应用概率统计

Yingyong Gailü Tongji

吴传志 杨秀文 林 琼 许川容 编

重庆大学出版社

应用概率统计

吴传志　杨秀文　林　琼　许川容　编

重庆大学出版社

内容提要

全书共9章。主要介绍随机事件与概率、随机变量及其概率分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定理和中心极限定理、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析。本书叙述详细、结构合理、例题较多,书末附有习题解答,便于教学。

本书可作为高等院校工程本科教育、专科教育、高等职业技术教育、成人教育概率与数理统计课程的教材,也可供其他各类技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

应用概率统计/吴传志等编. —重庆:重庆大学出版社,2003.8

ISBN 7-5624-2818-2

Ⅰ.应… Ⅱ.吴… Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第054911号

应用概率统计

吴传志 杨秀文 林 琼 许川容 编

责任编辑:曾显跃 版式设计:曾显跃

责任校对:廖应碧 责任印制:秦 梅

*

重庆大学出版社出版发行

出版人:张鸽盛

社址:重庆市沙坪坝正街174号重庆大学(A区)内

邮编:400030

电话:(023) 65102378 65105781

传真:(023) 65103686 65105565

网址:http://www.cqup.com.cn

邮箱:fxk@cqup.com.cn (市场营销部)

全国新华书店经销

重庆大学建大印刷厂印刷

*

开本:787×1092 1/16 印张:13.5 字数:336千

2003年8月第1版 2003年8月第1次印刷

印数:1—4 000

ISBN 7-5624-2818-2/O·220 定价:17.00元

前言

本书是根据高等学校工科数学课程指导委员会审定的《概率与数理统计课程基本要求》编写的，可作为高等院校工程本科教育、专科教育、高等职业技术教育、成人教育概率与数理统计课程的教材，也可供其他各类技术人员参考。

本书力求在结构体系、内容安排、习题选择等方面既要以基本概念、基本理论为主线，又要时时穿插应用案例，努力使学生了解概率与数理统计的思想、理论及方法，培养学生运用概率统计的方法分析和解决实际问题的能力。

本书分两部分。概率论部分（第 1 章至第 5 章）作为基础知识，是全书的重点；数理统计部分（第 6 章至第 9 章）介绍了统计的基本内容。书中注有“ * ”号的内容只对本科生要求。

参与本书编写的有吴传志、杨秀文、林琼、许川容。全书由吴传志统稿。

本书由后勤工程学院数学教研室主任严尚安教授主审，参与审稿的还有重庆大学何良材教授，他们提出了许多宝贵意见，对此，我们表示衷心的感谢！

由于我们水平有限，书中难免存在不少缺点和错误，希望读者批评指正。

编者

2003 年 4 月

目录

第1章 随机事件与概率

1.1 随机事件

1.1.1 随机试验与随机事件

(1)随机现象

自然现象和社会现象是多种多样的. 有一类现象,在一定条件下必然发生(或必然不发生),如同性电荷相斥,异性电荷相吸;在标准大气压下,温度达到100℃的纯水必然沸腾;从地球上看,太阳每天从东方升起等等. 这种在保持条件不变的情况下,重复实验或观察,其结果总是确定的现象称为**确定性现象**. 过去学过的数学就是研究这类现象的. 还有一类现象,在保持条件不变的情况下,重复实验或观察,或出现这种结果,或出现那种结果,这一类现象称为**随机现象**. 如掷一枚质地均匀的骰子,观察出现的点数;抛一枚质地均匀的硬币,观察出现的正反面;同一门炮向同一目标射击,观察弹着点的位置等.

人们经过长期实践并深入研究发现,对于上述这类现象,虽然就每次实验或观察而言,其结果具有不确定性,但在大量重复实验和观察下,其结果就呈现出某种规律性. 如抛一枚质地均匀的硬币,尽管事先无法知道哪一面向上,但是当抛硬币的次数相当多时,出现正面和反面的比例约为1∶1;查看各国人口统计资料,发现新生婴儿中男女各占约一半等. 随机现象所呈现的这种规律性称为随机现象的统计规律性. 概率与数理统计就是研究和揭示随机现象的统计规律性的一门数学学科.

