす役割の大きいことも，おそらく異論のないところであろう．モノグラフの刊行を続けるには，少なからぬ困難が予想されるので，まず手近のところで一つの試行をすることにしたわけである．丸善株式会社と編者の間でも，このようなモノグラフを継続刊行するかどうかは定まっていない．それは本書の迎える反響をもとに，考慮すべきことであろうと思われる．

1979年4月

谷　一　郎

目　　次

第1章　乱流研究の発達

1.1　序論：初期の研究

流体の運動の状態に層流と乱流の区別のあることは，かなり古くから知られていたようである．しかしこれを円形断面の管を通る水の流れについて，はじめて系統的に調べたのは Hagen (1855) であった．Hagen は流れの速度，管の半径または水の温度のいずれかがある値を越えると，流れの状態が層流から乱流に遷移すること，また細かい木屑を混ぜて観察すると，層流では管の軸に平行に秩序正しく流れるのが，乱流になると軸に直角の方向の運動も加わり，あたかも秩序が乱れたかのように流れることを見出した．そして遷移の原因は管の内壁の微細な粗さか，さもなければ，管の入口で生ずる流れの攪乱によるのであろうと想像している．

粘性を考慮に入れた流体運動の方程式は，Navier (1823)，Poisson (1831)，Saint-Venant (1843) および Stokes (1845) の研究を経て完成され，Hagen の時代にすでに，今日ナビエ・ストークス方程式と呼ばれる形で知られていた．直角座標 x_α ($\alpha=1, 2, 3$) の方向の流れの速度成分を u_α，圧力を p，時間を t，流体の密度を ρ，粘性係数を μ，動粘性係数を $\nu(=\mu/\rho)$ とするとき，重力などの外力の影響がなく，流体の圧縮性の影響も無視できる場合の質量保存の方程式（連続の方程式）は

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}=0 \tag{1.1}$$

で表わされ，運動量保存の方程式（ナビエ・ストークスの方程式）は

$$\rho\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial t}+u_\beta\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\beta}\right)=\frac{\partial}{\partial x_\beta}(-p\delta_{\alpha\beta}+\rho\nu e_{\alpha\beta}) \qquad (\alpha=1, 2, 3) \tag{1.2}$$

で表わされる[1]．ただし $e_{\alpha\beta}=\partial u_\alpha/\partial x_\beta+\partial u_\beta/\partial x_\alpha$ は変形速度，$\delta_{\alpha\beta}$ は $\alpha=\beta$ ならば 1，$\alpha\neq\beta$ ならば 0 を表わし，なお α または β の繰り返される項では，その 1 から 3 までの値

---

1)　なお応力と変形速度の関係が線形であるというニュートン粘性の仮定がなされている．この関係の成り立たない非ニュートン流体に対しては，式 (1.2) は成り立たない．

について和を採るものとする．固体壁面での境界条件は，壁面に相対的な運動のないこと，つまり静止壁面では $u_\alpha=0$ $(\alpha=1,2,3)$ とならねばならぬことが，Stokes (1851) の研究によって明らかにされていた．しかしナビエ・ストークス方程式は非線形であって，これを一般に解析的に解くことは不可能である．解析的に解くことのできるのは特に単純な流れ，たとえば流れの方向がすべて x_1 軸に平行で，速度の大きさが x_1 軸からの距離だけの関数になるような単純な場合に限られる．このようないわゆる平行剪断流は，十分に長い円形断面の管の中の流れ，または十分に大きい二つの平行な平面壁の間の流れなどによって近似的に実現される．前者は今日では軸対称ポアズイユ流れと呼ばれ，管の軸から r の距離の速度は $u_1=V(1-r^2/L^2)$ で与えられる．L は管の半径，V は軸上の最大速度である．後者は $x_2=\pm L$ にある平面壁が静止する場合は二次元ポアズイユ流れ，それぞれ速さ V で逆の方向に動く場合は二次元クエット流れと呼ばれ，速度の分布は $u_1=V(1-x_2^2/L^2)$ および $u_1=Vx_2/L$ で与えられる[1]．Hagen の実験は軸対称ポアズイユ流れに対するもので，この場合には速度が半径方向に放物的に変わり，圧力勾配が流量に比例するような定常解が与えられる．これは層流の場合に，実験的に観察されるものとよく一致する．しかし乱流の場合の実験の結果とは一致しない．

