

算术教学心理学

敏欽斯卡娅 著

孙經灝 吳 倆 張文洸 譯

人 民 教 育 出 版 社

本书論述各年級兒童在學習算術過程中的心理特點和心理規律。作者總結了自己在這方面的多年研究成果，並提出一些值得進一步研究的問題。

· 本书可供我国高等师范学校教育学专业、心理学专业的师生、高等师范学校和师范学校的算术教学法教师，以及心理学、数学法研究人员作参考。

Н · А · Мечинская
ПСИХОЛОГИЯ
ОБУЧЕНИЯ
АРИФМЕТИКЕ
УЧПЕДГИЗ
Москва 1955

本书根据俄罗斯苏维埃联邦社会主义共和国教育出版社 1955 年莫斯科俄文版译出

算术教学心理学

〔苏联〕敏欽斯卡娅 著

孙經灝 吳佩 張文灝譯

北京市书刊出版业营业许可证出字第2号

人民教育出版社出版(北京景山东街)

新华书店北京发行所发行

各地新华书店經售

民族印刷厂印裝

统一书号：2012 · 22 字数：380 千

开本：850 × 1168 毫米 1/32 印张：16 3/4 插页：2

1962年5月第一版

1962年10月第一次印刷

北京：1—3,850 册

定价 1.60 元

目 录

序 言	1
第一章 对外国资产阶级“算术心理学”主要学派的批判	14
第一节 “算术心理学”领域中的行为主义.....	14
第二节 “理解”或“智能”学派.....	29
第三节 格式塔心理学的思想在算术教学心理学上的反映.....	34
第四节 折衷学派.....	37
第二章 在俄罗斯教学法专家和教师著作中的算术教学心理学問題	42
第一节 算术教学的基本原則.....	45
第二节 数概念的发展阶段和算术运算的掌握.....	81
第三节 口算和笔算.....	107
第四节 算术应用題的分类.....	127
第五节 应用題的解答过程.....	147
第六节 学生編拟应用題.....	178
第三章 算术教学心理学問題的研究方法	187
第一节 教学心理学中的方法問題.....	187
第二节 观察法和书面作业研究法.....	189
第三节 不同形式的自然實驗法及其个别方式.....	193
第四节 在實驗中如何利用口头追述的材料.....	200
第四章 学龄前儿童初步数概念的形成途径	204

第五章 計數過程和運算過程的心理學	229
第一节 作为逐一計數和按群計數的基础的联系的 形成	230
第二节 分析过程与概括过程	251
第三节 抽象过程和具体化过程	268
第四节 作为口算和笔算基础的联系的特点。 計算錯誤的分析	285
第六章 解答算术应用題的心理學	311
第一节 简單应用題的解答过程	311
第二节 复合应用題的解答过程	362
第三节 典型应用題的解答过程	403
第四节 高級綜合形式和高級分析形式在解答应用 題时的发展	430
第七章 算术教学过程中学生的个别差異	460
参考文献	521

序　　言

蘇維埃心理学轉向在人的具体活动中研究心理过程（这是在本世紀三十年代实现的），这一事实引起了对数学心理学問題的广泛研討。这方面的研究任务是：闡明在一定的具体条件下学习的規律，同时也要解决在苏維埃学校的教学實踐中所产生的許多迫切需要解决的問題。

本书作者从1929年开始对算术教学心理学問題进行了系統的研究。研究的結果将在这本书中闡述。

在研究苏維埃教学心理学这个部門的时候，必須批判地考察外国和我国科学中在这方面的一切研究。而且首先应当对于以数学心理学問題的著作充斥世界书籍市場的各反动学派的代表們加以批判。如果說以前他們是掩盖自己著作的政治意义，企图表明他們的心理学理論是超政治的，那么現在他們是公开地发表自己的政治意图了。例如桑代克(E. Thorndike)（在美国，人們把他称为“现代教学心理学之父”，事实上也是他創立了外国的“数学心理学”）从前研究过“技巧”这个概念，并把它作为自己的心理学体系的中心，而在二十世紀四十年代，他便从对动物和人的研究轉向对社会关系的研究，这样他就成了一个“社会学家”。桑代克所以提出“技巧”或“习惯”作为心理学的中心概念，他的意图現在已經暴露出来了。他为了說明人类社会存在的規律而采用了“习俗”这个类似的概念。桑代克在他最近的著作中企图证明，习俗也同技巧一样是通过重复巩固起来的；旧习俗的保持可以“使人感到滿足”。在回答誰应当掌握政权这个問題的时候，桑代克写道，“是那

