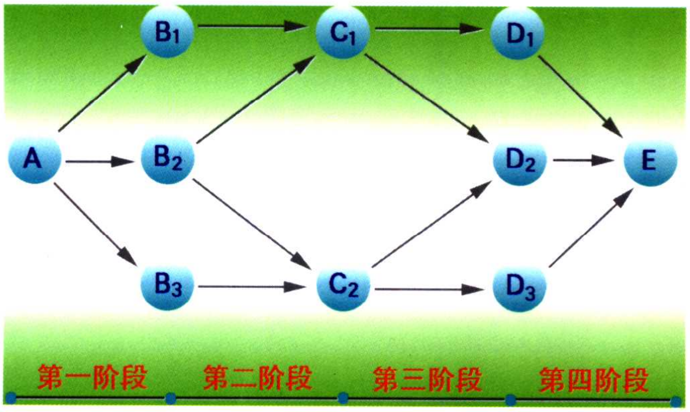
面向21世纪 交通版

高等学校教材

运筹学

马进 主编
任科社 副主编



人民交通出版社
China Communications Press

高等学校教材

Yun Chou Xue

运 筹 学

马 进 主 编

任科社 副主编

人民交通出版社

内容提要

本书系统地介绍了运筹学的基本理论和方法，特别注重其经济学解释和实际应用。全书叙述注重直观背景的介绍，并通过例子来说明基本概念；在理论推导过程中，既注意说理严谨，又力求深入浅出、通俗易懂；在计算方法的介绍上，既注意方法的基本思路，又通过大量实例来说明方法的使用及技巧的掌握，力求使方法简洁，易于操作。本书配有习题及参考答案，以供教学之用。

本书可作为高等学校经济、管理专业本科生教材，也可作为研究生教学参考书；通过对书中内容的取舍，还可作为其他相关专业的教材或教学参考书；当然，也可作为广大科技工作者、管理人员的自学参考用书。

图书在版编目（CIP）数据

运筹学/马进主编. —北京：人民交通出版社，2003.10

ISBN 7-114-04797-5

Ⅰ.运... Ⅱ.马... Ⅲ.运筹学 Ⅳ.022

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 076567 号

高等学校教材

运 筹 学

马进 主编

任科社 副主编

正文设计：彭小秋 责任校对：尹 静 责任印制：杨柏力

人民交通出版社出版发行

（100013 北京和平里东街 10 号 010-64216602）

各地新华书店经销

三河市宝日文龙印务有限公司印刷

开本：787 ×1092 1/16 印张：22 字数：546 千

2003 年 10 月 第 1 版

2003 年 10 月 第 1 版 第 1 次印刷

印数：0001 — 3000 册 定价：35.00 元

ISBN 7-114-04797-5

长安大学经济与管理学院

教学管理工作委员会

主任委员： 周国光

委　　员： 芮夕捷　左庆乐　李祥义　张周堂

徐海成　董千里　陈引社　马　进

秘　　书： 杨小莉

前　言

为了加速我国社会主义经济建设的发展，我们不但要学习和掌握先进的科学和技术，而且要学习和掌握现代化的科学管理方法。运筹学是通过把有关运用、经营、经济、管理等系统归结成数学模型，用数学方法进行研究，从而求得系统最优化运行的方案，供管理人员和决策人员作参考。

实践证明，一门科学和技术或某一系统，只要成功地应用了运筹学的方法，就会达到尽善尽美的地步。因此，运筹学是管理人才必备的基本知识。

本书是在为长安大学经济与管理学院讲授《运筹学》课程而编写的讲义的基础上，并参照全国管理专业《运筹学》教学大纲而编写的。经长安大学经济与管理学院教学管理工作委员会审定，本书已被列为本科生教材和研究生的教学参考书。

