

SHUXUE ZHIGUANTU HUAFU SHUXUE ZHIGUANTU HUAFU



数学直观图画法

数学直观图画法

Shuxue Zhiguantu Huafa

王守理 编著
杨德济

辽宁人民出版社出版 辽宁省新华书店发行
(沈阳市南京街6段1里2号) 沈阳新华印刷厂印刷

字数: 140,000 开本: 787×1092 $\frac{1}{4}$ 印张: 6 $\frac{1}{2}$ 插页: 2

印数: 1—11,000

1985年8月第1版

1985年8月第1次印刷

责任编辑: 俞晓群

封面设计: 秦东辉

统一书号: 7090·334

定价: 0.88 元

前 言

德国数学家D·希尔伯特 (D·Hilbert) 说：“……直观在几何中起的作用却是更大，过去如此，现在还是如此。具体的直观不仅对于研究工作有巨大的价值，对于理解和欣赏几何中的研究结果也是这样。”

数学中的直观图有较强的立体感，对于较复杂的空间几何关系，它能够明确、清晰地用直观形象表达出来；它作为教学的语言工具，能帮助人们理解概念，发展空间想象力，交流思想和探索新的教学问题。

在平面（纸或黑板）上正确、合理地绘制几何形体的直观图，是数学学习中一个十分重要的环节。在学习立体几何、空间解析几何和高等数学的过程中，往往因缺乏对空间几何关系的想象力、不会画直观图，而感到学习困难。本书正是根据这一实际需要编写的。

书中首先介绍直观图画法的基础知识；然后分别结合立体几何、空间解析几何和高等数学的有关内容，介绍了空间直线和平面的位置关系、几何体及其截交线、二次曲线、较复杂空间区域简图的直观图画法，以及直观图的润饰和直观草图的画法等；最后进一步阐述了绘制直观图的有关理论问题。

本书是在辽宁师范大学梁宗巨教授、王鸿钧教授、佟雨

袁副教授的热心指导下完成的，郭士骥、陈志恒同志对初稿提出了不少宝贵意见，在此一并致谢。

由于编者水平有限，不足之处恳请读者批评指正。

编者

一九八四年七月于大连

目 录

第一章 基础知识	1
第一节 直观图的概念	1
第二节 投影的基础知识	5
第三节 轴测图的形成	8
第四节 轴向变形系数	10
第五节 常见的轴测图	11
第二章 点、直线和平面的直观图	16
第一节 点	16
第二节 直线	21
第三节 平面	26
第四节 根据方程画直观图	37
第三章 空间平面、直线位置关系的直观图	46
第一节 平面与平面的位置关系	46
第二节 直线与平面的位置关系	51
第三节 直线与直线的位置关系	53
第四节 根据方程画直观图	56
第四章 几何体的直观图	64
第一节 平面立体	64
第二节 多面体的截断面	76
第三节 曲面立体	85
第四节 曲面立体的截断	103
第五章 二次曲线和二次柱面的直观图	108

第一节	二次曲线	103
第二节	二次柱面	120
第六章	二次曲面的直观图	127
第一节	二次曲面的画图步骤	127
第二节	二次曲面画图举例	129
第三节	直纹面的直母线画法	147
第七章	空间区域简图	155
第一节	投影柱面	155
第二节	曲面交线	158
第三节	空间区域简图	166
第八章	直观图的润饰和直观草图	177
第一节	直观图的润饰	177
第二节	直观草图	181
第九章	画直观图的几个理论问题	191
第一节	轴测投影的基本定理	191
第二节	轴向变形系数和轴间角的计算	194
第三节	直观图的完整性	201

第一章 基础知识

第一节 直观图的概念

一、什么是直观图

直观图，也叫立体图，是具有立体感的一种图形。直观图可分为两大类：轴测图和透视图。图1·1—(1)是轴测图，图1·1—(2)是透视图。它们都来源于绘画。绘画的历史，可以追溯到远古时代。轴测图在世界数学史上出现得比较