いま代表的な長さを L，代表的な速度を V として，無次元量 $x_\alpha{}^*=x_\alpha/L$，$u_\alpha{}^*=u_\alpha/V$，$t^*=tV/L$，$p^*=p/\rho V^2$ および $e_{\alpha\beta}{}^*=e_{\alpha\beta}L/V$ を導くときは，方程式 (1.1) および (1.2) はそれぞれ

$$\frac{\partial u_\alpha{}^*}{\partial x_\alpha{}^*}=0$$

および

$$\frac{\partial u_\alpha{}^*}{\partial t^*}+u_\beta{}^*\frac{\partial u_\alpha{}^*}{\partial x_\beta{}^*}=\frac{\partial}{\partial x_\beta{}^*}\left(-p^*\delta_{\alpha\beta}+\frac{1}{R}e_{\alpha\beta}{}^*\right)\qquad(\alpha=1,2,3)$$

となる．星印をつけた無次元量に関するこれらの方程式は，その中に一つの無次元数 $R=LV/\nu$ を含み，R が方程式のパラメターであることを明示している[2]．物理的には R は，ナビエ・ストークス方程式 (1.2) の左辺 $\rho(\partial u_\alpha/\partial t+u_\beta\partial u_\alpha/\partial x_\beta)$ で表わされる慣性の作用と，右辺の $\rho\nu\partial e_{\alpha\beta}/\partial x_\beta$ で表わされる粘性の作用の相対的な割合を与える無次元数である．もし幾何学的に相似の二つの流れがあって，境界条件もまた相似であるものとすれば，二つの流れが力学的にも相似になるためには，それぞれの流れのパラメターである R

1) 円形断面の管の中の層流の流れは Hagen (1839) と Poiseuille (1840) により，また半径差の小さく相対的に回転する同軸円筒の間の流れは Couette (1890) により，はじめて実験的に観察されたことがこれらの呼称の由来である．ただ Hagen の名だけが不当に省かれている．

2) パラメターがただ一つであるのは外力の影響がなく，圧縮性の影響も無視できると仮定したためである．そうでない場合には，方程式の中に R 以外のパラメターも含まれる．

の値が等しくなければならない．このような相似の考察を，初めてナビエ・ストークス方程式について試みたのは Helmholtz (1873) であるけれども，それをさらに深めて，管の流れの問題に適用したのは Reynolds (1883) であった．

Reynolds はガラスの管に水を流し，入口の近くで色素を注入して，速度（流量）を増すときの流れの状態の変化を観察した．速度の小さい層流の状態では，色素の線条は管の軸に平行に長く伸びるが，速度を増して乱流が発生すると，線条が乱れ始め，さらに速度を増すと，色素が管の断面全体に拡散される．また圧力勾配と流量を測り，その間の関係が線形から外れるときに，ちょうど乱流の発生することを見出した．Reynolds は一方で相似の考察から，無次元数 R がある臨界値を越えるとき，層流から乱流への遷移が起こるのではないかと想像していたが，実験の結果は予想の正しいことを確かめるとともに，そのような R の臨界値が，管の入口に生ずる攪乱の大きさに依存することを明らかにした．代表的な長さ L に管の半径，代表的な速度 V に管軸上の速度（最大速度）を採ると，R の臨界値の下限はおよそ 2×10^3 で与えられるが，これは R が 2×10^3 以下であれば，管の入口にかなり大きい攪乱が存在しても，下流に行くに従って減衰し，乱流にならないことを意味している．管の入口での攪乱が小さいように注意した場合には，R の臨界値は 10^4 を越えるので，もしさらに攪乱を小さくすることができれば，臨界値はなお増加することになるであろう．実際に Ekman (1911) は Reynolds と同じ装置を用いて，$R=5\times10^4$ まで層流を保つことに成功している．これらの結論は，乱流発生の条件を R の臨界値に集約するばかりでなく，さらに進んで乱流の発生を，小さい攪乱に対する層流の不安定として把握する理解にまで導くものであった．Reynolds のこのような画期的な研究を記念して，無次元数 R はやがてレイノルズ数と呼ばれるようになるのである．