本书绪论及第一、二、三、四、五、七、八、九、十章由马进编写，第六、十一、十二、十三章由任科社编写。全书由马进教授主编。

书中如有不足乃至错误之处，恳请读者批评指正。

编者

2003 年 2 月

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

目　　录

绪　论

运筹学(Operational Research 缩写 OR)是近五六十年才发展起来的一门年轻的学科。英文 OR 一词,直译是“作业研究”。OR 的中文译名运筹学则是出自《史记·高祖本记》中刘邦的一句话:“夫运筹于帷幄之中,决胜于千里之外,吾不如子房。”摘取“运筹”二字作为 OR 的意译倒是十分恰当,其含义是运用筹划,出谋献策,以策略取胜。

Operational Research 一词最早出现在第二次世界大战期间英国对防空作战系统的军事研究中。为了搞好英伦三岛的空防,以物理学家 Blackett 为首的科学研究小组对伦敦周围地区如何最有效地运用雷达布防防范德国飞机入侵的问题进行了研究。从此以后,人们就把研究运用、经营、管理这类的系统最优化问题都纳入了运筹学的范围。运筹学可以看作是用数量分析方法为管理决策提供科学依据的一门学科。它是把有关运用、经营、管理系统首先归结成数学模型,然后用数学方法进行数量分析和比较,从而求得系统最优运行的方案,供管理人员和决策人员作参考。

运筹学发展到现在虽只有 50 多年的历史,但应用领域十分广泛。目前,运筹学在生产管理、交通运输、工程建设、军事作战、科学试验、财政经济以及社会系统等各个领域都得到了极为广泛的应用。运筹学在我国的应用与发达国家比较尚属起步阶段,但成效已经很显著。由于动筹学的应用,节省了投资,降低了能耗,节约了原材料,加速了新产品的开发和研制,缩短了工程的期限。遗憾的是,运筹学在管理科学中的重要作用,在我国至今尚未充分被各级管理的职能部门所认识,尚未发挥出它在四个现代化建设中应有的巨大作用。可以相信,随着运筹学在我国的进一步的推广和应用,这门学科必将受到人们的普遍重视,它必将对我国的四个现代化建设作出更大的贡献。

运筹学的内容很广泛,下面简要地说明一些主要的分支。这些分支并不都在以后各章中讲述,这里只简单地作一介绍,使读者有一个大致的了解。

1.线性规划

线性规划是发展最成熟又应用较广的最重要的分支。它是研究线性目标函数,在一组线性约束条件下如何求得最优决策方案的问题。其目标函数可能是求最大产值、最大利润,也可能是求最小消耗、最低成本。约束条件一般是人力、物力、财力等资源限制、市场需要的限制等。

2.整数规划

在线性规划问题中,我们求得的最优解往往是非整数解,但对于某些具体问题,常要求必须是整数解才有意义,例如,所求解是机器的台数、装货的车数、完成工作的人数等。当线性规划问题中的变量具有整数约束条件时,我们称之为整数规划问题。

3.参数规划

在线性规划的实际问题中,某类系数常会作为某一参数的函数同时发生变化。对于这类

问题，我们关心的是在参数可能的范围内，不需重新计算而求出问题的最优解，这就是参数规划问题。

4.非线性规划

在科学管理和其他领域中，很多实际问题可以归结为线性规划问题。但是，还有另外一些问题，其目标函数或约束条件很难用线性函数来表达。如果目标函数或约束条件中，有一个或多个是变量的非线性函数，就称此类问题为非线性规划问题。

5.目标规划

线性规划是在满足所有约束条件的可行解集上寻求使目标函数达到最大(小)值的绝对最优解。但当约束条件有矛盾而线性规划无解时，或者存在多个而且相互排斥的目标时(如利润与成本)，这就要借助于目标规划的方法来解决。

6.动态规划

动态规划是解决多阶段决策过程最优化的一种方法。动态规划的基本思想是，把一个比较复杂的问题分解成为一系列同一类型的更容易求解的子问题。由于把最优化应用到每个子问题上，所以使问题的求解简单化。