些习惯于支配人和支配金錢的人們”(重点是我加的——作者)。

帝国主义国家的教育心理学的破产，可以用它的一个部門——算术教学心理学——来作为明显的例证。

本书的任务之一，就是要对资本主义国家的“算术心理学”的主要学派加以分析批判。

第一章就是專門討論这个問題的。①

如果要在革命前俄国出版的教育心理学課本和著作中去寻找算术教学心理学問題的材料，那是徒劳无益的。但是，这个問題在我們俄国科学界中也有一段历史。这段历史在研究直接总结俄国学校算术教学經驗的算术教学法的著作时可以得到闡述。随着十九世纪初期首批教学法指南的出現，就产生了关于不仅从一般教育学的任务和数学这门科学的特点出发，而且也从学生的心緒特点出发去創立教学法的必要性的問題。在革命前的教学法指南的作者当中，应当指出一些善于拟定和甚至部分地解决了某些算术教学心理学問題的教学法专家(而首先是于1880年发表《算术教学指南》的作者拉得舍夫 В. Латышев)。教学法专家們通常只是在他們分析学校經驗的限度內自发地闡述了心理学的問題。但是，他們所得到的材料，是有重要价值的。然而如果企图引用(研究抽象心理机能的)傳統心理学的材料来解决具体教学問題，那将是完

① 我們提出的任务并不是对外国心理学家关于算术教学心理学問題的一切著作都加以詳細評論。皮阿杰及其学生們(若安諾等)关于数学思惟問題的著作，我們不加以研討。这些著作不能放在我們所評論的各学派的范围内，而需要專門的研討。法国、瑞士、比利时的心理学家和教師們在巴黎“国际儿童心理学日”(1954年4月)上所作的当前数学教學問題的报告，令人感到极大的兴趣。但巴黎大会上的报告在斯米尔諾夫及本书作者发表在杂志上的几篇論文中已有所闡述。

全沒有益处的(例如在叶夫杜舍夫斯基(B. A. Евтушевский)的教学法指南中就有过这种企图)。

十月社会主义革命以后，算术教学法問題的研究进入了一个性质不同的新阶段。即第一次为教师广泛参加教学法問題的創造性研究創造了条件，第一次有了把教学事业向前推进的可能，如列宁在1921年所指示的，“把地方的經驗推广到全国”(2,第103頁)。

1931年9月5日联共(布)中央在《关于小学和中学的决定》中，給予从事教育研究工作的科学研究机关直接的指示，要它們把工作主要集中在研究和总结学校实际工作者所积累的經驗上(10)。

教学法专家們在科学实践工作中同教师們进行了合作，从简单描述教学經驗的任务过渡到了更高的阶段；这时所提出的任务，已經不仅是描述，而且是用实验方法证明采用某种教学方法和方式的合理性。自然，在这一阶段，教学法专家感到了有利用心理学材料的迫切需要，并且在他們的研究范围内开始逐渐在学生学习算术过程中来研究学生。

本书第二章就是說明俄国教学法专家和教师在算术教学心理問題的研究上作过什么貢献，还有哪些問題沒有得到解决。

近几年来，算术教学心理学与算术教学法紧密地接近起来了。但是这种接近并不意味着这两門科学都失掉了自己的特点和在它們之間消灭了一切界限。首先这两門科学是有不同对象的。教学心理学研究学生掌握算术教材的問題，而教学法的研究对象則是关于教学的目的和方法的問題。如果认为只有心理学才能“論证”各科教学法，这是完全不正确的。在这种場合，論证是相互进行的。既然心理学研究儿童在教学过程中的心理，并根据有組織有目的的教育过程来闡明它的变化，因而它本身也就在各科教学法

中得到了論据。

在现阶段，这两門科学的接近有巨大的原則性意义，因为心理学不是在某种不变的教学条件下、而是在不断变化着的教学条件下、在教学方法和方式的經常改进过程中研究学习的特点的。所以在现阶段，教学法专家与心理学家在研究过程中的友好合作，是促使两門科学发展的最有效的办法。在这里，教学法专家就組織和指导教育学方面的研究，而心理学家則組織和指导对学生的研究。

