怎样应用基本图形分析法添辅助线

徐方瞿

宁夏人民出版社

怎样应用基本图形分析法添辅助线

怎样应用
基本图形分析法
添辅助线

徐 方 瞿

宁夏人民出版社

怎样应用
基本图形分析法
添辅助线
徐方瞿
宁夏人民出版社出版
（银川市解放西街105号）
宁夏新华书店发行　宁夏新华印刷一厂印刷
开本：787×1092 1/32 印张：10　字数：210千
1986年7月第1版第1次印刷
印数：1——12,200册
统一书号：7157·404　定价：1.45元

前　言

本书原是为杨浦区参加上海市和全国中学生数学竞赛的学生进行集训而编写的一份介绍“基本图形分析法”的讲义。由于“基本图形分析法”这种分析方法，较好地解决了几何分析和添辅助线的规律性问题，所以在教学中取得了较好的效果。经上海市教育局教学处、杨浦区教育局和教师进修学院领导的推荐，我先后在本市各区县以及江苏、浙江等省作了介绍这种分析方法的报告六百余次，近一千八百课时。两年来，“基本图形分析法”得到了许多数学教师的支持、肯定和重视，许多有丰富经验的教师提出了各种问题，提供了各种资料和他们的教学经验与体会。正是在这样的过程中，“基本图形分析法”才逐步得到发展并形成较完整的体系。也正是本市和外地许多教师的鼓励和期望，激励我克服困难，完成了本书的写作工作。借此机会，谨向上海市教育局教学处、杨浦区教育局和教师进修学院领导以及关心、支持本书的写作，并给予热情帮助的老师们致以深切的谢意！

我的老师——上海师范学院杨荣祥先生对本书的写作给予了多方面的指导和帮助，并在百忙中审阅了本书的初稿，谨此致谢！

由于笔者水平所限，书中缺点和错误在所难免，望广大读者给予批评指正。

编　者　1983年2月

绪　论

本书的编写目的是为了比较系统地讨论和叙述平面几何中添辅助线的规律。

平面几何是研究平面上几何图形的性质（形状、位置、大小关系等）的数学学科。对于添辅助线的规律的认识和讨论，显然要建立在对于平面图形及其性质的正确认识的基础上。

平面图形可以通过各种不同图形的不同组合而发生无穷的变化，但只要我们对任一几何图形加以分析，都一定可以发现，它们都是由一个或者若干个最简单最基本的图形（我们就将这些图形叫做基本图形）组合而成。因此，对一个几何问题，我们可以根据它的条件和结论，分析和找到组成它的一个或若干个基本图形，并应用这些基本图形的性质，使问题得到解决。这样一种分析方法就称为基本图形分析法。

对于一个几何图形，如果分析后得到的组成它的各个基本图形都是完整的，那末在应用这些图形的性质来解决问题时就不会发生什么问题，这时也就不存在添辅助线的问题。但如果在分析后得到的基本图形中有一个或几个是不完整的，那末在应用这些基本图形的性质以前就必须先将这一个或几个基本图形添全。所以添辅助线的目的是为了将不完整

的基本图形补全，以使基本图形的性质能得到应用而完成证明。从而可得到应用基本图形分析法添辅助线的一般方法：

根据问题的条件和结论，经过分析，如果得到的基本图形不完整，那就添加辅助线将基本图形补全。这是添辅助线的基本分析方法。

在几何问题中，除了应用基本分析方法添辅助线外，还有两种辅助性的添线方法：

1.根据线段或角的和差、倍分的定义进行添线。如在几何问题中出现两条线段之间的和（差），那末可将这两条线段接起来，证明所得线段与和线段相等；或者在和线段上截取一条线段和其中一条线段相等，而证明余下的线段与另一条线段相等。而在出现两条线段之间的倍分关系时（如2倍），则可在取长线段的中点后证明它的一半与另一条线段相等。也可在将短线段延长一倍后证明所得线段与另一条线段相等。

2.根据图形的位置变换进行添线。在几何问题中，如果两个角处于不易建立等量关系的位置时，就可以将角改变位置。在平面几何中，将角改变位置的基本方法是平移和旋转（对称的变换在全等三角形的分类中解决）。由于角的旋转一般都会和圆发生联系，所以当要改变位置的角与圆（圆内接四边形）有联系时，首先进行旋转；而与圆无联系时，首先进行平移。

需要指出的是这两种方法都只是辅助性的添线方法。一个几何问题即使采用了辅助性的添线方法，最后也总是要归结到基本图形的完整性及其性质的应用上来，所以辅助性的添线方法应和基本分析方法结合起来应用，才能比较完整而