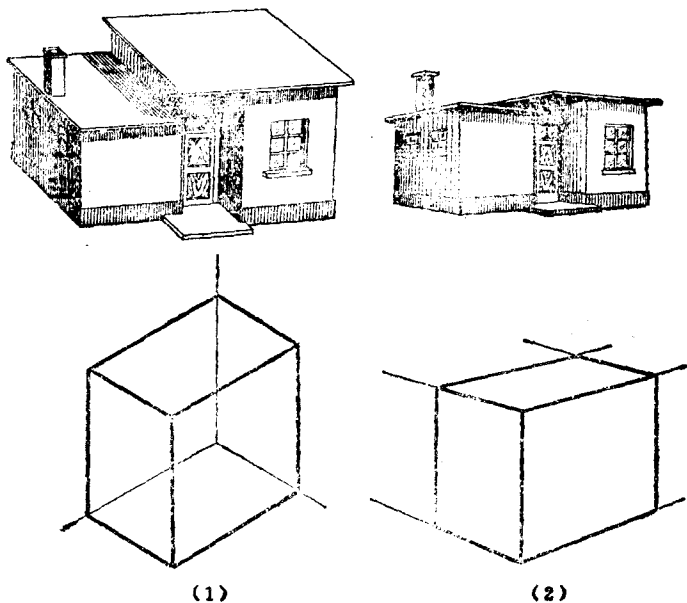


图1·1

早，在欧几里得的《几何原本》里可以看到古希腊人画的轴测图。轴测图在我国也有悠久的历史。我国山东嘉祥武梁祠的石刻、沂南的汉墓石刻以及四川成都羊子山出土的汉画像砖等，它们都广泛地应用了轴测图。因为画轴测图时，首先要在画面上决定物体的长、宽、高三度方向的轴线，然后顺着这些轴线测量尺寸、定点、画线完成全图，所以古希腊人用希腊文的“轴”和“测”二字连在一起，称呼它为“轴测图”；我国古代把轴测图叫做“界画”。现在的名称是由希腊文译来的。

二、四种投影图

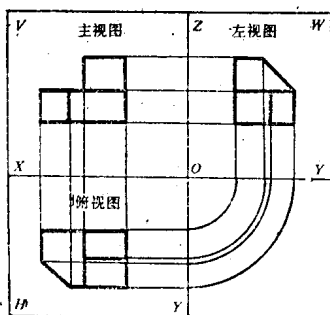
立体几何研究的对象是欧氏空间内的几何图形。这种图形也叫空间图形。空间图形作图，就是把所研究的空间图形的投影形象画在平面上。

在平面上画出空间图形的投影形象，从几何画法上来看，方法是很多的。在不同的科技部门，对不同类型的空间形式，都有适合各自特点的画图方法。人们从视觉出发，要求画出的图形逼真、直观；从工业生产出发，要求便于度量和制造；从节约时间出发，要求作图简便；而在数学中，则要求能直观地表示几何元素的相对位置。人们从符合上述要求的图中，选出了四种比较适用的投影图，这就是轴测投影图、透视图、正投影图和标高投影图。

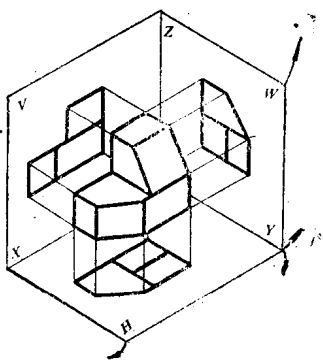
1. 正投影图

正投影图，是把空间形体向两个或更多个相互垂直的平面分别作垂直投影，然后将互相垂直的平面展平在一个平面上所得到的图形（图1·2）。由正投影图完全可以确定空间形体的形状和大小，这种图的作图方法比较简便，符合工业

生产的要求，所以在工程制图中被广泛应用。但是这种图的直观性很差，因此在数学领域中很少用。



(1)



(2)

图 1·2

2. 透视图

透视图，是根据中心投影法以一个点或两个点作为投影中心，把空间形体投影到一个平面上所得到的图形（图 1·1—(2)）。由透视图完全可以显示出空间形体的直观形象，所以在绘画和建筑艺术中被广泛应用。但是这种图的作图方法比较复杂，又不容易度量，因此在数学中很少用。

3. 标高投影图

标高投影图，是用平行投影的方法按一个垂直的方向把空间形体投影到一个平面上，用在这个平面上的垂直投影表示形体的形状，用数字标出相同高度的位置线所得到的图形（图 1·3）。由标高投影图完全可以确定形体的形状和各部分的高度，所以在表达地形和不规则曲面时被广泛应用。但是这种图的直观性差，因此在数学中也很少用。