7.网络分析

网络分析是图论在管理上的应用。它可以对一些能用网络图来描述的问题进行分析研究，例如，最短路径问题、网络最大流问题、网络计划的关键路线问题等。

8.库存论或存储论

在生产管理中存储货物过少，会造成停工待料、供不应求，失去销售机会使利润减少，并因为进货少，而增加进货次数和相应的订购费用。若存储货物过多，就会造成积压资金，增加存储保管费用，甚至导致货物变质而失去使用价值。

存储论就是专门研究存储问题有关理论和方法的一门学科。

9.排队论

排队论研究的是随机等待现象。排队是我们在日常生活中和生产服务系统中不可避免的现象。如果增加服务设施，会增加投资或发生空闲浪费；如果服务设施太少，排队现象就会严重，甚至导致顾客的流失。如何提高随机服务系统的运行效率，就是排队论研究的主要课题。排队论又称为随机服务系统理论。

10.决策论

决策是人们生活和管理工作中普遍存在的一种活动。所谓决策，就是决策者为了实现某种目标，从若干种可能的策略中选取效果最好的策略的过程。决策论就是研究如何才能作出科学决策的一门学科。

11.对策论

对策是决策者在某种竞争场合下作出的决策，或者说是参加竞争的各方为了自己获胜采取的对付对方的策略。对策论就是研究对策现象的数学理论和方法。

12.模型论

人们在进行生产实践或科学实验时，经常要考察与了解一个系统或一个运动过程，通过系统或过程的某些特征来了解系统的内在联系或运动过程的变化规律。而在考察一个系统或一个过程时，首先必须对系统或过程进行适当的描述，即建立系统的模型。模型论就是研究一个现实系统的模型建立方法和基本原则。

第一章　线性规划问题及单纯形法原理

线性规划(Linear Programming)是运筹学的一个重要分支。研究线性规划问题最早的是苏联数学家康脱洛维奇。1939年,他为了解决生产组织和管理中的一系列问题出版了《生产组织与计划中的数学方法》一书。该书中主要讨论了机床负荷分配、原材料的合理利用、下料、运输等问题,并提出了"解乘数法"。由于他没能提出一个统一的求解方法,所以他提出的问题在当时未能引起人们的特别重视。直到1947年,美国数学家丹捷格(George B. Dantzig)提出了求解线性规划问题的一般解法——单纯形方法,并于1953年提出修正单纯形法,使线性规划在理论上趋于成熟,从而使线性规划广泛地运用于工业、交通、农业、军事和商业等各个领域。特别是能用电子计算机来处理成千上万个约束条件和变量的大规模线性规划问题之后,使其在各个领域中的应用更加广泛和深入。目前,它已成为现代管理科学的重要基础和手段之一。

第一节　线性规划问题及其数学模型

前面提到,线性规划的应用是很广泛的,应用的实际问题各式各样。这一节,我们通过一些简单的例子来阐明线性规划所研究的问题和它的数学模型及标准形式,并介绍两个变量的线性规划问题的图解方法,通过图解的简单直观,有助于了解线性规划问题求解的基本原理。

1.1　线性规划所研究的问题

在生产管理和经营活动中,人们会经常提出下列两类问题:一类是如何合理地使用有限的人力、物力、财力等资源,以便得到最好的经济效果;另一类是一项任务确定后,如何统筹安排,尽量做到用最少的人力、物力、财力等资源去完成这一任务。其实这两类问题是一个问题的两个方面,就是所谓寻求整个问题的某个整体指标最优的问题。

例1-1　产品安排问题

某工厂生产甲、乙两种产品,出售后每吨产品的收益分别为1.5万元和1万元。生产每吨甲产品要用1t原材料A,3t原材料B,电力5kW;生产每吨乙产品要用1t原材料A,1t原材料B,电力3kW。现该厂因某种条件限制只有10t原材料A,20t原材料B,电力45kW。问:在这样的条件下应生产甲、乙两种产品各多少吨才能使产品出售后的总收益最大。