これよりわずか前に，Rayleigh (1880) は層流の不安定を理論的に考察している．問題とする層流に微小な攪乱を重ね合わせ，運動の方程式に代入し，攪乱の2乗以上の項を省略して得られる方程式を解いて，攪乱が時間的にどのように変化するかを検討する．もし攪乱が時間とともに減衰すれば層流は安定，増幅すれば不安定と考える．この場合の運動方程式としては，当然ナビエ・ストークス方程式を用いるべきであるが，ただそうすると数学の困難が著しく増すので，Rayleigh はナビエ・ストークス方程式で粘性項を省いたものを用いた．これはレイノルズ数 R を無限大にした極限を考えることになるので，層流が安定を失う臨界レイノルズ数を計算するようなことは望み得ない．Rayleigh の理論から導かれる結論の一つは，二次元の平行剪断流に不安定が起こるためには，速度分布の曲線が変曲点を持たねばならないということである．変曲点の存在は，実は不安定のため

の必要で十分な条件になるのであるが，十分条件の証明については，はるか後年の研究(Tollmien 1935)まで待たなければならなかった．それはともかく，管の中の流れの速度分布は変曲点を持たず，レイノルズ数無限大のとき安定のはずである．したがってこの理論によって，乱流の発生を説明することはできない．

Reynoldsは晩年に近い論文(1895)において，気体分子運動論の類推から速度および圧力をそれぞれ

$$u_\alpha=\bar{u}_\alpha+u_\alpha' \ (\alpha=1,\ 2,\ 3),\quad p=\bar{p}+p' \tag{1.3}$$

のように，平均値（上横線つき）とそのまわりの変動（ダッシュつき）の和として表わし，方程式(1.1)および(1.2)に代入して平均を採ることによって，平均の運動に対する方程式

$$\frac{\partial\bar{u}_\alpha}{\partial x_\alpha}=0 \tag{1.4}$$

および

$$\rho\left(\frac{\partial\bar{u}_\alpha}{\partial t}+\bar{u}_\beta\frac{\partial\bar{u}_\alpha}{\partial x_\beta}\right)=\frac{\partial}{\partial x_\beta}(-\bar{p}\delta_{\alpha\beta}+\rho\nu\bar{e}_{\alpha\beta}-\rho\overline{u_\alpha'u_\beta'})\qquad(\alpha=1,\ 2,\ 3) \tag{1.5}$$

を導いた．これらの方程式をもとの方程式(1.1)および(1.2)と比較すると，質量保存の方程式は同形であるが，運動量保存の方程式は余分の項 $-\rho\overline{u_\alpha'u_\beta'}$ を含むことがわかる．つまり平均の運動は，平均の変形速度 $\bar{e}_{\alpha\beta}=\partial\bar{u}_\alpha/\partial x_\beta+\partial\bar{u}_\beta/\partial x_\alpha$ に対する粘性応力 $\rho\nu\bar{e}_{\alpha\beta}$ の他に，変動速度による見かけの応力 $-\rho\overline{u_\alpha'u_\beta'}$ の作用を受けることになるわけである．平均値を定義するのに，Reynoldsは空間的に平均を採っているが，その範囲は変動の規模に比べて十分に大きく，しかし平均運動の規模に比べて十分に小さいものでなければならない．このような条件は，少なくとも大きいレイノルズ数では満たされるものである．空間的平均の代りに，時間的平均を用いることもでき，アンサンブル平均を用いることも可能である．

平均の運動に対する方程式の中に，変動による見かけの応力が含まれることは，ナビエ・ストークス方程式の非線形構造に由来する困難を露呈している．見かけの応力に適当な仮定を設けない限り，方程式を解いて $\bar{u}_\alpha$ と $\bar{p}$ を定めることはできないわけである．これに対してReynoldsは，何も具体的な示唆を与えていない．しかし見かけの応力の作用については，すでにSaint-Venant (1843)が漠然と予想しており，またBoussinesq (1877)もこれに対して，粘性応力に類推的な表示 $\rho\nu_T\bar{e}_{\alpha\beta}$ を提案している．ν_T は動粘性 ν と同じ次元を持ち，渦動粘性または乱流粘性と呼ばれるが，ν のような物質定数ではない．これを用いて計算される結果が実験と合うように定められ，流れの種類によって異な