概率统计的理论和方法应用非常广泛,几乎遍及所有科学技术领域. 例如,使用概率统计的方法可以进行气象预报、水文预报、地震预报以及产品的抽样检验等.

(2)随机试验

在一定条件下,对自然现象和社会现象进行的实验或观察,称为**试验**,常用E表示.

例1.1 将一枚质地均匀的硬币抛两次,观察出现正、反面的情况.

例1.2 掷一枚质地均匀的骰子,观察出现的点数.

例1.3 记录某电话交换台一小时接到的呼叫次数.

例 1.4　一射手进行射击，直到击中目标为止，观察射击情况.

例 1.5　在一批灯泡里，任取一只，测试其寿命.

例 1.6　一口袋中装有红、白两种颜色的乒乓球，从袋中任取一只球，观察其颜色.

上述试验均具有以下共同特点：

①可以在相同条件下重复进行；

②每次试验的可能结果不止一个，但事先明确试验的所有可能结果；

③每次试验之前不能确定哪一个结果会出现.

具有上述三个特点的试验，称为**随机试验**，简称**试验**.

1.1.2　随机事件与样本空间

随机试验的结果称为该随机试验的**随机事件**，简称事件. 用 A,B,C 等表示. 如例 1.2 中，"出现 1 点"、"出现偶数点"、"点数大于 3"都是随机事件.

随机试验的每一个可能的基本结果称为**基本事件**(样本点)，记作 ω.

全体基本事件的集合称为**样本空间**，记作 Ω.

例如，例 1.1 中的试验，基本事件有两个：正(表示正面向上)、反(表示反面向上)，样本空间 $\Omega_1=\{正,反\}$；

例 1.2 中的试验，基本事件有六个："出现 1 点"、"出现 2 点"、"出现 3 点"、"出现 4 点"、"出现 5 点"、"出现 6 点"，样本空间为 $\Omega_2=\{1,2,3,4,5,6\}$；

同样，例 1.3、例 1.4、例 1.5、例 1.6 的样本空间分别为：

$\Omega_3=\{0,1,2,\cdots\}$；

$\Omega_4=\{1,01,001,\cdots\}$，这里"0"表示没有击中，"1"表示击中；

$\Omega_5=\{t\mid t\geqslant 0\}$；

$\Omega_6=\{红色,白色\}$.

显然，基本事件是随机事件，由基本事件组成的集合也是随机事件. 因此，随机事件是样本空间的子集，基本事件是样本空间中仅由单个样本点组成的子集. 特殊地，样本空间 Ω 和空集 $\varnothing$ 也是随机事件.

通常说"事件发生"，是指该事件中的一个基本事件发生；反之，如果某事件的一个基本事件发生，则该事件发生. 如例 1.2 中的试验，事件 A 表示"出现偶数点". 说"事件 A 发生"，是指"出现 2 点"、"出现 4 点"、"出现 6 点"这三个基本事件中的一个发生；反之，当"出现 2 点"、"出现 4 点"、"出现 6 点"这三个基本事件之一发生时，事件 A 发生.

如果在每次试验的结果中，某事件一定发生，称该事件为**必然事件**(如样本空间 Ω). 如果在每次试验的结果中，某事件一定不发生，称该事件为**不可能事件**(如空集 $\varnothing$). 又如，例 1.2 中事件"点数不大于 6"是必然事件，"点数大于 6"是不可能事件. 显然，必然事件和不可能事件所反映的现象是确定性现象，并不具有随机性，这说明确定性现象是作为随机性现象的特例来研究的.

1.1.3　事件的关系与运算

任一随机事件是样本空间的子集，所以事件之间的关系及运算与集合之间的关系及运算是完全类似的. 设试验 E 的样本空间为 $\Omega,A,B,A_k(k=1,2,\cdots)$ 是 E 的事件，它们都是 Ω 的

子集.

(1) 包含关系

如果事件 A 发生,导致 B 必然发生,则称事件 B 包含事件 A,记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$. 包含关系可用图 1.1 说明,图中正方形表示样本空间 Ω,圆 A,B 分别表示事件 A 与事件 B.

