拓扑线性空间

徐登洲　姚庆六
编
张华孝　薛昌兴

兰州大学出版社

拓扑线性空间

徐登洲　姚庆六
　　　　　　　　编
张华孝　薛昌兴

兰州大学出版社出版
（兰州大学校内）

西北师范学院印刷厂印刷　甘肃省新华书店发行
开本：787×1092 1／32　印张：9 85
1987年7月第一版　1987年7月第一次印刷
字数：200千字　印数：1—3000

ISBN 7—311—00044・0／o・12
书号：13402・20　定价：1.64元

序　言

拓扑线性空间理论是赋范线性空间理论的推广，比如弱拓扑在新理论下就有了合理的解释。更重要的，拓扑线性空间是研究诸如广义函数等各种函数空间的重要手段，使得微分方程和数学物理中许多问题得到有力的推动。再者，凸性理论也成功地应用于经济、控制等领域。如此等等。到现在拓朴线性空间已成为众多学科中不可少的工具。

虽然国际上已经有一些好的拓扑线性空间的教程，但我们总希望看到我国学者自己写的书。不久前，上海科学技术出版社出版了夏道行、扬亚立编写的《线性拓扑空间引论》。十分可喜，现在又有了第二本。这两本书各有特色。可供各种不同要求的读者选择参照阅读。

本书作者有多年教学经验，编写时非常注意便于教和便于学。本书选材精炼，安排了大量实例，编排中注意与基础泛函分析知识相衔接。对于那些希望尽快掌握这一抽象理论中的基本知识的读者，本书将提供很多便利。

陈文嫄

1987.8.10

拓扑线性空间的分类

本书是以如下拓扑线性空间的逻辑框图编写的，供读者阅读时参考。

$$\begin{tikzcd}
 & \text{伪准范空间} \arrow[r] & \text{拓扑线性空间} \\
\text{局部有界空间} \arrow[r] & \text{赋可数拟半范空间} \arrow[u] \arrow[ur] \arrow[r] & \text{局部半凸空间} \\
\text{赋范空间} \arrow[u] \arrow[r] & \text{赋可数半范空间} \arrow[u] \arrow[r] & \text{局部凸空间} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & \text{半范空间} & \\
\text{半自反空间} \arrow[r] & \text{BM空间} \arrow[ur] & \text{相对强空间} \arrow[u] & \text{Mazur空间} \arrow[ul] \\
\text{自反空间} \arrow[u] \arrow[r] & \text{桶空间} \arrow[u] \arrow[r] & \text{拟桶空间} \arrow[u] \arrow[r] & \text{包围空间} \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

目　　录

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

予 备 知 识

我们假定读者已经熟悉线性空间、点集拓扑及泛函分析的一般概念。提供这个予备知识的目的仅在于补充本书所需而又不常见于一般教科书的内容，包括集合与序、线性结构、拓朴结构三个方面。本书使用的符号也汇集于此。在阅读正文之前，熟悉予备知识的内容对于读者将是有益的。

一、集合与序

本书使用的集合论符号都是标准的。对于几个常用的集合我们用固定的符号表示之：分别记 R、C、N为实数域、复数域及自然数集合，记K为实数域或复数域，记B为K中的闭单位球，即 $\mathrm{B}=\{a\in\mathrm{K}\mid|a|\leqslant 1\}$，记 ϕ为空集。

设 f 为从集合 X 到集合 Y 中的映象，通常记为 f：$X\longrightarrow Y$，或$x\longmapsto f(x)$。X称为f的**定义域**，Y称为 f 的**值域**。记 $G(f)=\{(x,f(x))\mid x\in X\}$为 f 的**图象**。对于每一个 $A\subset X$ 及每一个 $B\subset Y$，记 $f(A)=\{f(x)\mid x\in A\}$，$f^{-1}(B)=\{x\in X\mid f(x)\in B\}$。映象 f 称为**单射的**，如果 $f(x_1)=f(x_2)$时，必有 $x_1=x_2$；f 称为**满射的**，如果 $f(X)=Y$，或对于任意的$y\in Y$，$f^{-1}(y)\neq\phi$；f 称为**双射的**，如果它既是单射又是满射的。此外，记号 $f|_A$表示f在A上的**限制**。