ってもよく，空間的に変化してもよく，ただ ν に比べて一般に著しく大きいものである．このような乱流粘性を用いると，見かけの応力は

$$-\rho\overline{u_\alpha' u_\beta'}=\rho\nu_T\bar{e}_{\alpha\beta} \tag{1.6}$$

で表わされる．つまりこの仮定によるときは，乱流の平均運動は少なくとも局所的に，動粘性の大きい層流と同等とみなされることになるわけである．見かけの応力 $-\rho\overline{u_\alpha' u_\beta'}$ は，今日レイノルズ応力と呼ばれている．

Reynolds (1895) はさらに，式 (1.5) を式 (1.2) から差し引いて，変動に対する方程式を作り，それから変動の運動エネルギー $\frac{1}{2}\rho q'^2(q'^2=u_1'^2+u_2'^2+u_3'^2)$ の変化を表わす関係

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\bar{u}_\beta\frac{\partial}{\partial x_\beta}\right)\left(\frac{1}{2}\rho q'^2\right)=-\frac{1}{2}\rho u_\alpha' u_\beta'\bar{e}_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}\rho\nu e_{\alpha\beta}'e_{\alpha\beta}'$$
$$-\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left\{u_\beta'\left(p'+\frac{1}{2}\rho q'^2\right)-\rho\nu u_\alpha' e_{\alpha\beta}'\right\}+\rho u_\alpha'\frac{\partial\overline{u_\alpha' u_\beta'}}{\partial x_\beta} \tag{1.7}$$

を導いた．$e_{\alpha\beta}'=\partial u_\alpha'/\partial x_\beta+\partial u_\beta'/\partial x_\alpha$ は変動の変形速度である．この方程式の両辺を空間的に積分すれば，左辺は平均運動とともに動く境界面の内部の変動の運動エネルギー E の変化を与える．境界面において $u_\alpha'=0$ $(\alpha=1, 2, 3)$ とすれば，右辺の第 3 項の積分が消え，平均を採れば第 4 項も消失する．したがって

$$\frac{d\bar{E}}{dt}=\frac{1}{2}\iiint(-\rho\overline{u_\alpha' u_\beta'})\bar{e}_{\alpha\beta}dv-\frac{1}{2}\iiint\rho\nu\overline{e_{\alpha\beta}'e_{\alpha\beta}'}dv \tag{1.8}$$

が得られる．この式の右辺の第 1 項は，変動がレイノルズ応力によって平均運動から獲得するエネルギーを表わし，第 2 項は変動が粘性によって失うエネルギーを表わす．乱流が平均的に定常な状態にあるためには，この二つのエネルギーが釣り合って，$d\bar{E}/dt=0$ となる必要があるわけである．

以上に述べたのは，十分に発達した乱流運動に対する議論であるが，Reynolds (1895) は同じ方法を，層流の不安定の問題にも適用している．つまり，乱流の平均運動に対して用いた $\bar{u}_\alpha$ と $\bar{p}$ によって，層流の速度成分と圧力を表わし，変動に対して用いた u_α' と p' によって，層流に重ねられる攪乱の速度成分と圧力を表わすわけである．そうすると，攪乱の運動エネルギー $\frac{1}{2}\rho q'^2$ の変化は式 (1.7) で与えられるが，もし攪乱が十分に小さければ，右辺の第 3 項と第 4 項は，第 1 項または第 2 項に比べて省略して差し支えない．したがって式 (1.7) を空間的に積分するとき，平均操作を加えることなしに，式 (1.8) と同様の関係

$$\frac{dE}{dt}=\frac{1}{2}\iiint(-\rho u_\alpha' u_\beta')\bar{e}_{\alpha\beta}dv-\frac{1}{2}\iiint\rho\nu e_{\alpha\beta}'e_{\alpha\beta}'dv \tag{1.9}$$