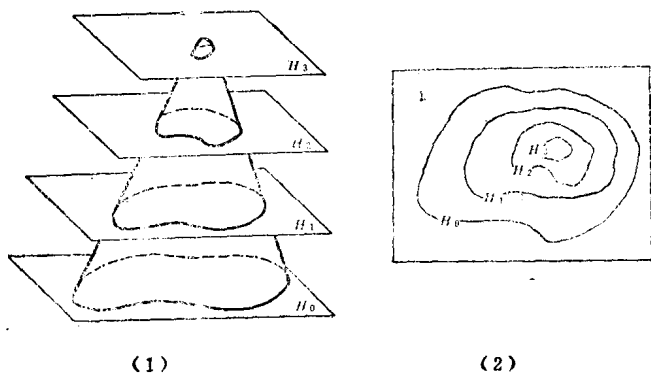


图 1·3

4. 轴测投影图

轴测投影图，是用平行投影的方法，按一个投影方向，把空间形体连同它的空间直角坐标系 (O_1, X_1, Y_1, Z_1) 一起投影到一个平面 (π) 上所得到的图形 (图 1·4)。由轴测图完全可以确定形体的形状和大小，它是介于透视图和正投影图之间的一种图形。由于轴测图立体感比较强，作图方法容易掌握，又可以度量，所以数学中的直观图都是采用轴测图。轴测图作为一种辅助图样在工业生产中被广泛应用。

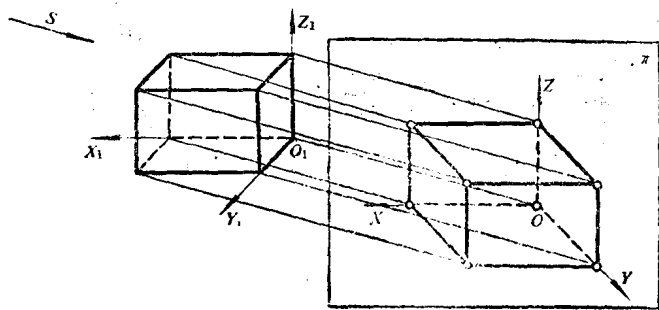


图 1·4

本书所谈到的直观图，凡是不做注明的，都是指轴测图。

第二节 投影的基础知识

一、投影的概念

我们先从常见的生活实例谈起。把物体放在灯光或阳光下，就会在墙上或地面上看到它的影子，形成了投影现象（图1·5）。我们把物体的影子叫做它的**投影**，光线叫做**投影线**，接受投影的平面叫做**投影面**。

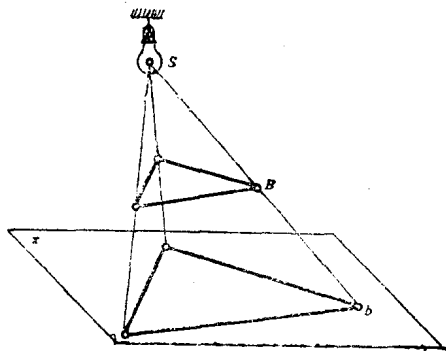


图 1·5

简单地说，过空间物体上的一点的投影线与投影面的交点叫做这点在投影面上的投影。如图1·5中的点 B ，投影线 SB 与投影面 π 的交点 b ，就是空间点 B 在平面 π 上的投影。

投影方法可以分成中心投影法和平行投影法两大类。如图1·5，当灯的光线看作由一点发出时，这种投影线集中于

一个点的投影方法，叫做中心投影法。投影线的集中点 S 叫做投影中心。

太阳射向地面的光线可以看作是互相平行的，这种投影线互相平行的投影方法，叫做平行投影法，投影线的方向 S 叫做投影方向，如图 1·6 所示。显然，同一物体在同一投影面上的平行投影与投影方向密切相关，也就是说投影方向不同时，所得到的投影一般也不相同。

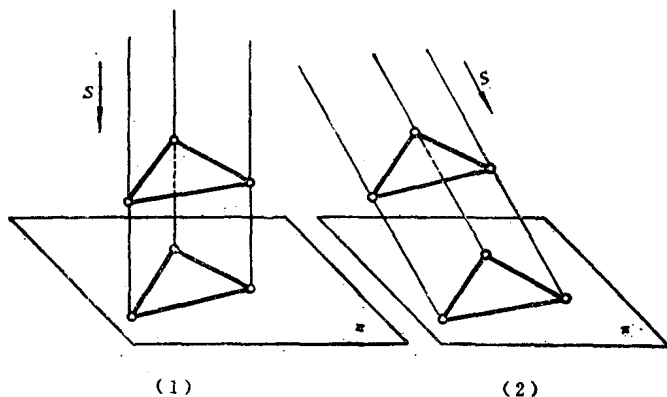
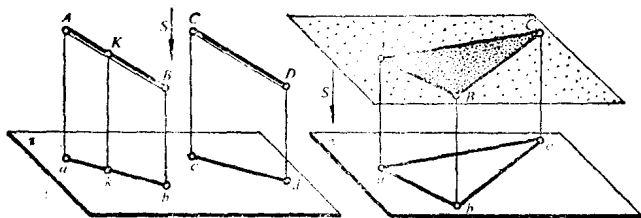