我们称非空集合X为一个**半序集**，如果X上存在二元关系“$\leqslant$”，它满足自反性（$x\leqslant x$）、传递性（若$x\leqslant y$，$y\leqslant z$，则$x\leqslant z$）及反对称性（若$x\leqslant y$且$y\leqslant x$，则$x=y$）。二元关系“$\leqslant$”通常称为X上的**半序**.$x\leqslant y$也可记为$y\geqslant x$。显然X的任一非空子集在原来的半序下仍为一半序集。应该注意的是在半序集中并非任何两个元素都能比较大小。

设X为半序集，$\phi\neq A\subset X$，如果对于任意的$x,y\in A$，$x\leqslant y$或$y\leqslant x$中至少有一式成立，则称A为X的一个**全序子集**。X的全序子集A_0称为**极大的**，如果对于任一满足$A_0\subset A$的X的全序子集A，必有$A=A_0$。

设X为半序集，$\phi\neq A\subset X$。我们称$x_0\in X$为A的**上界**（**下界**），如果对于每一个$x\in A$，有$x\leqslant x_0$（$x\geqslant x_0$）。我们称$x_0\in X$为A的**上确界**（**下确界**），记为$x_0=\sup A$（$x_0=\inf A$），如果x_0是A的一个上界（下界），并且对于A的任一上界（下界）x'，均有$x_0\leqslant x'$（$x_0\geqslant x'$）。称$x_0\in X$为X的一个**极大元**，如果$x\in X$且$x_0\leqslant x$，必有$x=x_0$。显然当A的上确界及下确界存在时必定唯一。此外应注意$x_0\in X$为极大元，仅仅是指在X中能够与x_0比较大小的元素之中x_0是最大的。

我们容易证明，如果$P(X)$为非空集合X的某种子集的非空集合，在$P(X)$中定义：$A\geqslant B$当且仅当$A\subset B$，则$P(X)$为一半序集。我们今后称此序为$P(X)$上的**自然序**。如果对于$P(X)$中的任一非空集合$\{A_\tau\}$，$\bigcup_\tau A_\tau$与$\bigcap_\tau A_\tau$均属于$P(X)$，则在自然序下必有

$\sup\{A_\tau\}=\bigcup_\tau A_\tau$，$\inf\{A_\tau\}=\bigcap_\tau A_\tau$。

Zorn引理 如果半序集X的任一全序子集都有上界，

则X中必含极大元。

结论0.1 任一半序集必含极大全序子集。

证明 设X为半序集，$P(X)$为X中的全体全序子集的集合。由于单点集必为全序集，知$P(X)\neq\phi$。在$P(X)$中定义：$A\leqslant B$当且仅当$A\subset B$，则$P(X)$为半序集。现任取$P(X)$中的任一全序子集$\{A_\tau\}$，令$A=\bigcup_\tau A_\tau$，我们容易验证$A\in P(X)$，它显然是$\{A_\tau\}$在$P(X)$中的上界。于是根据Zorn引理$P(X)$中必存在极大元A_0，即A_0为X中的极大全序子集。 #

设Λ为一半序集。我们称Λ为一**定向集**，如果对于每一对α，$\beta\in\Lambda$，存在一个$\gamma\in\Lambda$，满足$\alpha\leqslant\gamma$，$\beta\leqslant\gamma$。显然实数域R及自然数集合N在通常的序下皆为定向集。此外，如果X为非空集合，$x\in X$，记$N(x)$为X中包含点x且满足下列条件的子集的集合：若A，$B\in N(x)$，则$A\cap B\in N(x)$。在$N(x)$中引入自然序，则易知$N(x)$为一定向集。

设X为非空集合，Λ为定向集，$\theta:\Lambda\to X$，则称象集$\theta(\Lambda)$为X中的一个**网**。通常记$\theta(\alpha)=x_\alpha$，$\forall\alpha\in\Lambda$。于是又记网$\theta(\Lambda)=\{x_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$，或$\{x_\alpha\}$。显然序列为网。又设$A\subset X$，我们称网$\{x_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$**最终在**集合$A$中，如果存在$\alpha_0\in\Lambda$，使得对于任何$\alpha\in\Lambda$，$\alpha\geqslant\alpha_0$，$x_\alpha\in A$。我们称网$\{x_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$**经常在**集合$A$中，如果对于每一个$\alpha\in\Lambda$，存在一个$\beta\in\Lambda$，使得$\alpha\leqslant\beta$，且$x_\beta\in A$。