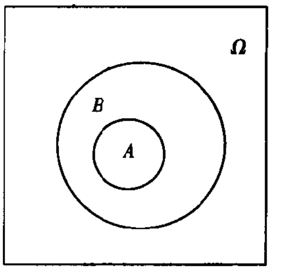

图 1.1　$A\subset B$

如在例1.2中,事件 A 为"出现偶数点",事件 B 为"出现的点数不小于 2",显然 $A\subset B$.

如果 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,称事件 A 与事件 B 相等,记为 $A=B$. 如在例 1.2 中,事件 A 为"出现偶数点",与事件 B 为"出现 2,4,6 点"是相等的.

(2) 事件的和

事件 A 与事件 B 中至少有一个发生的事件,称为事件 A 与事件 B 的和,记为 $A\cup B$,如图 1.2 所示.

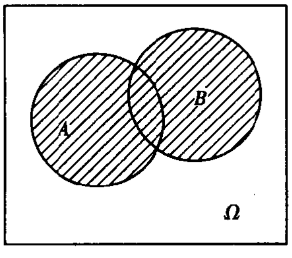

图 1.2　$A\cup B$

例如:$A=\{1,3,5\}$,$B=\{1,2,3,4\}$,则 $A\cup B=\{1,2,3,4,5\}$

类似地,事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生,称这一事件为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和,记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$,简记为 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k$;可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 中至少有一个发生,称这一事件为 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的和,记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots$,简记为 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$.

(3) 事件的积

事件 A 与事件 B 同时发生的事件,称为事件 A 与事件 B 的积,记为 $A\cap B$ 或 AB,如图 1.3 所示.

例如:$A=\{1,3,5\}$,$B=\{1,2\}$,则 $A\cap B=\{1\}$.

类似地,事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生,称这一事件为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积,记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$,简记为 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}A_k$;可列个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 同时发生,称这一事件为 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的积,记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots$,简记为 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$.

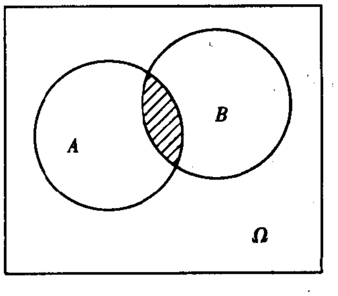

图 1.3　$A\cap B$

(4) 互不相容事件

如果事件 A 与事件 B 不可能同时发生,即 $A\cap B=\varnothing$,称 A,B 是互不相容的(或互斥的)事件.

如在例 1.2 中,"出现奇数点"与"出现偶数点"是互不相容事件.

如果 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意两个事件不可能同时发生,即

$$A_i\cap A_j=\varnothing,\quad 1\leqslant i<j\leqslant n$$

称这 n 个事件是互不相容的(或互斥的).

(5) 事件的差

A 发生且 B 不发生的事件称为事件 A 与事件 B 的差,记为 $A-B$,如图 1.4 所示.

例如:$A=\{1,3,5\}$,$B=\{1,2,3,4\}$,则 $A-B=\{5\}$.

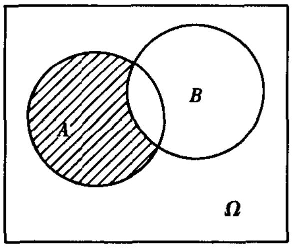

图 1.4　$A-B$

(6)逆事件

如果事件 A 与事件 B 中必有一个发生,且仅有一个发生,即 $A\cup B=\Omega,A\cap B=\varnothing$,则称事件 A 与事件 B 互为逆事件(对立事件),记为 $B=\overline{A}$ 或 $A=\overline{B}$.

如例 1.2 中,“出现奇数点”的逆事件是“出现偶数点”.

显然　$\overline{\overline{A}}=A,A+\overline{A}=\Omega,A\overline{A}=\varnothing,A-B=A\overline{B}$.