图 1·6

按照投影线与投影面的角度不同，平行投影法又可分为正投影法和斜投影法。当投影线与投影面垂直时叫做正投影法（图 1·6—（1）），当投影线与投影面斜交时叫做斜投影法（图 1·6—（2））。

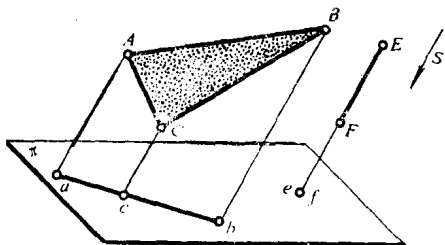
二、平行投影的基本性质

1. 平行线段的投影仍平行；平行线段的比等于它们投影线段的比。如图 1·7—（1），若 $AB \parallel CD$ ，则 $ab \parallel cd$ ， $AB:CD = ab:cd$ 。



(1)

(2)



(3)

图 1·7

2. 点在直线上，则该点的投影在该直线的投影上；点把线段分成两段，两段线段的比等于其投影线段的比。如图 1·7—(1)，点 K 在 AB 上，则 k 在 ab 上；并且 $AK:KB = ak:kb$ 。

3. 平行于投影面的任何线段或平面图形其投影反映真形。如图 1·7—(2)， $\triangle ABC \parallel \pi$ ，则 $\triangle ABC \cong \triangle abc$ 。

4. 当直线与投影方向平行时，其投影积聚成一点；当平面与投影方向平行时，其投影积聚成一条直线。如图 1·7—(3)， $EF \parallel$ 投影方向 S ，则其投影积聚成一点 ($e \equiv f$)， $\triangle ABC \parallel$ 投影方向 S ，则其投影积聚成一条线段 (ab)。

第三节 轴测图的形成

利用平行投影的方法,在投影面上表示物体的立体形象,不仅与投影方向有关,而且还与物体相对于投影面的位置有关。下面我们以带有坐标架的立方体为例来说明轴测投影图

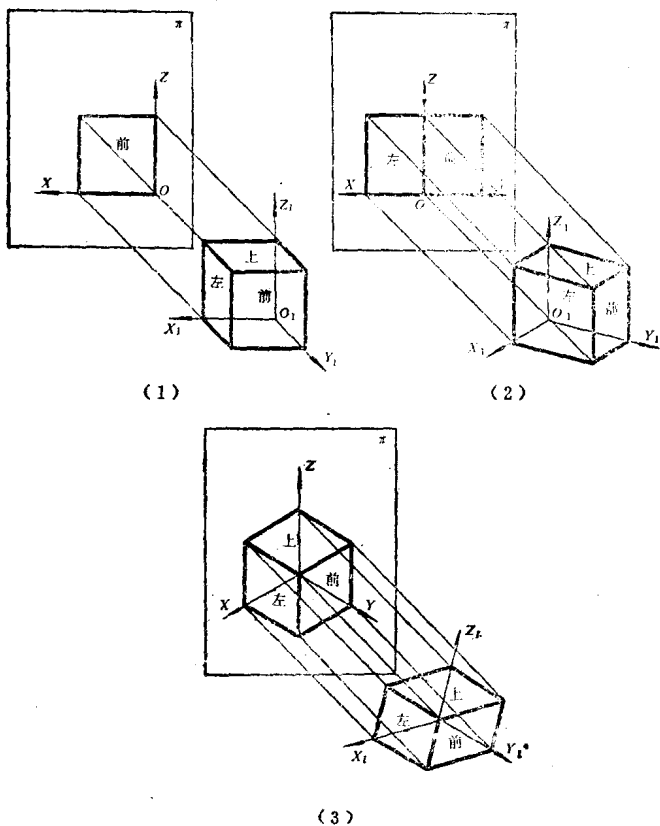


图 1·8

的形成。如图 1·8—(1)，将立方体置于投影面前方，使一个面，如“前”面平行于投影面，这时在投影面上的投影只能反映出立方体“前”面的形状，这样得到的投影图没有立体感。图 1·8—(2) 是将立方体再水平转过一个角度，这时投影面上的投影虽然能够同时反映出“前”面和“左”面两个面的形状，但仍缺乏立体感。而图 1·8—(3) 是把立方体再向前倾斜一个角度，形成具有立体感的轴测图形，在图上能够同时看到立方体的“前”面、“左”面和“上”面三个面的形状。