设$\{x_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$，$\{y_\beta|\beta\in\triangle\}$为集合$X$上的两个网。如果存在映象$\theta:\triangle\longrightarrow\Lambda$使得对于任何$\beta\in\triangle$，$y_\beta=x_{\theta(\beta)}\in\{x_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$，并且满足：(1) 若$\beta$，$\beta'\in\triangle$，且$\beta\leqslant\beta'$，

则$\theta(\beta)\leqslant\theta(\beta')$；(2) 对于每一个$\alpha\in\Lambda$，存在一个$\beta\in\Delta$，使得$\alpha\leqslant\theta(\beta)$，则我们称$\{y_\beta|\beta\in\Delta\}$为$\{x_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$的一个**子网**。显然序列的任一子序列为一子网，但应特别指出，一个序列的子网并非全是子序列。例如$\{1/n|n\in\mathbf{N}\}$为$\mathbf{R}$中的序列。令$\Lambda=(o,+\infty)$，$\lambda_t=1/([t]+1)$，$\forall t\in\Lambda$，其中$[t]$表示t的整数部分。显然$\{\lambda_t|t\in\Lambda\}$为$\{1/n|n\in\mathbf{N}\}$的一个子网，但它不是子序列。

如果$\{x_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$为集合$X$中的一个网，$\{y_\beta|\beta\in\Delta\}$为$\{x_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$的子网，$f$：$X\longrightarrow Y$，则易知$\{f(x_\alpha)|\alpha\in\Lambda\}$为$Y$中的网，而$\{f(y_\beta)|\beta\in\Delta\}$为$\{f(x_\alpha)|\alpha\in\Lambda\}$的一个子网。此外，若网$\{x_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$最终在集合$A\subset X$中，则它的任一子网也最终在$A$中。

通常记网$\{x_\alpha|\alpha\in\Lambda\}\subset X$的子网为$\{x_{\theta(\beta)}|\beta\in\Delta\}$。

设X为非空集合，$P(X)$为X的子集构成的非空集合，$\phi\notin P(X)$。我们称$P(X)$为X上的一个**滤基**，如果对于任何A，$B\in P(X)$，均有$C\in P(X)$满足$C\subset A\cap B$。我们称$P(X)$为X上的一个**滤子**，如果：(1) 若A，$B\in P(X)$，则$A\cap B\in P(X)$；(2) 若$A\in P(X)$，且$A\subset B$，则$B\in P(X)$。X上的滤子$P_0(X)$称为X上的**超滤子**，如果对于X上的任一滤子$P(X)$，只要$P_0(X)\subset P(X)$，必有$P_0(X)=P(X)$。

显然滤子必为滤基。反之，若$P_1(X)$为X上的滤基，令$P(X)=\{B\subset X|$存在$A\in P_1(X)$满足$A\subset B\}$，则$P(X)$为X上的一个滤子，我们称之为X上由$P_1(X)$**生成的滤子**。易知任一滤基生成的滤子是唯一的。

如果$P(X)$为X上的滤基，则在自然序下$P(X)$为一

定向集. 于是可以在X中构造一个网$\{x_A \mid A\in P(X)\}$. 反之, 若$\{x_\alpha \mid \alpha\in\Lambda\}$为$X$中的一个网, 对于每一个$\beta\in\Lambda$, 令$A_\beta=\{x_\alpha \mid \alpha\geqslant\beta\}$, 则$P(X)=\{A_\beta \mid \beta\in\Lambda\}$亦构成$X$上的一个滤基.

结论0.2 设X为非空集合,

(1) 若$P_0(X)$为X上的滤子, 则$P_0(X)$为超滤子当且仅当对于任一集合$A\subset X$, 或者$A\in P_0(X)$, 或者$X\setminus A\in P_0(X)$.