这里产生一个問題：关于学生掌握算术教材时的特点的心理学材料究竟能在何种程度上决定教育过程的某些变化呢？我们认为，不能只依靠学生的某些学习特点来作出关于选择教学大綱的材料（內容及其順序）的結論。在这种場合，心理学的材料在組織教育过程时不能当作决定性的前提。假定，我們根据心理学的材料可以肯定应用題的某种計算方法或类型对某一年級的学生來說是困难的。但是从这里无论如何也不能作出結論說，应用題的这种方法或类型，必須从該学年的大綱中去掉。在解决关于选择教学大綱材料的問題时，应当考虑所有的全部条件，这一問題的解决首先有賴于采用这种材料是为了什么目的和它对于編制系統的課程的需要程度。如果必須保留这种材料，那么教学法专家就要一面考慮表明教材困难的心理学材料，一面探討他可以用来克服在学生面前所发生的困难的教学方法。

在研討教学方法和闡述教材的方法的問題时，心理学具有显著的重大作用。关于学习特点的心理学材料，在解决最有效的教学方法的問題时，应当起极重要的作用。

为了使心理学能够直接回答教学实践的問題，就必须对教学活动的具体形式加以研究。在算术教学心理学方面，这就必须将

計數和解答應用題的过程加以心理学的分析。

因此本书實驗部分的中心，是由以下两章构成的——即“計數過程和运算過程的心理學”（第五章）和“解答應用題的心理學”（第六章）。为了从根源上探究關於數概念的形成過程，我們引用了对于兒童形成數概念的初步阶段（从一岁到四岁）的觀察作为比較材料；第四章就是闡述這一問題的。

記憶和思惟的問題以及技巧形成的問題，并未作为独立問題划分出来，但无论記憶、思惟或技巧，都已直接包含在本书所研究的学习活动的各种具体形式中了。

发展的思想，即在掌握教材的过程中，从低級阶段循序地过渡到高級阶段的思想，是算术教学心理学的主要研究中心。

列寧在談到認識的发展的时候說，“認識是思維对客体的永远的、沒有止境的接近。自然界在人的思想中的反映，应当了解为不是‘僵死的’，不是‘抽象的’，不是沒有运动的，不是沒有矛盾的，而是处在运动的永恒过程中，处在矛盾的产生和解决的永恒过程中”的。（3，第168頁）

虽然知識是以組成“科学基础”的一定的完整形式有組織地傳递给學生的，但是，列寧关于“思惟对客体的接近”这一原理，对于学生掌握知識的过程仍然是有效的。

知識的掌握，不应当理解为“鏡子般的靜止的活動”，而应当理解为运动的过程和解决矛盾的过程。

本书作者的目的在于以下一观点来闡明計數過程和解答應用題的过程，即在向新的教材过渡时，这些过程一方面是怎樣在教學的各个阶段中复杂化了，另一方面由于用同一材料來作练习而又怎样简单化了。

同时，使我們感兴趣的，不仅是循序漸进的发展路綫，而且是

各种可能的离开这一路線的情况，学生所遇到的困难，以及旧知識（或者它們的应用方法）和新知識发生冲突的具体形式等；此外，使我們感兴趣的，还有那些后来导致知識掌握的更高阶段的“新东西的萌芽”。

在儿童掌握算术过程中对他们进行研究时，我們力图实现斯大林关于辩证法問題所作的指示：“在辩证法看来，最重要的不是現时似乎坚固，但已經开始衰亡的东西，而是正在产生，正在发展的东西，那怕它現时似乎还不坚固，因为在辩证法看来，只有正在产生，正在发展的东西，才是不可战胜的。”（5，第5頁）

为了探討掌握算术过程的基本发展路線，我們要确定用哪些概念来分析所研究的材料和哪些現象是我們应当研究的。

作为本书全部实验研究基础的基本的和中心的概念，就是巴甫洛夫所理解的分析与綜合的概念。巴甫洛夫在《实验廿年》中說，“中樞神經系統高級部分的基本活动，是接通外部現象与各种器官活动之間的新的和暫时的联系，以及有机体将外部世界的复杂現象分解为个别的因素，简单說来，是接通器和分析器的活動。”（130，第一册，第280頁）