由上述轴测图的形成过程可以看出，将形体连同确定形体在空间的相对位置的直角坐标系一起，用平行投影法向一个投影面投影所得到的投影图，就是空间形体的轴测投影图。轴测投影图简称为轴测图或直观图。坐标轴 O_1X_1 、 O_1Y_1 和 O_1Z_1 在投影面上的轴测投影 OX 、 OY 和 OZ ，叫做轴测坐

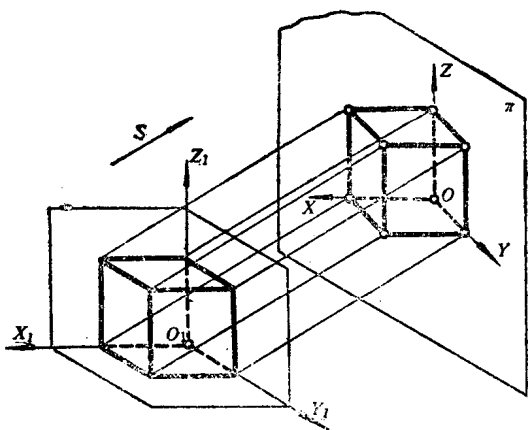


图 1·9

标轴，简称轴测轴；三个轴测轴两两之间的夹角 $\angle XOY$ 、 $\angle XOZ$ 和 $\angle YOZ$ 叫做轴间角（图 1·9）。

第四节 轴向变形系数

虽然轴测图具有较强的立体感，但在一般情况下，物体经轴测投影后会产生某些变形。如立方体的各个面本是正方形，在其轴测图上却变成了平行四边形，这是由于空间直角坐标系的坐标轴与投影面倾斜的缘故。我们把轴测轴上的线段与原坐标轴上线段的比，叫做轴向变形系数。如图 1·10，设 u_i 为空间直角坐标系 $\{O_i, X_i, Y_i, Z_i\}$ (*) 中各坐标轴 $O_i X_i$ 、

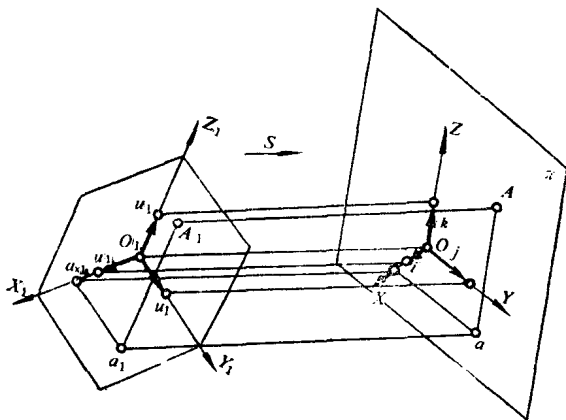


图 1·10

〔*〕在画法几何中常用 $\{O; X, Y, Z\}$ 表示空间直角坐标系，用 $\{O_i; X_i, Y_i, Z_i\}$ 表示轴测坐标系，本书为使直观图与数学符号直接对应，用了相反表示。

O_1Y_1 和 O_1Z_1 上的单位线段, i 、 j 和 k 为 u_1 在轴测轴 OX 、 OY 和 OZ 上的投影线段, 则:

$$\frac{i}{u} = p \text{ 称为} X \text{轴的轴向变形系数;}$$

$$\frac{j}{u} = q \text{ 称为} Y \text{轴的轴向变形系数;}$$

$$\frac{k}{u} = r \text{ 称为} Z \text{轴的轴向变形系数.}$$

如果确定了 OX 、 OY 和 OZ 各轴的轴向变形系数 p 、 q 、 r 和三条轴 OX 、 OY 、 OZ 两两之间夹成的轴间角 $\angle XOY$ 、 $\angle XOZ$ 和 $\angle YOZ$ 的大小, 那么给出空间一点 $A_1(X_1, Y_1, Z_1)$, 点 A_1 的轴测投影图 A 就可以画出(图1·10)。而且随着轴向变形系数和轴间角的不同, 可以得到各种不同的轴测投影。因此, 轴向变形系数和轴间角是画轴测图的两个主要依据。

轴测图是平行投影的结果, 它具有平行投影的基本性质。因此, 几何体上平行于轴的线段长乘以相应轴的变形系数, 就得到它的投影线段的长度; 平行于轴测轴的投影线段长度除以相应轴的变形系数, 就得到原线段的实长。这就是说, 在轴测图中沿轴的方向是可以度量的。

第五节 常见的轴测图

一、三种常见的轴测图

在画图时, 为使轴测图有较强的立体感和作图简便, 国家标准中推荐采用正等测、正二测和斜二测三种轴测图。