(2) 如果$P_0(X)$为X上的超滤子, $X=\bigcup_{i=1}^{n}X_i$, 则至少有一个$X_i\in P_0(X)$.

(3) 如果$P_1(X)$为X上的滤基, 则必存在X上的超滤子$P_0(X)$满足$P_1(X)\subset P_0(X)$.

(4) 如果$P_1(X)$为X的子集的集合, 其中任何有限个子集皆有非空的交, 则存在X上的超滤子$P_0(X)$满足$P_1(X)\subset P_0(X)$.

证明 (1) $\Longrightarrow$ 如果$X\setminus A\notin P_0(X)$, 则对于任何$B\in P_0(X)$, $B\not\subset X\setminus A$, 因而$A\cap B\neq\phi$. 令$P_1(X)=\{A$与$P_0(X)$中有限个成员的交$\}$, 易知$P_1(X)$为$X$上的滤基, 且$A=A\cap X\in P_1(X)$. 如果$P(X)$为$P_1(X)$在$X$上生成的滤子, 则必有$P_0(X)\subset P(X)$, 因此$P_0(X)=P(X)$. 于是$A\in P_0(X)$. $\Longleftarrow$ 假设$P_0(X)$不是超滤子, 则存在滤子$P(X)$, 使得$P_0(X)\subset P(X)$, 但$P_0(X)\neq P(X)$. 这表明存在$A_0\in P(X)$, 而$A_0\notin P_0(X)$. 但$X\setminus A_0\in P_0(X)\subset P(X)$, 因而$A_0\cap(X\setminus A_0)=\phi\in P(X)$. 这与滤子不含空集矛盾.

(2) 假设不然, 则由 (1) 知对于每一个i,

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$X\setminus X_i\in P_0(X)$. 于是$\bigcap_{i=1}^n(X\setminus X_i)=X\setminus\bigcup_{i=1}^n X_i=\phi\in P_0(X)$。但$P_0(X)$中不含空集，矛盾。

(3) 由于滤基必含于由它生成的滤子中，故不妨设$P_1(X)$为X上的一个滤子。令 $\Sigma=\{P(X)|P(X)$ 为X上的滤子，且$P_1(X)\subset P(X)\}$，并在Σ中定义：$P'(X)\leqslant P''(X)$当且仅当 $P'(X)\subset P''(X)$，则Σ为一个半序集。现任取Σ中的一个全序子集ω，令 $P_\omega(X)=\bigcup\{P(X)|P(X)\in\omega\}$，易验证 $P_\omega(X)\in\Sigma$且为ω的一个上界。于是根据Zorn引理，Σ中必存在极大元 $P_0(X)$。显然 $P_0(X)$为X上的超滤子，且 $P_1(X)\subset P_0(X)$。

(4) 令 $P_2(X)=\{P_1(X)$中有限个成员的交$\}$，则$P_2(X)$为X上的一个滤基，且$P_1(X)\subset P_2(X)$.由(3)即得所证。#

二、线性结构

本书中除特别声明外，所有的线性空间都指K上的线性空间。换言之，既可为实线性空间，又可为复线性空间。

设X为线性空间，A，$B\subset X$，$N\subset$ K。我们约定：$A+B=\{x+y|x\in A,y\in B\}$，$N(A)=\{ax|a\in N,x\in A\}$。特别地，记$\{x\}+A=x+A$，$\{a\}A=aA$。应注意，尽管我们有$2A\subset A+A$，但 $A+A\subset 2A$却不一定成立。

设X为线性空间，$A\subset X$，记

$$\mathrm{sp}A=\{\textstyle\sum_{i=1}^n a_i x_i\,|\,a_i\in \mathrm{K},\ x_i\in A;\ n\in \mathbf{N}\}$$

并称之为A的**线性张成**。规定 $\mathrm{sp}\phi=\{0\}$。显然 $\mathrm{sp}A$为X中包含A的最小线性子空间，即有

$$\mathrm{sp}A=\bigcap\{X_1 \mid X_1\text{为 }X\text{的线性子空间且 }A\subset X_1\}.$$

如果X_1，X_2均为X的线性子空间，则有$X_1\bigcup X_2\subset X_1+X_2=\mathrm{sp}(X_1\bigcup X_2)$。