正确地揭示添辅助线的规律性。

当你看完本书的时候，你一定会发现平面几何的学习、几何中的添辅助线同世界上的任何一门科学一样，都是有规律的，而且这种规律性是可以认识和掌握的。当你掌握了这些规律，学会了正确的分析方法，具备了一定的分析能力，再去研究新的几何问题时，你一定会发现这些新的问题也一定是可以迎刃而解的。

目　录

一、平 行 线

基本图形

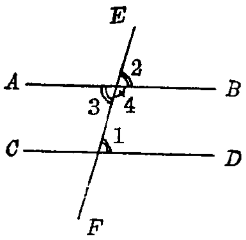

图 1

判定方法

（1）如果 $\angle 1=\angle 2$，那末$AB\parallel CD$。

（2）如果$\angle 1=\angle 3$，那末$AB\parallel CD$。

（3）如果$\angle 1+\angle 4=180°$，那末$AB\parallel CD$

基本性质

（1）如果$AB\parallel CD$，那末$\angle 1=\angle 2$。

（2）如果$AB\parallel CD$，那末$\angle 1=\angle 3$。

（3）如果$AB\parallel CD$，那末$\angle 1+\angle 4=180°$。

几何问题中，如果出现平行线的判定问题或平行线性质的应用问题，则可应用平行线的基本图形的性质来进行证明。应用时要注意抓住第三条直线。

例 1　已知：四边形$ABCD$中，$AB\parallel DC$，$BC\parallel AD$（图 2）．

求证：$\angle B=\angle D$．

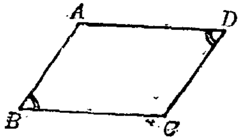

图　2

分析：本题条件中出现了两组平行线，所以是平行线性质的应用问题，从而就要应用平行线的基本图形的性质进行证明．由于在四边形中，每一组对边既可以被另一组对边所截，也可以被对角线所截，因此另两条边和对角线都可以取作第三条直线，这样就产生了证明结论的多种可能性．下面将各种可能情况分别加以讨论：

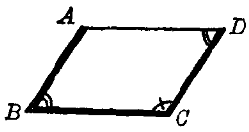

图　3

若取边BC为截平行线AB、DC的第三条直线（图 3），则可得$\angle B+\angle C=180°$，同理可证得$\angle D+\angle C=180°$，所以$\angle B=\angle D$可以证明．

若取对角线BD为截两组平行线的第三条直线，则由于图形中没有第三条直线，因此应先将第三条直线添上．即连结BD（图 4），可得$\angle ABD=\angle CDB$、$\angle CBD=\angle ADB$，从而也可以证明结论．

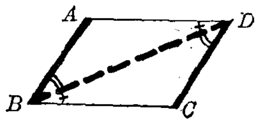

图　4

若取对角线AC为截两组平行线的第三条直线，则由于图形中没有第三条直线，因此应先将第三条直线添上．即连结AC（图 5），可得$\angle BAC$

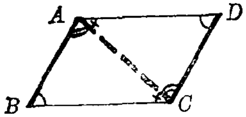

图 5

$=\angle DCA$、$\angle DAC=\angle BCA$。再应用三角形内角和定理也可以证明结论。

若取BC为截平行线AB、DC的第三条直线，那末也可以应用平行线的性质定理进行证明。但这时基本图形是不完整的，故应将平行线的基本图形添全，即延长BC到E，得$\angle B=\angle DCE$和$\angle D=\angle DCE$（图6），从而也可以证明结论。

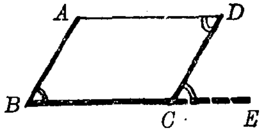

图 6

例2 已知：$AB\parallel CD$（图7）。

求证：$\angle B+\angle D+\angle E=360°$。

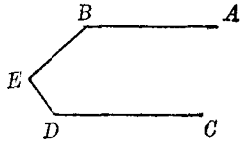

图 7

分析：本题条件中出现了一组平行线（$AB\parallel CD$），所以就可以应用平行线的基本图形进行证明。但在已知图形中，直接与平行线AB、CD相交的第三条直线是没有的，所以要将第三条直线添上。由于直线AB、CD可能被各种不同位置的第三条直线所截，所以也出现了证明结论和添辅助线的多种可能情况：