(7)完备事件组

如果 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个事件一定发生,即

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k=\Omega$$

则称这 n 个事件构成完备事件组.

如果 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 满足:

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k=\Omega,A_i\cap A_j=\varnothing,\quad 1\leqslant i<j\leqslant n$$

则称这 n 个事件构成互不相容的完备事件组.

显然,样本空间的所有基本事件构成互不相容的完备事件组.

将事件之间的关系与集合论的概念对照如表 1.1.

表 1.1

记号	概率论	集合论
Ω	样本空间,必然事件	全集
$\varnothing$	不可能事件	空集
$\omega\in\Omega$	基本事件,样本点	Ω 的元素
$A\subset\Omega$	事件 A	Ω 的子集
$A\subset B$	事件 A 发生导致事件 B 发生	集合 B 包含集合 A
$A=B$	事件 A 与事件 B 相等	集合 A 等于集合 B
$A\cup B$	事件 A 与事件 B 至少有一个发生	集合 A 与集合 B 的并
$A\cap B$	事件 A 与事件 B 同时发生	集合 A 与集合 B 的交
$\overline{A}$	事件 A 的逆事件	集合 A 的补集
$A-B$	事件 A 发生且事件 B 不发生	集合 A 与集合 B 的差集
$A\cap B=\varnothing$	事件 A 与事件 B 互不相容	集合 A 与集合 B 无公共元素

与集合的运算规律类似,事件的运算满足如下规律:

交换律:$A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A$

结合律:$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

分配律:$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

对偶律:$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

不难将对偶律推广到有限个事件中:

$$\overline{\bigcup_{k=1}^{n} A_k} = \bigcap_{k=1}^{n} \overline{A_k},\quad \overline{\bigcap_{k=1}^{n} A_k} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_k}$$

例 1.7　设一个工人生产了三个零件，记 A_1 =“第 1 个零件是正品”，A_2 =“第 2 个零件是正品”，A_3 =“第 3 个零件是正品”，试表示：

①没有一个零件是次品；

②只有第一个零件是次品；

③恰有一个零件是次品；

④至少有一个零件是次品.

解　①“没有一个零件是次品”表示为 $A_1A_2A_3$；

②“只有第一个零件是次品”表示为$\overline{A_1}A_2A_3$；

③“恰有一个零件是次品”表示为$(\overline{A_1}A_2A_3)\cup(A_1\overline{A_2}A_3)\cup(A_1A_2\overline{A_3})$；

④“至少有一个零件是次品”表示为$\overline{A_1}\cup\overline{A_2}\cup\overline{A_3}$或$\overline{A_1A_2A_3}$.

1.2　频率与概率

1.2.1　频率

一个随机试验有许多可能的结果，通常希望知道某些结果出现的可能性有多大. 为此，先介绍事件的频率的概念.

频率　若事件 A 在 N 次试验中出现 n 次，称“$f_N(A)=n/N$”为事件 A 在这 N 次试验中出现的频率，n 为频数.

频率具有性质：

① $0\leqslant f_N(A)\leqslant 1$

② $f_N(\Omega)=1\quad f_N(\varnothing)=0$

③ $f_N(A\cup B)=f_N(A)+f_N(B)-f_N(AB)$

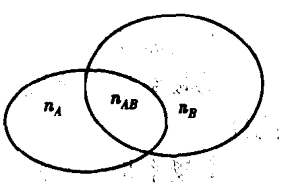

图 1.5

证　由 A,B 频数之间的关系（图 1.5）：

$$n_{A\cup B} = n_A + n_B - n_{AB}$$

$$f_N(A\cup B) = \frac{n_A + n_B - n_{AB}}{N} = f_N(A) + f_N(B) - f_N(AB)$$

特别地，若 A,B 互不相容，则$f_N(A\cup B)=f_N(A)+f_N(B)$

④ $f_N(A)=1-f_N(\overline{A})$

⑤ 若 $A\subset B$，则$f_N(A)\leqslant f_N(B)$

例 1.8　投掷硬币试验.