设X为线性空间，X_1为X的线性子空间。我们称X_1为X的**真线性子空间**，如果$X_1\neq\{0\}$，且$X_1\neq X$。称X_1为X的**极大线性子空间**，如果X_1为X的真线性子空间，且不存在X的真线性子空间X_2满足$X_1\subset X_2$。显然X的线性子空间X_1为X的极大线性子空间当且仅当对于任何$x\in X\setminus X_1$，必有$\mathrm{sp}(X_1\bigcup\{x\})=X$。

设X为线性空间，X_1为X的线性子空间，$x_0\in X$，则称集合$M=X_1+x_0$为X中过x_0点的**线性簇**。其中当X_1为X的极大线性子空间时，称M为X中过x_0点的**超平面**。由于线性簇$M=X_1+x_0$为X_1过x_0点的平移，易知对于任何$x\in M$，均有$M=X_1+x$。

线性空间X中的集合A称为**线性无关的**，如果A中任意有限个元素线性无关。X中的线性无关集A称为X的**Hamel基**，如果$\mathrm{sp}A=X$。

结论0.3 任一线性空间均有Hamel基。

证明 设$P(X)$为线性空间X中的全体线性无关子集的集合。在$P(X)$中定义：$A\leqslant B$当且仅当$A\subset B$，则$P(X)$为一半序集。根据结论0.1，$P(X)$中必含极大全序子集Σ。令$A_0=\bigcup\{A\mid A\in\Sigma\}$，则易知$A_0$为$X$的Hamel基。#

如果线性空间X中存在一个由有限个元素构成的Hamel基，则称X为**有限维的**，否则称X为无穷维的。

若X_1，X_2为线性空间X的线性子空间，$X_1\bigcap X_2=\{0\}$，并且对于任何$x\in X$存在分解式$x=x_1+x_2$，其中

$x_1\in X_1$，$x_2\in X_2$，则称 X 为 X_1 与 X_2 的**直接和**，记为 $X=X_1\oplus X_2$。此时称 X_1 与 X_2 彼此**互补**。显然当 $X=X_1\oplus X_2$ 时，任何 $x\in X$ 的分解式 $x=x_1+x_2$ 是唯一的。

结论0.4 设 X 为线性空间，X_1 为 X 的线性子空间，则存在 X 的线性子空间 X_2 使得 $X=X_1\oplus X_2$。

设 X_1 为线性空间 X 的线性子空间，并在 X 中规定等价关系：$x\sim y$ 当且仅当 $x-y\in X_1$。我们把商集 $X/\sim$ 记为 X/X_1，并且对于任意的 $x\in X$，专记 $\hat{x}$ 为 x 所在的等价类，即有 $\hat{x}=x+X_1$。在 X/X_1 中定义：$\hat{x}+\hat{y}=x+y+X_1=\widehat{(x+y)}$，$a\hat{x}=ax+X_1=\widehat{(ax)}$，则 X/X_1 为线性空间，我们称它为 X 关于 X_1 的**商空间**。此外把 $x\in X$ 到它对应的等价类 $\hat{x}\in X/X_1$ 的映象专记为 π：$x\longmapsto\hat{x}$，并称之为**商映象**。显然商映象 π 是满射的。

设 $\{X_\tau|\tau\in\Gamma\}$ 为一族线性空间，记 $\prod_{\tau\in\Gamma}X_\tau$ 为全体满足下列条件的映象 $x:\Gamma\longrightarrow\bigcup_{\tau\in\Gamma}X_\tau$ 的集合：$x(\tau)\in X_\tau$，$\forall\tau\in\Gamma$。在 $\prod_{\tau\in\Gamma}X_\tau$ 中定义

$$z=x+y\text{ 当且仅当 }z(\tau)=x(\tau)+y(\tau),\quad\forall\tau\in\Gamma,$$

$$z=ax\quad\text{当且仅当 }z(\tau)=ax(\tau),\qquad\forall\tau\in\Gamma,$$

其中 $a\in K$。易验证 $\prod_{\tau\in\Gamma}X_\tau$ 为线性空间，我们称它为关于 $\{X_\tau|\tau\in\Gamma\}$ 的**积空间**。对于每一个 $\tau\in\Gamma$，令 $P_\tau:\prod_{\tau\in\Gamma}X_\tau\longrightarrow X_\tau$ 为 $P_\tau(x)=x(\tau)$，并称之为积空间 $\prod_{\tau\in\Gamma}X_\tau$ 到 X_τ 上的**投影**。显然每一个 P_τ 都是满射的。当 Γ 有限时，显然积空间 $\prod_{\tau\in\Gamma}X_\tau$ 即为通常有限个线性空间的Cartesian积。