を導くことができる．右辺の第 1 項は，攪乱が層流から奪うエネルギーを表わし，第 2 項

は攪乱が粘性のために失うエネルギーを表わしている．攪乱のエネルギーが増加して，層流の不安定をもたらすためには，第1項が正で十分に大きく，dE/dt が正になる必要がある．そして不安定の始まるレイノルズ数 R の臨界値は，$dE/dt=0$ の条件に無次元量 $\bar{e}_{\alpha\beta}^*=\bar{e}_{\alpha\beta}L/V$, $u_\alpha^{*\prime}=u_\alpha'/V$, $e_{\alpha\beta}^{*\prime}=e_{\alpha\beta}'L/V$, $dv^*=dv/L^3$ を用いるとき

$$R_c=\iiint e_{\alpha\beta}^{*\prime}e_{\alpha\beta}^{*\prime}dv^* \Big/ \iiint (-u_\alpha^{*\prime}u_\beta^{*\prime})\bar{e}_{\alpha\beta}^*dv^* \tag{1.10}$$

のように与えられる．

問題とする層流に対して，攪乱の速度成分 $u_\alpha'(\alpha=1, 2, 3)$ がナビエ・ストークス方程式の解として得られるときは，式 (1.10) は単に結果の検証に役立つだけである．しかしそのような解が得られないときは，攪乱を適当に仮定して式 (1.10) に挿入することによって，R_c の値を推定する可能性を与える．Reynolds はこの可能性に注意し，連続の方程式と境界条件を満たす特殊の攪乱を仮定して，二次元ポアズイユ流れ $\bar{u}_1=V(1-x_2^2/L^2)$ の場合に，R_c の最低値 388 を求めた．その後 Orr (1907) は，これを変分の問題として解き，さらに低い値 88 を得ている．しかしこれらの値は，Reynolds (1883) が軸対称ポアズイユ流れで実験的に観察した臨界値 2×10^3 に比べて遥かに小さい．相違の理由は言うまでもなく，仮定された攪乱が流体力学的に起こり得ないことによるものと考えられる．この欠陥を補うには，Rayleigh (1880) によって始められた微小攪乱の方法を，粘性を省略せずに進めて行く以外にないのである．

1.2　乱流の発生：微小攪乱の増幅

ナビエ・ストークス方程式の層流を表わす定常解が，大きいレイノルズ数で観察されない事実は，層流の不安定の問題，特に時間的に増幅する微小攪乱の問題を提起している．微小攪乱の消長を粘性を省略することなく，ナビエ・ストークス方程式から導くことは，Orr (1907) と Sommerfeld (1909) によってそれぞれ独立に定式化された．簡単のために，問題とする層流は二次元の平行剪断流で，速度分布が $\bar{u}_1=U(x_2)$ で与えられ，それに重ねられる攪乱も二次元的で $u_1'=\partial\Psi/\partial x_2$, $u_2'=-\partial\Psi/\partial x_1$, 流れの関数 Ψ がフーリエ展開の代表項 $\Phi(x_2)\exp[i(kx_1-\omega t)]$ で与えられるような進行波動であるものとする．k は正の実数で x_1 方向の波数を表わし，$\omega=\omega_r+i\omega_i$ は複素数で，実部 ω_r は周波数，虚部 ω_i は対数増幅率を表わし，ω_r/k は位相速度を表わす．この表示をナビエ・ストークス方程式に代入し，攪乱の2乗以上の項を省略するときは，攪乱の振幅 $\Phi(x_2)$ を定める方程式

$$\left(U-\frac{\omega}{k}\right)(\Phi''-k^2\Phi)-U''\Phi+\frac{i\nu}{k}(\Phi''''-2k^2\Phi''+k^4\Phi)=0 \qquad (1.11)$$