为了解决这一实际问题,我们首先要把它归结成数学问题,也就是说,把它抽象为数学模型。建立一个实际问题的数学模型可以按下面4个步骤进行。

第一步,把有待解决的实际问题的意义搞清楚,即明确该问题的经济背景:包括内部的经济结构和外部的各种条件。为了使数学模型不致太复杂,往往仅考虑主要因素,而去掉次要因素。在此例中,我们仅考虑在原材料A、B及电力供应数量有限的条件下,确定产品生产的数量,并使工厂取得最大收益,对其他因素,如劳动力、市场需求等因素都没有考虑。为简明起

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

见，一般可以将问题的各种条件列成表格形式(见表 1-1)。

表 1-1

每吨产品所需资源 产品 / 资源	甲	乙	可供应资源量
原材料 A(t)	1	1	10
原材料 B(t)	3	1	20
电　力(kW)	5	3	45
每吨产品收益(千元)	15	10	

第二步，确定要求解的决策变量。决策变量如果选取得当，可使数学模型简洁，求解比较方便。只要问题不太复杂，我们尽可能采用直接设置决策变量，即：问什么，就确定什么决策变量。如在本例中设：x_1 为产品甲的生产量，x_2 为产品乙的生产量。

第三步，明确实际问题的目标函数，并把它写成决策变量的函数；是求该目标函数的最大值还是最小值。如在本例中，问题的目标是使产品出售后的总收益最大。假定生产出来的产品都能销售掉，则可得总收益为：

$$z = 15x_1 + 10x_2$$

第四步，明确问题中所有限制条件，即约束条件，并用决策变量的方程组或不等式组来表示。如在本例中：设工厂原材料 A 消耗的数量不超过 10t，就有

$$x_1 + x_2 \leqslant 10$$

同样，该工厂原材料 B 消耗的数量不能超过 20t，就有

$$3x_1 + x_2 \leqslant 20$$

另外，该工厂电力消耗的数量不能超 45kW，就有

$$5x_1 + 3x_2 \leqslant 45$$

同时，应该注意到 x_1、x_2 的实际意义，它们都只能取非负值，即决策变量的非负条件，就有

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0$$

综上所述，这个实际问题的数学模型就可以写成：

求

$$\max\ z = 15x_1 + 10x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 \leqslant 10 \\ 3x_1 + x_2 \leqslant 20 \\ 5x_1 + 3x_2 \leqslant 45 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

其中 s.t.是 subject to 之缩写，为受限制于之意思。由于在此问题中，目标函数和约束条件中出现的都是决策变量的线性函数，因此命名为线性规划问题。

下面我们再列举生产管理和经营活动中的其他一些线性规划的例子及其相应的线性规划描述。

例 1-2　运输问题

甲、乙、丙 3 个煤矿供应 3 个城市用煤，各煤矿产量及各城市需煤量见表 1-2，各煤矿到各城市之间的运输距离见表 1-3，问如何安排调运计划，使总运输量最小？

表 1-2

煤　矿	日产量(t)	城　市	日需量(t)
甲	700	A	1200
乙	400	B	500
丙	900	C	300

表 1-3

运距(km)　城市 / 煤矿	A	B	C
甲	30	110	100
乙	10	90	80
丙	70	40	50

利用与例 1-1 相同的方法。

设 x_{ij}表示从第 i 个煤矿运往第 j 个城市的数量，其中 $i,j=1,2,3$。由此可得其数学模型为

$$\min z = 30x_{11}+110x_{12}+100x_{13}+10x_{21}+90x_{22}+ 80x_{23}+70x_{31}+40x_{32}+50x_{33}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=700 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=400 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}=900 \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}=1200 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=500 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=300 \\ x_{ij}\geqslant 0 \quad (i,j=1,2,3) \end{cases}$$