众所周知，掷一枚硬币，事先无法知道哪一面向上. 在大量的投掷时，正面和反面出现的次数“差不多”，即出现正面和反面的机会几乎是相等的. 试验结果如表 1.2：

表 1.2

试验人	投掷次数	出现正面	频率 (出现正面次数/投掷次数)
狄摩根	2 048	1 061	0.518 1
布丰	4 040	2 048	0.506 9
皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5
罗曼若夫斯基	80 640	39 699	0.492 3

由表 1.2 可知：当试验的次数 n 增加时，正面出现的频率（即正面出现的次数 k）与总的试验次数 n 之比 $\frac{k}{n}$ 都在 $\frac{1}{2}$ 左右.

1.2.2 概率

频率的重要意义在于：一方面，它能一定程度地反映事件 A 发生的可能性大小；另一方面，它比较简单，容易掌握. 用频率来刻画事件发生的可能性的大小是直观的，但有缺点，因为它有随机波动性. 不过，当 n 逐渐增多时，频率 $f_n(A)$ 逐渐稳定于某个常数 $P(A)$，即当 n 很大时，就有 $f_n(A)=P(A)$. 这个数 $P(A)$ 是客观存在的，即对于每一随机事件 A，总有这样一个数 $P(A)$ 与之对应，并且还可以推想 $P(A)$ 也具有频率的几条性质. 因此，用稳定值 $P(A)$ 来刻画事件发生的可能性大小是比较恰当的，称 $P(A)$ 为事件 A 发生的概率.

概率的统计定义 事件 A 出现的频率 $f_n(A)$ 随着试验次数的增大，而在区间 $[0,1]$ 上的某个数字 p 附近摆动，称 p 为事件 A 的概率，记为 $P(A)$，即

$$P(A) = p$$

在此需要区分“频率”和“概率”这两个概念：

①频率具有随机性，它反映的是某一随机事件出现的频繁程度，即随机事件出现的可能性.

②概率是一个客观存在常数，它反映了随机事件的属性. 在实际问题中，往往不知 $P(A)$ 为何值，这时可取当试验次数充分大时的事件 A 出现的频率为它的近似值，这正是该定义的优点.

由概率的统计定义与频率的关系，可知概率的性质：

性质 1 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$

性质 2 $P(\Omega)=1, P(\varnothing)=0$

性质 3.1（加法公式） $P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

性质 3.2 $P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)$

$$= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \leqslant i<j \leqslant n} P(A_iA_j) + \sum_{1 \leqslant i<j<k \leqslant n} P(A_iA_jA_k) - \cdots + (-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n)$$

性质 3.3 若 A、B 互不相容，则

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)$$

性质 3.4 若 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容，则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n)$$

性质 4　$P(A) = 1 - P(\overline{A})$

性质 5　若 $A \subset B$,则 $P(A) \leqslant P(B)$

例 1.9　若 $ABC \subset D$,求证:$P(A)+P(B)+P(C)-P(D) \leqslant 2$

证　由性质 5,有:

$$\begin{aligned} P(D) &\geqslant P(ABC) = P(AB) + P(C) - P((AB) \cup C)) \\ &\geqslant P(AB) + P(C) - 1 = P(A) + P(B) - P(A \cup B) + P(C) - 1 \\ &\geqslant P(A) + P(B) + P(C) - 2 \end{aligned}$$

即

$$P(A) + P(B) + P(C) - P(D) \leqslant 2$$

1.3　古典概型

1.3.1　古典概率

如果试验具有两个特点:

①样本空间的元素(基本事件)只有有限个,如 n 个,记为

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$$

②每个基本事件发生的可能性相同,即

$$P(\omega_1) = P(\omega_2) = \cdots = P(\omega_n) = \frac{1}{n}$$

这时所讨论的问题称为古典概型.

古典概型在概率论中占有相当重要的地位.一方面,由于它简单,对它的讨论有助于直观理解概率论的许多基本概念,因此,人们常从古典概型开始引入新的概念;另一方面,古典概型概率的计算在产品质量抽样检查等实际问题以及物理研究中都有重要应用.