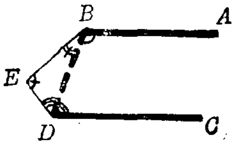

图 8

若将AB、CD看作被BD所截，则由于图形中没有第三条直线，所以应先将第三条直线添上，即连结BD（图8）。

由$AB \parallel CD$，可得$\angle ABD + \angle CDB = 180°$，而$\angle DBE + \angle E + \angle BDE = 180°$，所以结论就可以证明。

若取BE（或DE）为截平行线AB、CD的第三条直线，则由于BE和CD尚未相交，基本图形不完整，所以在应用基本图形的性质以前必须先将基本图形添全，即一定要使BE和CD相交。于是延长BE且与CD的延长线相交于F，得$\angle B + \angle F = 180°$（图9）。再通过$\angle BED + \angle FED = \angle CDE + \angle FDE = 180°$和$\angle DEF + \angle F + \angle FDE = 180°$也可证明结论。

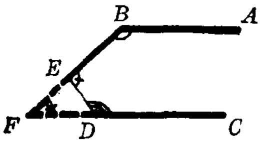

图 9

若取过D的任一与AB、CD相交的直线为第三条直线，那末同样应先将第三条直线添上。即过D作一直线，分别交AB和EB的延长线于F、G（图10），于是由$\angle AFD + \angle CDF = 180°$、$\angle GDE + \angle G + \angle E = 180°$和$\angle ABE = \angle G + \angle GFB = \angle G + \angle AFD$也可以证明结论。

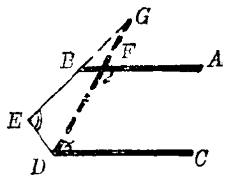

图 10

对于任作一条直线与AB、CD相交的情况，可以用类似的方法进行证明，这里就不再详述（图11）。

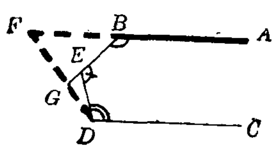

图 11

若取BE为截一组平行线的第三条直线，那末由BE与

AB相交，可知还缺少一条过E点的AB的平行线，所以在应用基本图形的性质以前必须先将基本图形添全，即过E作$EF\parallel BA$（图12），从而由$\angle B+\angle BEF=180°$和$\angle D+\angle DEF=180°$就可以完成证明。

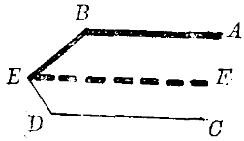

图 12

例3 已知：直线MN与$\odot O$相切于A，BC是弦，$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$（图13）。

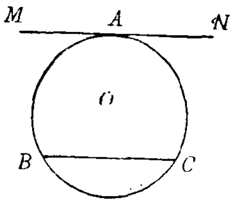

图 13

求证：$MN\parallel BC$。

分析：结论$MN\parallel BC$的证明，是两条平行线的判定问题，从而可应用平行线的基本图形的性质进行证明。但已知图形中没有与MN、BC相交的第三条直线，所以应将第三条直线添上。再由直线MN与$\odot O$相切于A，进而想到，在几何问题中，出现切线就要应用弦切角的性质。同样在已知图形中没有弦切角，所以又应将弦切角添上，这样就可以连结AC（图14）。于是AC也就成为与MN、BC相交的第三条直线，从而只要证明$\angle NAC=\angle C$。因由$\angle NAC=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC}$的度数和$\angle C=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AB}$的度数，可得$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$，所以结论可以证明。

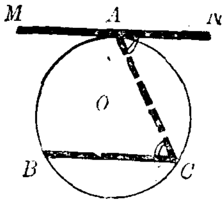

图 14

例4 已知：⊙O、⊙O'外切于P，AB、CD分别是⊙O、⊙O'的直径，且$AB\parallel CD$（图15）。

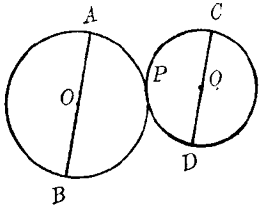

图 15

求证：A、P、D和B、P、C共线。

分析：要证A、P、D共线，应先将A、P、D分两次连结起来，即连结AP、DP（图16）。因为$AB\parallel CD$，所以这是一个平行线性质的应用问题，从而也要应用平行线的基本图形的性质进行证明，也就是要抓住与AB、CD皆相交的第三条直线。由于A、P、D共线是要证明的结论，所以APD就不能作为第三条直线，同样BPC也不能作为第三条直线，从而要想应用平行线的基本图形进行证明，就必须先将第三条直线添上。由于⊙O和⊙O'外切于P，所以应用两圆外切的性质，可得连结OO'后，OO'必经过P点，从而OO'就可以成为与AB、CD相交的第三条直线，这样$\angle AOP=\angle DO'P$。而要证明A、P、D共线，只须证明$\angle APO=\angle DPO'$。由$OA=OP$、$O'D=O'P$、$\angle APO=\frac{1}{2}(180°-\angle AOP)$和$\angle DPO'=\frac{1}{2}(180°-\angle DO'P)$就可以证明结论。