设 X，Y 皆为线性空间，$T:X\longrightarrow Y$ 线性，$y\in Y$，则我们称 Y 中的线性子空间 $T(X)$ 为 T 的**象集**，称 X 中的线性

簇$T^{-1}(y)$为y的**原象**.特别地0点的原象$T^{-1}(0)$为X的线性子空间，称为T的**零空间**。显然T单射当且仅当$T^{-1}(0)=\{0\}$。显然，若X_1、Y_1分别为X、Y的线性子空间，$\emptyset\neq A\subset X$，则$T(X_1)\subset Y$，$T^{-1}(Y_1)\subset X$均为线性子空间，并且$T(\mathrm{sp}A)=\mathrm{sp}(T(A))$。

如果线性映象$T:X\longrightarrow Y$是双射,则称T为**线性同构**.线性同构T的逆映象$T^{-1}:Y\longrightarrow X$也是线性映象。我们称两个线性空间$X$、$Y$为**线性同构的**，如果存在一个线性同构$T:X\longrightarrow Y$。

线性空间X上的线性映象$f:X\longrightarrow \mathrm{K}$专称为**线性泛函**。我们记$X$上的全体线性泛函的集合为$X^{\#}$。显然在通常的线性运算下$X^{\#}$为线性空间。我们称$X^{\#}$的子集$H$为**丰满的**，如果对于任意的$x$，$y\in X$，$x\neq y$，必存在$f\in H$满足$f(x)\neq f(y)$。

我们称线性空间X上的泛函$\varphi:X\longrightarrow \mathrm{K}$为非零的，如果它在$X$上不恒取零值。显然非零的$f\in X^{\#}$必满射.

结论0.5 设X为线性空间。

(1) 若X_1为X的真线性子空间，$f_1\in X_1^{\#}$，则存在非零的$f\in X^{\#}$，使得$f|_{X_1}=f_1$。

(2) $X^{\#}$为丰满的。

证明 (1) 可利用超限归纳由Zorn引理推出。(2)由(1)推出。#

结论0.6 设X为线性空间。

(1) 若$f\in X^{\#}$，则f非零当且仅当$f^{-1}(0)$为X的极大线性子空间。

(2) 若X_1为X的线性子空间，则X_1极大当且仅当

存在非零的 $f\in X^{*}$，使得 $X_1=f^{-1}(0)$。

(3) 若 $f\in X^{*}$ 非零，则对于任何 $a\in\mathrm{K}$，$f^{-1}(a)$ 为 X 中的超平面。

(4) 若 M 为 X 中的超平面，则存在非零的 $f\in X^{*}$ 及 $a\in\mathrm{K}$，使得 $M=f^{-1}(a)$。

结论0.7 设 X 为线性空间，f，$f_1,f_2,\cdots,f_n\in X^{*}$。如果 $\bigcap_{i=1}^{n}f_i^{-1}(0)\subset f^{-1}(0)$，则存在 a_1，a_2，$\cdots,a_n\in\mathrm{K}$，使得 $f=\sum_{i=1}^{n}a_if_i$。

证明 用归纳法。当 $n=1$ 时，$f_1^{-1}(0)\subset f^{-1}(0)$。不妨设 $f_1\neq0$（否则 $f_1=f=0$），于是，有 $x_0\in X$ 使 $f_1(x_0)=1$。由于 $x-f_1(x)x_0\in f_1^{-1}(0)\subset f^{-1}(0)$，$\forall x\in X$，必有 $f(x)=f(x_0)f_1(x)$，$\forall x\in X$。令 $a=f(x_0)$，则 $f=af_1$。