设样本空间 Ω 的基本事件总数为 n,古典概型事件 A 是由 Ω 中 k 个基本事件所组成的集合,则事件 A 的概率为:

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{A\text{ 中所包含的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}$$

例 1.10　从 0,1,2,…,9 十个数字中任取一个数字,求取得奇数的概率.

解　基本事件总数 $n=10$,设事件 A 表示取得奇数数字,则它所包含的基本事件数 $k=5$,因此所求概率为:

$$P(A) = \frac{5}{10} = 0.5$$

例 1.11　在数 1~100 中,任取一数,求这个数能被 2 或 3 或 5 整除的概率.

解　设 A 表示取出的数能被 2 整除,B 表示取出的数能被 3 整除,C 表示取出的数能被 5 整除,则 $A \cup B \cup C$ 表示取出的数能被 2 或 3 或 5 整除.

AB 表示取出的数同时能被 2 与 3 整除,即能被 6 整除.

AC 表示取出的数同时能被 2 与 5 整除,即能被 10 整除.

BC 表示取出的数同时能被 3 与 5 整除,即能被 15 整除.

ABC 表示取出的数同时能被 2 与 3 与 5 整除,即能被 30 整除.

而所有 100 个数中,能被 2 整除的有 50 个,能被 3 整除的有 33 个,能被 5 整除的有 20 个,能被 6 整除的有 16 个,能被 10 整除的有 10 个,能被 15 整除的有 6 个,能被 30 整除的有 3 个,所以有:

$$\begin{aligned}P(A\cup B\cup C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=\frac{50}{100}+\frac{33}{100}+\frac{20}{100}-\frac{16}{100}-\frac{10}{100}-\frac{6}{100}+\frac{3}{100}\\&=0.74\end{aligned}$$

例 1.12 设有 50 张考签,分别予以编号 1,2,…,50.

①任抽其中一张进行考试,求事件 A“抽到前 10 号考签”的概率;

②任抽其中两张进行考试,求事件 B“抽到的两张都是前 10 号考签”的概率;

③无放回地抽取两次,每次一张,求事件 C“抽到的两张都是前 10 号考签”的概率;

④无放回地抽取 10 次,每次一张,求事件 D“最后一次抽到的是双号考签”的概率.

解 ①显然,$\Omega=\{i,1,\cdots,50\}$,$A=\{1,2,\cdots,10\}$,$n=50$,$K=10$

所以
$$P(A)=\frac{K}{n}=\frac{10}{50}=0.2$$

②因为 Ω 中包含基本事件总数 $n=C_{50}$,B 中包含基本事件数 $K=C_{10}^2$,所以

$$P(B)=\frac{C_{10}^2}{C_{50}^2}=0.037$$

③因为抽取的考签要考虑次序,所以 Ω 中包含的基本事件总数 $n=A_{50}^2$,C 中所包含的基本事件数 $K=A_{10}^2$,故

$$P(C)=\frac{A_{10}^2}{A_{50}^2}=0.037$$

④Ω 中包含基本事件总数 $n=A_{50}^{10}$,D 中包含基本事件数 $K=A_{49}^9A_{25}^1$,所以

$$P(D)=\frac{A_{49}^9A_{25}^1}{A_{50}^{10}}=0.5$$

例 1.13 从一批由 9 件正品、3 件次品组成的产品中,任取 5 件.

①求其中至少有 1 件次品的概率;

②求其中至少有 2 件次品的概率.

解 ①设 A=“任取 5 件,其中至少有 1 件次品”,则 $\bar{A}$=“任取 5 件,无次品”.

$$P(A)=1-P(\bar{A})=1-\frac{C_9^5}{C_{12}^5}=1-0.159=0.841$$

②设 B =“任取 5 件,其中至少有 2 件次品”

C =“任取 5 件,其中恰有 2 件次品”

D =“任取 5 件,其中恰有 3 件次品”

则 $B=C+D$ 且 C,D 互不相容. 因此

$$P(B)=P(C+D)=P(C)+P(D)$$

$$= \frac{C_3^2C_9^2}{C_{12}^5} + \frac{C_3^3C_9^2}{C_{12}^5} = 0.364$$

例1.14 从一批由9件正品、3件次品组成的产品中,①一次抽取5件,求其中恰有2件次品的事件A的概率;②无放回地抽取5次,每次抽1件,求其中恰有2件次品的事件B的概率;③有放回地抽取5次,每次抽1件,求其中恰有2件次品的事件C的概率.