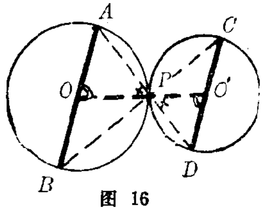

图 16

例5 已知：$\triangle ABC$中，BD、CE是角平分线，$AF\perp CE$、$AG\perp BD$，垂足分别是F、G（图17）。

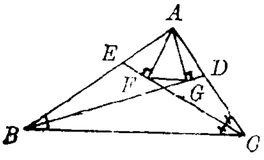

图 17

求证：$FG \parallel BC$。

分析：因证明$FG \parallel BC$，是两条平行线的判定问题，从而可以应用平行线的基本图形的性质进行证明．由FG、BC被BD（或CE）所截，可知只要证明$\angle 1 = \angle 2$（图18）．但由于$\angle 1$的顶点在$\triangle ABC$的内部，不容易和$\angle 2$发生联系，所以$\angle 1$、$\angle 2$处于不易建立等量关系的位置．而在几何问题中，如果两个角（或两条线段）处于不易建立数量（或等量）关系的位置时，就可以考虑将角（或线段）改变位置．而改变角（或线段）的位置的基本方法有两种：平移和旋转．当被改变位置的角（或线段）与圆有关的时候，首先考虑旋转；当被改变位置的角（或线段）与圆无直接关系的时候，首先考虑平移．

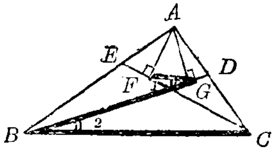

图 18

由条件$\angle AFI = \angle AGI = 90°$，可得$A$、$F$、$I$、$G$四点共圆，所以$\angle 1$是一个与圆有关的角，于是应考虑利用圆内接四边形将$\angle 1$进行旋转，从而应将圆内接四边形的基本图形添全（即连结AI），可得$\angle 1 = \angle 3$，这样问题转化成为要证明$\angle 2 = \angle 3$（图19）．由于BD、CE是角平分线，所以I是$\triangle ABC$的内心，AI就成为$\angle BAC$的平分线，这样$\angle 2$是$\frac{1}{2}\angle B$，$\angle 3$就成为$\frac{1}{2}\angle A$的一部分，应用三角形的半内角的性质，得$\angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = 90°$，从而应证明的结论$\angle 2 = \angle 3$就可以转化为要证明$2\angle 2 + \angle 4 + \angle 5 = 90°$．而利用$\triangle BEC$的外角的性质，可得$2\angle 2 + \angle 5 = \angle AEF$，从而只要证明$\angle AEF + \angle 4 = 90°$．由条件$AF \perp CE$，这个性质是可以证明的．

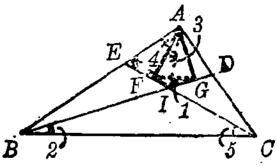

图 19

二、等 腰 三 角 形

等腰三角形是三角形中最常见的一种特殊三角形，它的性质在几何证题与几何计算中有广泛的应用。常见的等腰三角形的基本图形有以下几种：

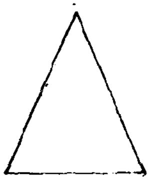

图 20

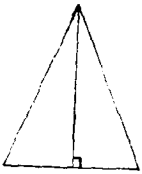

图 21

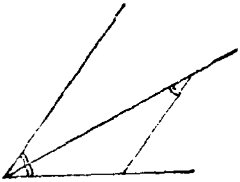

图 22

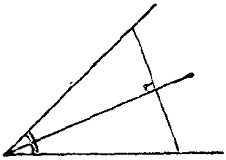

图 23

等腰三角形（一）

基本图形

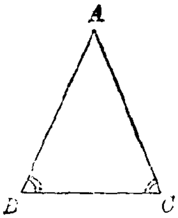

图 24

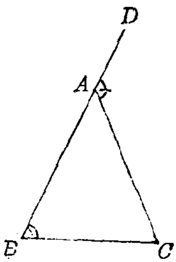

图 25