除此以外，我們还得到巴甫洛夫这样的直接指示：人的思惟也是一种分析和綜合活动，思惟从联想、从綜合开始，以后則是綜合与分析的結合（128，第585頁）。

巴甫洛夫每次談到教育和教学过程时，总要談到活动的这两方面，他說，“一切訓練、教育、习惯，以及在周圍世界中，在自然界和人們的各种事件中的定向——所有这些，或者归結于新的联系的形成，或者归結于最細致的分析。”（130，第一册，第333頁）

巴甫洛夫关于“暫时联系”的概念，为研究人的心理发展的复杂現象开辟了广闊的远景。巴甫洛夫強調說，人的神經系統是一

种最复杂最精细的仪器。他在他的《条件反射》这篇論文中說，“不需要多加想像就可以立刻知道，人这个最复杂的系統經常實踐着多么多的、簡直是不可胜数的条件反射，它不仅經常处于广闊的一般的自然环境里，而且也經常处在达到全人类的广闊范围的特別的社会环境里。”(130, 第二册, 第 325 頁)

巴甫洛夫預見到会提出关于联系的各种复杂化的問題。例如，在談到怎样严格客观地研究暫时联系这个简单的心理現象时，巴甫洛夫指出，必須研究“它的发生、它的各种各样的复杂化与它的消失的条件”(130, 第二册, 第 322 頁)。

在本书的實驗部分，我們企图证明，学生在掌握算术的过程中所形成的联系如何逐步复杂化起来和在作习題时分析具有哪些不同的形式^①。

斯大林談到語法和几何学的問題时說，“这是人的思惟的长久的抽象活动的結果”(6, 第 24 頁)，这种說法也适合于算术。

当然，学生絕不是立刻就掌握了这样的“結果”，而是在将具体事物加以抽象并开始确定抽象的数量关系以前經過了許多阶段的。

在本书中研究了学生掌握算术时抽象的依次相继的各阶段。

巴甫洛夫闡明了，关于人的抽象和概括是借助于詞（即“第二信号系統”，按巴甫洛夫的說法，它与直接刺激物即現實的“第一信号”系統不同）而发生的这一高級神經活動的新原理；他并且強調

① 大家知道，心理学在很久以前就依靠了分析与綜合的概念，但是这些概念却包含完全另外的涵义。分析与綜合被认为同样地是智慧的活动，而沒有被认为是思惟的两个中心的主导活动，說得更正确些，是一个活动的两个方面；巴甫洛夫學說使我們不能不这样承认。因此，关于分析与綜合，心理学家未能比邏輯學教科书說出更多的东西，是不奇怪的。把綜合理解为联系的形成过程，直到最近以前对于心理学家还是陌生的，这也是不奇怪的。

指出，这些“新的概括化了的信号”又反而受到分析和綜合（130，第二册，第 215 頁）。

在研究抽象和概括过程的时候，必須揭示出这些过程提供着哪些分析和綜合的形式；这也是我們企图在本书的實驗部分所进行的工作。

在学习算术（一种需要高度的抽象形式和概括形式的科学）的时候，关于学生获得的抽象知識同現實、同直观形象的相互联系問題，是一个十分尖銳的問題。

列宁教导我們說，科学的抽象，“都更深刻、更正确、更完全地反映着自然。”（3，第 146 頁）为了使儿童真正掌握科学的抽象（用詞表現出来的），必須使这些抽象在学生丰富的具体經驗中，“在生动的直观”中有牢固的基础。

提出詞与形象在思惟活动中的相互关系問題，是以巴甫洛夫的第一与第二信号系統的相互关系的學說为自然科学基础的。按这一學說，动物在周圍环境中的定向，主要是由于动物有第一信号系統（在有第一信号系統的条件下，少数无条件的外界动因是通过許多其它外界刺激而起信号作用的）所决定的；而人則在这一信号系統以外，又“附加”了另一个信号系統——即第一信号系統通过言語而起的信号作用。巴甫洛夫指出了两个信号系統相互間的密切联系。