例 1-3　配料问题

某药厂生产 A、B、C 3 种药物，可供选择的原料有甲、乙、丙、丁 4 种原料的成本分别为每千克 5 元、6 元、7 元和 8 元。每千克不同原料所能提取的各种药物的数量(单位:g/kg)见表 1-4。

单位:g/kg　　表 1-4

药名 / 原料	A	B	C
甲	2	4	5
乙	3	7	4
丙	6	2	8
丁	5	1	3

药厂要求每天生产 A 药至少 570g，B 药不超过 240g，C 药恰好 300g。问如何选配各种原料的数量既满足生产需要，又使原料的总成本最小。

设 $x_i(i=1,2,3,4)$分别为原料甲、乙、丙、丁每天的选配数量(单位:kg)，
由此可得其数学模型为

$$\min z = 5x_1+6x_2+7x_3+8x_4$$

$$
\text{s.t.}\begin{cases}2x_1+3x_2+6x_3+5x_4\geqslant 570\\4x_1+7x_2+2x_3+x_4\leqslant 240\\5x_1+4x_2+8x_3+3x_4=300\\x_j\geqslant 0\quad(j=1,2,3,4)\end{cases}
$$

例 1-4 合理下料问题

某厂接受一批加工订货，需加工 100 套钢架，每套由长 2.9m、2.1m 和 1.5m 的圆钢各一根组成。而现在仅有一批长 7.4m 的棒料毛坯，问应如何下料既满足加工订货需要，又使消耗的棒料根数最少。

对此例一种最简便的下料方法是：从每一根棒料毛坯上截取 2.9m、2.1m、1.5m 长度的棒料各一根，于是一根毛坯刚好可截出一套钢架所需的棒料，那么要满足加工 100 套钢架的任务就需要消耗 100 根长 7.4m 的棒料。每根棒料毛坯剩下 0.9m 的料头，100 根毛坯总共剩下 90m 料头。人们自然会想到，这种方法虽然简单，但不会是最好的方法，如果采取合理套截肯定会更加节省棒料的根数。正如善于动脑筋的裁缝，他们往往会采取合理套裁的方法来减少用料，从而赢得顾客的青睐。

据题意，我们在排除明显不合理的方案后，可以列出下面 8 种套截方案，见表 1-5。

表 1-5

下料根数 方案 / 长度(m)	1	2	3	4	5	6	7	8
2.9(m)	0	0	0	0	1	1	1	2
2.1(m)	0	1	2	3	0	1	2	0
1.5(m)	4	3	2	0	3	1	0	1
合计	6.0	6.6	7.2	6.3	7.4	6.5	7.1	7.3
料头	1.4	0.8	0.2	1.1	0	0.9	0.3	0.1

令 $x_i(i=1,2,\cdots,8)$ 表示按第 i 种方案下料的棒料毛坯根数，由此可得其数学模型为

$$
\min=\sum_{i=1}^{8}x_i
$$

$$
\text{s.t.}\begin{cases}x_5+x_6+x_7+2x_8\geqslant 100\\x_2+2x_3+3x_4+x_6+2x_7\geqslant 100\\4x_1+3x_2+2x_3+3x_5+x_6+x_8\geqslant 100\\x_i\geqslant 0\quad(i=1,2,\cdots,8)\text{且为整数}\end{cases}
$$

如果我们取 $x_4=34,x_5=20,x_8=40$，则由表 1-5 可知：

取 34 根棒料毛坯按方案 4 截取，可得 2.1m 棒料 102 根，剩料头 37.4m。

取 20 根棒料毛坯按方案 5 截取，可得 2.9m 棒料 20 根，1.5m 棒料 60 根，没剩料头。

取 40 根棒料毛坯按方案 8 截取，可得 2.9m 棒料 80 根，1.5m 棒料 40 根，剩料头 4m。

按上述方法截取，总共消耗棒料毛坯 94 根，剩料头 41.4m，共截得 2.9m 棒料 100 根，2.1m 棒料 102 根，1.5m 棒料 100 根。该方案显然比上述的简单下料方案好。