解 ①显然基本事件总数为C_{12}^5,A包含的基本事件数为$C_3^2C_9^3$,所以

$$P(A) = \frac{C_3^2C_9^3}{C_{12}^5} = 0.318$$

②因为要考虑顺序,所以基本事件总数为A_{12}^5,B包含的基本事件数为$C_5^2A_3^2A_9^3$,所以

$$P(B) = \frac{C_5^2A_3^2A_9^3}{A_{12}^5} = 0.318$$

③基本事件总数为C_{12}^5,C含有的基本事件数为$C_5^5 \cdot 3^2 \cdot 9^3$.所以有

$$P(C) = \frac{C_5^2 3^2 9^3}{12^5} = 0.264$$

注1:在例1.14中,第①问称为**超几何分布**:有m件产品,其中k件次品,从中随机抽取n件,其中恰有$j(j \leqslant k)$件次品的概率为:

$$p = \frac{C_k^jC_{m-k}^{n-j}}{C_m^n} \tag{1.1}$$

超几何分布在产品质量控制中有广泛的应用.

注2:第①问和第②问的答案一样并不是巧合.事实上,从一批产品中任意取出n件产品,可以有两种方式:一次任意取出n件产品;每次任意取出一件产品,取出的产品不再放回,连续取n次(无放回抽样,或不重复抽样).

第一种抽取的概率即式(1.1).第二种抽取的概率为:

$$p = \frac{C_n^jA_k^jA_{m-k}^{n-j}}{A_m^n}$$

利用排列数与组合数的关系式,得:

$$p = \frac{C_n^jC_k^j \cdot j!\,C_{m-k}^{n-j} \cdot (n-j)!}{C_m^n \cdot n!} = \frac{C_k^jC_{m-k}^{n-j}}{C_m^n}$$

注3:第③问有放回(重复)抽样称为**独立试验序列**.即进行一系列试验,在每次试验中,事件A或者发生,或者不发生.假设每次试验的结果与其他各次试验的结果无关,事件A的概率$P(A)$在整个系列试验中保持不变,这样的一系列试验称为独立试验序列.

独立试验序列是贝努利首先研究的.假设每次试验只有两个互相对立的结果$A,\bar{A}$,并设$P(A)=p, P(\bar{A})=q, p+q=1$,在这种情况下,有:

定理1 如果在独立试验序列中事件A的概率为$p(0<p<1)$,则在n次试验中事件A恰好发生m次的概率为:

$$P_n(m) = C_n^mp^mq^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}p^mq^{n-m} \tag{1.2}$$

其中,$p+q=1$.

在例1.14的第③问中A为抽出次品,则$p=3/12, q=9/12$,代入式(1.2)即得.

*1.3.2 几何概型

基本事件数为无穷多时,古典概率失效,因此,必须将古典概率的定义加以推广,使得概率的古典定义也能适用于试验的基本事件是无穷多个的情形.

例如,设在平面上有某一区域 G,而区域 g 是它的某一部分,在区域 G 内任意投掷一点,求这点落在区域 g 内的概率. 这里,"在区域 G 内任意投掷一点"这句话应理解为:被投掷的点落在区域 G 内任一点处都是等可能的,并且落在区域 G 的任何部分内的概率只与这部分的面积成比例,而与其位置和形状无关. 于是,在区域 G 内任意投掷一点而落在区域 g 内的概率可定义为:

$$P = \frac{g\text{的面积}}{G\text{的面积}}$$

一般地,假设试验的基本事件有无穷多个,但是可用某种几何特征(长度、面积、体积)来表示其总和,设为 S;并且其中的一部分,即随机事件 A 所包含的基本事件数,也可用同样的几何特征来表示,设为 s;则随机事件 A 的概率定义为:

$$P(A) = \frac{A\text{的长度(面积、体积)}}{\text{样本空间的长度(面积、体积)}} = \frac{s}{S}$$

直观地称这种概率为几何概率.