が得られる．ダッシュは x_2 について微分することを表わす．この同次の常微分方程式は，後にオル・ゾンマーフェルト方程式と呼ばれるようになるのであるが，境界の固体壁面で攪乱速度が 0，したがって $\Phi=\Phi'=0$ という同次の境界条件とともに，古典的な固有値問題を構成している．つまり，代表的な長さを L，代表的な速度を V とするとき，与えられたレイノルズ数 $R=LV/\nu$，無次元波数 kL ならびに無次元速度分布 U/V（x_2/L の既知の関数）に対し，無次元の周波数 $\omega_r L/V$ および増幅率 $\omega_i L/V$ が，境界値問題の固有値として定まることになるわけである．その結果もし ω_i が正となれば，攪乱は時間的に増幅して層流は不安定，逆に ω_i が負となれば，攪乱は減衰して層流は安定と考えられる．この方法は，Orr，Sommerfeld および Hopf (1914) によって，まず二次元クエット流れ（$U=Vx_2/L$）に適用されたが，その結果は R のあらゆる値に対して，ω_i が正になることがなく，層流の不安定が起こらぬことを示した．これは意外の結論であったが，実験的に不安定の観察されるのは，半径差の小さい回転円筒の間の流れであり，厳密に平行な二次元クエット流れが実現されるとすれば，おそらく不安定が起こらぬのではないかと考えざるを得なかった．

一方で二次元ポアズイユ流れ（$U=V[1-x_2^2/L^2]$）は，変曲点を持たないから，$R\to\infty$ の極限で安定である．もし粘性の作用が攪乱を減衰させ，流れを安定化するだけのものであるならば，この流れは R の有限の値でも安定のはずであり，そうであるとすれば固体壁間の二次元平行剪断流は，少なくとも微小攪乱に対して安定なのではないかと想像されたこともあった．Prandtl (1921) が粘性の作用は必ずしも安定化とは限らず，不安定をもたらす可能性もあることを指摘したのはこの時期のことである．粘性のない $R\to\infty$ の状態では，固体壁面で攪乱が辷り速度を持つので，Prandtl は境界層の概念に基づいて粘性の影響を考慮し，それを辷りを相殺するような速度場として追加した．具体的な計算は Tietjens (1925) によって行なわれたが，その結果は粘性の影響のために，壁の近くで速度成分 u_1' および u_2' の間の位相が変わり，見かけの応力 $-\rho\overline{u_1'u_2'}$ が発生して，攪乱のエネルギーを増すことを明らかにした．この粘性による不安定作用は，R の大きい値で $R^{-\frac{1}{2}}$ に比例している．なお粘性を省略すると，方程式 (1.11) は $U=\omega_r/k$ となる点で特異性を持つが，これは流れの速度が攪乱の位相速度に等しいために，同じ流体部分が絶えず同じ圧力の場におかれ，攪乱が著しく増大することに由来する．したがってこの点の近くでも，粘性の影響を考慮しなければならない．もっともこの場合の粘性の作用は，壁の辷りとは逆に流れを安定化させ，その程度は $R^{-\frac{2}{3}}$ に比例している．このような結果

から，二次元ポアズイユ流れは R が十分に小さければ安定であり，R がある値を越えれば不安定になるが，$R\to\infty$ の極限で再び安定になることが予想される[1]．ただ Tietjens の解析は，最も重要な影響を示すだけの局所的な近似解であるから，与えられた流れに対して実際に臨界レイノルズ数を計算するようなことはできない．同じ頃 Heisenberg (1924) は方程式 (1.11) を近似的に解き，二次元ポアズイユ流れは大きいレイノルズ数で不安定になることを示したけれども，その解法に疑問の点があって，一般の承認を受けることがなかった．方程式の満足な解法ははじめて Tollmien (1929) によって与えられたが，対象の層流はポアズイユ流れではなく，圧力勾配のない平板に沿う境界層の速度分布，いわゆるブラジウスの速度分布を持つ流れである．境界層の厚さ（排除厚の3倍）を L，境界層外側の速度を V としてレイノルズ数 R を定義するとき，R の臨界値 1.3×10^3 が得られ，R がこの値を越えると，無次元波数 kL，または無次元周波数 $\omega_r L/V$ のある範囲の攪乱が選択的に増幅を受けることが示された．Tollmien は攪乱が増幅も減衰もしない中立安定の限界を求めただけであるが，Schlichting (1933) はそれを拡張して，増幅する攪乱を計算した．またこの時期まで，攪乱はすべて二次元に限られたのに対し，Squire (1933) は x_3 方向にも定まった波数の周期性を持つ三次元的な攪乱を考え，その問題がより低いレイノルズ数における二次元攪乱の問題に帰着されることを示した．この結果として，臨界レイノルズ数の計算に関する限り，二次元攪乱だけを考えればよいことになるわけである．なお Tollmien の解法は，圧力勾配のある境界層の速度分布の流れにも適用され，圧力上昇の場合に臨界レイノルズ数が減り，圧力降下の場合に増すことが示された (Schlichting, Ulrich 1940, Pretsch 1941)．しかしそれにしても増幅する微小攪乱の存在を，実験的に確かめることは容易でなかった (Prandtl 1933, Nikuradse 1933, Schiller 1934)．一方で Dryden (1936) の平板に沿う境界層の実験は，層流から乱流への遷移が境界層の外側の乱流から発生することを示唆している．Taylor (1936) は外側の乱流の変動する圧力勾配によって，境界層に瞬間的な剥離が起こり，それが遷移の原因になるのではないかと考えた．この仮説から導かれた全体的な面に関する予測のいくつかは，Dryden, Schubauer, Mock および Skramstad (1937) ならびに Hall および Hislop (1938) の実験によって確かめられている．