以后我们可以知道，如果按其数学模型采用最优化方法计算可得最优结果为 $x_5=30,x_7=50,x_8=10$。

即取 30 根棒料毛坯按方案 5 截取，可得 2.9m 棒料 30 根，1.5m 棒料 90 根，没剩料头。

取 50 根棒料毛坯按方案 7 截取，可得 2.9m 棒料 50 根，2.1m 棒料 100 根，剩料头 15m。

取 10 根棒料毛坯按方案 8 截取，可得 2.9m 棒料 20 根，1.5m 棒料 10 根，剩料头 1m。

按最优方法截取，总共消耗棒料毛坯 90 根，剩料头 16m，共截得 2.9m 棒料 100 根，2.1m棒料 100 根，1.5m 棒料 100 根。

例 1-5　投资问题

某交通部门有一批资金用于 5 个运输公司的投资，用于各运输公司时所得之净收益(投入资金的百分比)见表 1-6。

表 1-6

运输公司	A	B	C	D	E
收益(%)	12	8	6	4	9

由于某种原因，用于运输公司 A 的投资不大于其他各运输公司投资之和，用于运输公司 B 和 E 的投资总和要不少于运输公司 C 的投资，用于运输公司 D 的投资不少于总投资的 1/4。试确定使该交通部门净收益最大的投资分配方案。

设 $x_i(i=1,2,\cdots,5)$分别表示用于运输公司 A、B、C、D、E 的投资百分比，由此可得其数学模型为

$$\max z = 0.12x_1 + 0.08x_2 + 0.06x_3 + 0.04x_4 + 0.09x_5$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 - x_5 \leqslant 0 \\ x_2 - x_3 + x_5 \geqslant 0 \\ x_4 \geqslant 1/4 \\ x_i \geqslant 0 \quad (i=1,2,3,4,5) \end{cases}$$

例 1-6　产品配套问题

某汽车制造厂生产的一种配件包括 4 个 A 零件和 5 个 B 零件。这两种零件需耗用两种原材料，这两种原材料可供的数量分别为 250kg 和 470kg。现有 3 个车间进行生产。由于 3 个车间拥有的设备和制造零件的方法各不相同，所以每个生产班的原料需要量和每种零件的产量也不同，具体见表 1-7。试确定 3 个车间的生产班数，使得产品的配套数达到最大。

表 1-7

车　间	每班用料(kg)		每班产量(个数)	
	原料 I	原料 II	零件 A	零件 B
甲	3	5	8	4
乙	7	9	7	8
丙	4	8	9	13

设 x_1、x_2、x_3 是甲、乙、丙 3 个车间的生产班数，则 3 个车间生产零件 A 的总数为 $8x_1+7x_2+9x_3$。

同样，零件 B 的总数为 $4x_1+8x_2+13x_3$。

要注意的是，本例的目标是使产品的配套数达到最大，而不是生产零件 A 和 B 的总数最多，已知每个配件需要零件 A 和 B 的配套比例是 4:5，所以产品的最后配套数额为

$$z = \min\left(\frac{8x_1+7x_2+9x_3}{4}, \frac{4x_1+8x_2+13x_3}{5}\right)$$

上面的目标函数不是线性函数,我们可以通过变换使上面的模式变成线性函数。设

$$y=\min\left(\frac{8x_1+7x_2+9x_3}{4},\frac{4x_1+8x_2+13x_3}{5}\right)$$

那么 y 是最后的配套数,它等于两个表达式中较小的一个数。因为事先我们不知道哪一个表达式比较小,所以上面等式的意思是

$$\left(\frac{8x_1+7x_2+9x_3}{4}\geqslant y\ \text{和}\ \frac{4x_1+8x_2+13x_3}{5}\right)\geqslant y$$