例 1.15 (会面问题)两人相约 7:00 ~ 8:00 在某地会面,先到者等候另一人 20 分钟后方可离去,求这两人能会面的概率.

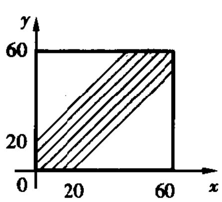

图 1.6

解 以 x、y 分别表示两人到达的时刻,则两人会面的充要条件为

$$|x-y| \leqslant 20$$

这是一个几何概率问题,可能的结果全体是边长为 60 的正方形里的点,能会面的点的区域在 $x-y=20$ 和 $x-y=-20$ 之间,用阴影标出(图 1.6). 所求概率为:

$$p = \frac{60^2-40^2}{60^2} = \frac{5}{9}$$

例 1.16 在长度为 a 的线段内任取两点,将其分为三段,求它们可以构成一个三角形的概率.

解 设线段被分成的三段长分别为 x,y 和 $a-x-y$,则样本空间为由 $0<x<a, 0<y<a$ 及 $0<x+y<a$ 所构成的图形,其面积为 $S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}a^2$,有利于事件 A(即 $x,y,a-x-y$ 三段构成三角形)的基本事件集是由线段 $x,y,a-x-y$ 所围成的三角形,其面积为 $S_{\triangle DCE}$.

由三角形两边之和大于第三边的性质,有:

$$\begin{cases} x+y > a-x-y \\ x+a-x-y > y \\ y+a-x-y > x \end{cases}$$

即 $0<x<\frac{a}{2}, 0<y<\frac{a}{2}, \frac{a}{2}<x+y<a$(它们构成 $\triangle DCE$)

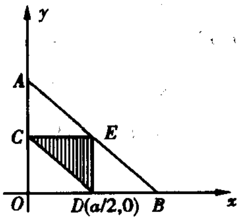

图 1.7

其面积为:

$$S_{\triangle DCE}=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

故

$$P(A)=\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}a^2}=\frac{1}{4}$$

*1.3.3　概率的公理化定义

在概率的统计定义中，把多次重复试验中随机事件 A 的频率作为概率 $P(A)$ 的近似值，然而，试验的次数究竟应该为多少，频率究竟在怎样的意义下趋近于概率 $P(A)$，都没有(实际也不可能)确切地说明.

在概率的古典定义中，关于试验的基本事件的"等可能性"这一条件，在实际问题中往往不具备.

由此可见，概率的统计定义与概率的古典定义都存在一定的缺点和局限性. 虽然根据概率的上述两种定义，概率论在科学的各个领域的理论和实际应用中已取得了丰硕的成果，但是概率论的进一步发展则对它的基本概念提出了更高的要求. 因此，数学家们在 20 世纪 30 年代提出了概率论的公理化设想，从而给出了概率的公理化定义.

概率的公理化定义：设试验的样本空间为 Ω，随机事件 A 是 Ω 的子集，$P(A)$ 是实值函数，如果满足下述三条公理：

公理 1(非负性)　对于任一随机事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$.

公理 2(规范性)　对于必然事件 Ω，有 $P(\Omega)=1$.

公理 3(有限可加性)　对于有限个互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k$，有：

$$P\left(\sum_{i=1}^{k}A_i\right)=\sum_{i=1}^{k}P(A_i)$$

公理 3′(完全可加性)　对于可数无穷个互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_k,\cdots$，有：

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

则称 $P(A)$ 为随机事件 A 的概率.

显然，概率的公理化定义既概括了概率的统计定义与概率的古典定义，又克服了这两种定义的缺点和局限性. 根据概率的公理化定义，虽然不能直接计算随机事件 A 的概率 $P(A)$，但是，由于概率论公理化体系的建立，使概率论有了严谨而坚实的理论基础，因而在概率论的发展史中起着重要的作用.

1.4　条件概率

1.4.1　条件概率

首先研究一个简单例子.