このようにして Tollmien の理論は，異常な数学的困難を越えて成就されたにもかかわらず，その結果は長い間実験による支持の得られないまま閑却された．ようやく14年の後に Schubauer と Skramstad (1943) は，乱れの少ない気流に入れた平板の境界層の

1) 二次元クエット流れでは，特異点が壁面に一致するので，流れは R のあらゆる値に対して安定である．

中で，乱流への遷移が理論の予測するような周波数の波動から始まることを見出した．観察された波動の特性は理論値とよく一致し，Tollmien の理論の妥当であることを立証した．わずかに遅れて独立に，Liepmann (1943) も同様の観察を行なっている．それまでの実験に共通の気流の乱れの大きさのために，増幅するトルミーン波動の存在が隠されていたのである．Lin (1945) は Heisenberg の解法を改良し，Tollmien とは異なる方法で，二次元ポアズイユ流れとブラジウス流れの中立安定の限界を定めた．レイノルズ数の臨界値はポアズイユ流れ（壁間隔 $2L$，最大速度 V）に対し 5.3×10^3，ブラジウス流れ（境界層厚さ L，外側速度 V）に対し 1.3×10^3 である．固体境界のない自由剪断流に対しては，静止流体中に吹き出す噴流，物体の後の伴流，速度の異なる流れの間の混合層（一方が静止のときは剝離層）などの速度分布を持つ流れの安定が調べられ，固体境界のある場合に比べて，著しく低い臨界レイノルズ数が計算されている (Tatsumi, Kakutani 1958, Tatsumi, Gotoh 1960)．

以上に述べた層流の不安定の理論では，すべて層流を二次元平行剪断流とみなし，その上に時間的に増幅する攪乱が重ねられる．平行剪断流の制約のために，境界層や噴流などの場合には，厚さや速度分布が x_1 方向に変わらないような層流が仮想されるわけである．その結果を厚さが変化する実際の流れに適用するための補正は，ようやく最近になって検討され，境界層では圧力上昇の著しい場合を除いてそれほど大きくならないが，噴流などの自由剪断流の場合には相当に大きくなることが明らかにされた (Bouthier 1972, 1973, Saric, Nayfeh 1975)．またナビエ・ストークス方程式を数値的に積分することによって，攪乱の大きさには制限がなく，平板に沿って境界層が厚さを増すことも許されるような場合の攪乱の消長が計算されている (Fasel 1976, Murdock 1977)．なお時間的に増幅する攪乱よりも，x_1 方向に空間的に増幅する攪乱の方が実験の状態に近いことが多いが，そのような攪乱のためには，ω を実数，k を複素数 k_r+ik_i として取り扱う必要がある．この場合に空間的な増幅率は $-k_i$ によって与えられる．空間的増幅率 0 の中立安定の限界は，時間的増幅の場合と変わらないが，空間的増幅率 $-k_i$ は群速度 $d\omega_r/dk$ によって近似的に，時間的増幅率 ω_i と $-k_i=\omega_i/(d\omega_r/dk)$ のように結びつけられることが明らかにされた (Gaster 1962)．

圧縮性流体の平板に沿う境界層の流れの不安定は，Lees と Lin (1946), Lees (1947), Dunn と Lin (1955), Reshotko (1963), Mack (1965, 1969) などによって調べられた．理論的に導かれる重要な結論の一つは，固体壁面を冷却することによって，境界層を安定にする可能性のあることである (Lees 1947)．もう一つは，不安定のモードが一つだけで

なくなり，非圧縮性流体（低速）のトルミーン波動に対応するモードは最も低い周波数を持つが，超音速では周波数の高いモードに比べて増幅が弱いことである (Mack 1965).