因为当最后的配套数 y 达到最大的时候,它的上限是由两个不等式中左边较小的一个确定的,所以在任何解中,这两个不等式中至少有一个必须保持为等式。

因此

$$y=\min\left(\frac{8x_1+7x_2+9x_3}{4},\frac{4x_1+8x_2+13x_3}{5}\right)$$

与下面两个不等式等价

$$\frac{8x_1+7x_2+9x_3}{4}\geqslant y$$

$$\frac{4x_1+8x_2+13x_3}{5}\geqslant y$$

据题意,对原料 I 和 II 相应的约束条件分别是

$$3x_1+7x_2+4x_3\leqslant 250$$

$$5x_1+9x_2+8x_3\leqslant 470$$

由此可得其数学模型为

$$\max z=y$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}8x_1+7x_2+9x_3-4y\geqslant 0\\4x_1+8x_2+13x_3-5y\geqslant 0\\3x_1+7x_2+4x_3\leqslant 250\\5x_1+9x_{+}8x_3\leqslant 470\\x_1,\ x_2,\ x_3,\ y\geqslant 0\end{cases}$$

从以上几个例子可以看出,它们都是属于一类优化问题。从数学上说,它们具有以下共同特征。

(1)每一个问题都用一组未知变量($x_1,x_2,\cdots,x_n$)表示某一方案,这组未知变量的一组定值就表示一个具体方案。通常要求这些未知变量取值是非负的。我们称这些未知变量为决策变量。

(2)存在一定的限制条件(称为约束条件),这些限制条件都可以用一组线性等式或线性不等式来表达。

(3)都有一个目标要求,并且这个目标可以表示为一组未知变量的线性函数(称为目标函数)。按研究的实际问题而要求目标函数实现最大化或者最小化。

具有以上 3 个特征的最优化问题称为线性规划问题。

线性规划问题可以用数学语言描述如下：

$$\max(\text{或 } \min)\ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{1-1}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant (=,\geqslant) b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant (=,\geqslant) b_2 \qquad (1\text{-}2) \\ \qquad\qquad \cdots \qquad\qquad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant (=,\geqslant) b_m \\ x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n \geqslant 0 \qquad (1\text{-}3) \end{cases}$$

这就是线性规划的数学模型。方程(1-1)称为目标函数，式(1-2)称为约束条件，式(1-3)称为非负条件。

线性规划的数学模型还可以用比较简洁的紧缩形式、向量形式、矩阵形式来表示。

紧缩形式：

$$\max(\text{或 } \min)\ z = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j \tag{1-4}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant (=,\geqslant) b_i & (i = 1,2,\cdots,m) \\ x_j \geqslant 0 & (j = 1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

向量形式：

$$\max(\text{或 } \min)\ z = CX \tag{1-5}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} P_jx_j \leqslant (=,\geqslant) b \\ X \geqslant 0 \end{cases}$$

式中：$C = (c_1, c_2, \cdots, c_n)$

$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$

$P_j = (a_{1j}, a_{2j}, \cdots, a_{mj})^T$

$b = (b_1, b_2, \cdots, b_m)^T$

0——零向量。

矩阵形式：

$$\max(\text{或 } \min)\ z = CX \tag{1-6}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} AX \leqslant (=,\geqslant) b \\ X \geqslant 0 \end{cases}$$

式中

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

线性规划问题数学模型是描述实际问题的抽象的数学形式，它反映了客观事物数量间的本质规律。要建立一个实际问题的数学模型，我们首先要对实际问题的背景及各方面联系有清晰的了解，掌握全面可靠的统计资料，这样，在考虑影响因素时，可以区别出主要因素，舍去非主要因素。

当然，考虑的因素越多，模型越接近真实，但势必会造成变量、约束条件的增多，从而给求解带来困难。但是，如果考虑的主要因素过少，所建立的模型就不能真实地反映实际情况，计算得出的结果对于决策者也意义不大。

所以建立模型时，我们要抓住最本质的因素，而将不太重要的因素去掉，建立一个简单又比较真实反映实际问题的模型。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com