巴甫洛夫在一次星期三座談会上說，“必須記住，第二信号系統通过第一信号系統并与第一信号系統相联系才有意义；如果它与第一信号系統脱离，那就会空洞无物，不再在生活中有什么地位。”（129，第 318 頁）如巴甫洛夫所指出的，在成年的健康人，第二信号系統（詞的信号系統）对第一信号系統处于优势的地位，或者如他所形容的，“第二信号系統經常是悄悄地支持着第一信号

系統的”(129, 第 319 頁)。

真正自觉地掌握算术知識，是以两种信号系統的密切的相互作用和第二信号系統对第一信号系統的調節作用为必要条件的。

在我們想用条件反射原理來說明心理活動時，我們同时也談到学生在学习過程中的“积极性”和他們活用教材以及演算变式习題的技能等等。而这两者間是沒有任何矛盾的。

我們发现，謝切諾夫对于有关“条件反射”和“积极性”的原理应用于人的問題，已直接地作了深刻的說明。“但是，誰不知道学会了思惟的人不仅能够获得經驗的因素，而且能够利用它的指示——把它們用在工作上？作为一个思想家，他能够观察和分析事實，将事實与事實加以比較，作出結論，总结分析比較的結果，最后找出現象发生的原因。在这一切場合，人越是一个活动家，現象的整个复合体越能引起活動的思惟。”(154, 第 501 頁)

由此看來，成为“活动家”的，不是思惟本身，而是进行思惟的人；思惟积极性的問題，也应当成为进行思惟的人的积极性的問題。个人积极性在我們社会主义国家的条件下，在向共产主义过渡的阶段，是有特別重大意义的。斯大林在他的《苏联社会主义經濟問題》一书中指出說，苏联学校的任务是培养社会发展的积极活动家。

我們在对儿童的学习活動进行心理分析时，同时进行着两个方面的工作：第一，是研究这种作为对教育影响的規律性应答的活動的种种形式，这使我們能够闡明学习的一般特点；第二，是試圖揭露表現在学生掌握算术過程中的个别差異^①。

① 我們在研究处于同一学习阶段的学生时，就会看到学习的一般規律的各种具体的表現形式，而且这些差別是为学生生活的全部状况及其全部历史所决定的。

学生学习算术的个别差异問題，将在最后一章（第七章）闡述。

研究学习过程中的个别差异，可能有三种途径：或者是按各个人的多种多样的全部特点来描述个别差异；或者是按巴甫洛夫的高级神經活动类型学說来把人归于某一类型（一般人的类型和特殊人的类型）；还有第三种途径也是可能的——即分出主要的个别差异所赖以分类的学习特点。我们认为，在现阶段，第三种途径是比较合理的。只描述个别差异，对于闡明学习的一般規律是益处不大的。

分出如巴甫洛夫所說的、能表明某种高级神經活动类型那样的全部特点，我们认为現在还为时过早。在开始时必須研究学习方面的个别差异所赖以分类的特点，并且用巴甫洛夫据以区分高级神經活动类型的适当指标来論证。

我們并不能用心理学的材料和心理学的方法来闡明巴甫洛夫的类型学說中所包含的一切指标。暫且在现阶段上，区分出两种指标是可能的，这两种指标是：思惟活動的直观成分与詞的抽象的成分的联系（这种联系在表面上好像是依靠于紧密的或“松弛的”、第一与第二信号系統間的联系）和思惟過程的灵活性或易变性（按巴甫洛夫学說，这是在神經過程的易变性的标志中得到支持的）①。

研究这些指标，对于确定学习的一般規律是有直接意义的，因为从一个阶段向另一个較高阶段的过渡，在屬於各种学习类型的学生那里是以不同的方式实现的，而向学习的較高阶段过渡的心理特点，在比較各种学生的学习过程时就能更明显地显露出来。

由此看来，論述掌握計数和解答应用題的各章与闡明学生在学习算术过程中的个别差异的一章是有直接联系的。

① 此外，我們还分出了学习的速度这个指标。这个指标在教学工作中有重要的意义，但是还未被分析过。

在研究教学心理学的問題时，我們采用着各种不同的方法。

最简单的方法就是所謂“分段研究法”。这种方法使我們能够在一小段时间內最完全地揭示出学习过程中所发生的变化。用这种方法可以研究在各学习阶段上（即在各年級——包括一年級到五年級，到五年級算术課程就学完了）的儿童的知識、技能和技巧。这种方法使我們有可能在某种程度上探究儿童心理过程由于学习而得到的发展；不过这只能是在某种程度上，因为我們每次只能在某个一定发展阶段上研究儿童。因而，在这种場合，我們就根据对不同发展阶段的不同儿童所作的静态的验证性实验来判断发展。