假设所证事实对 n 成立。现因 $\bigcap_{i=1}^{n+1}f_i^{-1}(0)\subset f^{-1}(0)$，若令 $X_1=f_{n+1}^{-1}(0)$，$g=f|X_1,g_i=f_i|X_1$ $(i=1,2,\cdots,n)$，则

$$\bigcap_{i=1}^{n}g_i^{-1}(0)=X_1\bigcap\left(\bigcap_{i=1}^{n}f_i^{-1}(0)\right)$$
$$=X_1\bigcap\left(\bigcap_{i=1}^{n+1}f_i^{-1}(0)\right)\subset X_1\bigcap f^{-1}(0)=g^{-1}(0).$$

于是由归纳假设，知存在 a_1，a_2，$\cdots$，$a_n\in\mathrm{K}$，使得在 X_1 上有 $g=\sum_{i=1}^{n}a_ig_i$。即成立

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}a_if_i(x),\quad\forall x\in X_1.$$

令 $h\in X^{*}$，$h=f-\sum_{i=1}^{n}a_if_i$，则 $X_1\subset h^{-1}(0)$。由 $n=1$ 时所证知存在 $a_{n+1}\in\mathrm{K}$ 满足 $h=a_{n+1}f_{n+1}$。由此即知在整个 X 上必有 $f=\sum_{i=1}^{n+1}a_if_i$。 #

设 X 为线性空间，$A\subset X$。我们称 A 为**半凸的**，如果存在 $\lambda\geqslant1$，使得 $A+A\subset\lambda A$（满足这一条件的任一 λ 称为 A 的一个**半凸系数**）；我们称 A 为**凸的**，如果对于任何 x，$y\in A$，$[x,y]\subset A$（$[x,y]=\{tx+(1-t)y\mid0\leqslant t\leqslant1\}$ 表

示连接 x 与 y 的线段）．我们规定 ϕ 为凸集．显然若 A 为凸集，必有 $A+A\subset 2A$，因此凸集必为半凸集．反之则不真．例如 A 为 $\mathbf{R}^2$ 中的闭单位球与线段〔$(-2,0),(2,0)$〕的并，则 $A+A\subset 4A$，因而 A 为半凸集，但 A 不是凸集．易知单点集、线段及线性簇均为凸集．对于任意的 $A\subset X$，记

$$\mathrm{co}A=\{\Sigma_{i=1}^{n}\lambda_i x_i \mid x_i\in A,\ \lambda_i\geqslant 0,\ \Sigma_{i=1}^{n}\lambda_i=1;\ n\in \mathbf{N}\},$$

并称它为 A 的**凸包**（规定 $\mathrm{co}\phi=\phi$）．显然凸包总是一个凸集．易知 $A\subset X$ 为凸集当且仅当 $A=\mathrm{co}A$．

结论0.8 设 X，Y 为线性空间．

（1） 若 $A\subset X$ 为半凸（凸）集，则对于任何 $\alpha\in \mathbf{K}$，αA 为半凸（凸）集．

（2） 若 A_1，$A_2\subset X$ 为半凸（凸）集，则 A_1+A_2 为半凸（凸）集．

（3） 若 $\{A_\gamma\}$ 为 X 中具有相同半凸系数的半凸集族，则 $\bigcap_\gamma A_\gamma$ 为半凸集．特别地，X 中任意个凸集的交为凸集．

（4） 若 $A\subset X$，$B\subset Y$ 皆为半凸（凸）集，则 $A\times B$ 为 $X\times Y$ 中的半凸（凸）集．

（5） 若 $A\subset X$，$B\subset Y$ 皆为半凸（凸）集，$T:X\longrightarrow Y$ 线性，则 $T(A)\subset Y$，$T^{-1}(B)\subset X$ 均为半凸（凸）集．

注意 半凸（凸）集的并未必是半凸（凸）集．

结论0.9 设 X，Y 为线性空间．

（1） 若 $A\subset X$，则 $\mathrm{co}A$ 为 X 中包含 A 的最小凸集，并且 $A\subset \mathrm{co}A\subset \mathrm{sp}A$．

（2） 若 $A_1\subset A_2\subset X$，则 $\mathrm{co}A_1\subset \mathrm{co}A_2$．

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com