壁面の冷却は空気の圧縮性を無視できる低速においても有効である．平板に沿う境界層の壁面に接するところでは，$(\partial/\partial x_2)(\mu\partial\bar{u}_1/\partial x_2)=0$ であるから，温度を T とするときは $\mu(\partial^2\bar{u}_1/\partial x_2^2)=-(d\mu/dT)(\partial T/\partial x_2)(\partial\bar{u}_1/\partial x_2)$ となる．粘性係数の温度による変化 $d\mu/dT$ は空気では正，水では負であり，また壁面での温度勾配 $\partial T/\partial x_2$ は壁面を冷やすとき正，熱するとき負となるので，壁面での $\partial^2\bar{u}_1/\partial x_2^2$ は空気の場合に壁面を熱するとき，または水の場合に壁面を冷やすときに正となり，速度分布に $\partial^2\bar{u}_1/\partial x_2^2=0$ となる点（変曲点）が現われて不安定を招来する．逆に空気の場合に壁面を冷やすとき，または水の場合に壁面を熱するとき，壁面での $\partial^2\bar{u}_1/\partial x_2^2$ は負となって流れは安定化される (Liepmann, Fila 1947, Wazzan, Okamura, Smith 1968, Strazisar, Reshotko, Prahl 1977).

軸対称ポアズイユ流れは軸対称攪乱に対して，すべてのレイノルズ数において安定であり (Sexl 1927, Davey, Drazin 1969)，また非軸対称攪乱に対しても同様に安定である (Salwen, Grosch 1972, Garg, Rouleau 1972)．このような流れで実際に乱流への遷移が観察されるのは，微小ではなくて有限の攪乱に対する不安定によるものであり，その成因は例えばポアズイユ流れが実現されるまでの助走領域の流れの不安定に由来する (Tatsumi 1952, Sarpkaya 1975) のではないかと考えられている．

二次元平行流に対する Squire の定理は，軸対称の流れや曲がった流れでは成立しない[1]．特に曲がった流れでは遠心力が働き，三次元的な攪乱が増幅する可能性がある．回転する同軸円筒の間のクエット流れで，半径距離 r の位置の円周方向の速度を v とすると，遠心力 $\rho v^2/r$ と釣り合う圧力勾配が作用している．何かの原因で流体部分が外側の半径 $r'(>r)$ の位置に移るとき，粘性がなければ角運動量は保存されるから，速度は vr/r' となり，遠心力は $\rho(vr/r')^2/r'$ となるが，この値が新しい位置の圧力勾配 $\rho v'^2/r'$ よりも小さければ流体部分は内側に戻されるはずである．つまり安定が保たれるための条件は $v^2r^2<v'^2r'^2$ (Rayleigh 1916)，または内外円筒の半径を r_1, r_2，角速度を Ω_1, Ω_2 とするとき，$r_1^2\Omega_1<r_2^2\Omega_2$ によって与えられる．したがって特に外円筒のみ回転 $(\Omega_1=0)$ の場合は安定，内円筒のみ回転 $(\Omega_2=0)$，または内外円筒反対回転 $(\Omega_1>0,\ \Omega_2<0)$ の場合は不安定となるわけである．これに対して粘性を考慮に入れた Taylor (1923) の微小攪乱による計算は，不安定の範囲が狭くなり，粘性の作用がこの場合は安定化の方向に働くことを示している．Taylor の計算では，円筒の半径差が半径に比べて小さく，円筒は

1) 二次元平行流の場合でも，空間的に増幅する攪乱に対しては，この定理を解析的に証明することが困難である．