利用这种研究方法是否合理呢？对这个问题的回答，应当是肯定的。在开展研究工作的第一阶段，这时需要广泛地了解儿童向更高的学习阶段过渡时心理上所发生的主要变化，所以采用这种方法是可能的而且也是必要的。从1929年起我就采用了“分段研究法”来揭示一至五年級儿童的数概念（整数和分数的概念）是如何改变的以及他們的演算方法是如何改进的等等。

从1936年起，在联共（布）中央作出《关于教育人民委員部系統中的儿童学曲解的决定》以后，教育心理学方面的研究人員的一切努力，是要超出验证性的、实际上也就是静态实验范围，并以由于教育影响而在心理上所发生的变化作为直接的研究对象。这种研究方法的采用，是与所謂“教学实验”的实施相联系的；在这种“教学实验”中，心理学者变成了教育者，他們的实验也与教学过程融合在一起；他們也有可能阐明在实验过程中，学生的思维过程如何在一定教育作用的影响下发生变化的^①。

① 我于1937年发表在《苏維埃教育学》杂志上的一篇論文（105）中，第一次論述了“教学实验”在算术教学心理学方面的应用。

这一“教学的”方法，与验证的“分段研究法”比较起来，是有无可置疑的优越性：第一，它使我们能够直接研究教学对学生心理过程的影响；以种种方式改变着教育作用，我们就可以阐明它如何反映在学习过程中，因此，实验也就有了“改造的力量”。第二，“教学的”方法使我们有更大的可能在教学过程中研究学生的个别差异。根据这种“验证的”实验材料，我们所遇到的是现成的结果（一定程度的知识、技能和技巧）；但这种结果是如何形成的，以及某种程度的知识、技能和技巧是由于学生的什么特点而发生的，这还是没有弄清楚的问题。

最后不能不指出，“教学实验”的重大的原则性意义在于用这种方法获得的材料，显然是容易与巴甫洛夫及其学派所确定的生理事实和规律相对照，因为形成条件反射的方法，不外就是学习。

但是，新的“教学的方法”（就我们所采用的那种形式来说），虽然在改进研究工作的道路上，无疑是前进了一步，但是也还有许多缺点。

最主要的缺点在于心理学家不是在学校工作的通常条件下进行教学的。在这种场合，教学在其可能性上，是受很大的限制的，因为教育过程不能以其全部生动的完备性和足够程度的完善性（在采用最有效的方式的意义上）而展开。想使心理学尽快地去解决苏维埃学校所面临实际课题的这种愿望，就促使着研究者去寻求新的实验方法，并进一步改进“教学实验”的形式。关于吸收教师参加研究工作的必要性的問題已十分迫切地提出来了。教学是与心理学实验结合起来的，然而这是在另一种基础上、以另一种形式结合起来的，即教师在课堂工作的通常条件下改变学习的条件，随后查明各种学习条件给与学生什么影响，同时也要以两种方法——研究个别儿童和举行通常的课堂测验作业——来查明这一

点①。我們把这后一种研究方法称为“心理教育實驗”法，以區別于只以解决教育課題为目的的通常的教育實驗。

近年来，在算术教学心理学的研究中，第三种研究方法占主要地位。在各个問題的研究中都有教師們参加，这在他們为“教育經驗交流会”所写的报告（1949、1950 和 1951 各年份）中可以看得出来。

除實驗法以外，觀察法在研究中也占重要地位，觀察法采取各种形式：在讲授算术新教材的課上对学生进行觀察，或在某个学生生活的一两年內对他进行长期的、有系統的觀察。在課堂上采用觀察的方法以前，經常是先对算术教材进行理論的分析。

关于在研究中采用的方法和方式的問題，在这本书的第三章中有所論述。

在本书中，企图对数学心理学的一个部門——算术教学心理学——作一系統的闡述。同时，作者不仅把自己的任务看做要解决个别的問題，而且要提出許多問題来以便作进一步的研究。

① 參考1939年“初等学校”杂志上的論文“計数中的錯誤和与錯誤作斗争”(106)