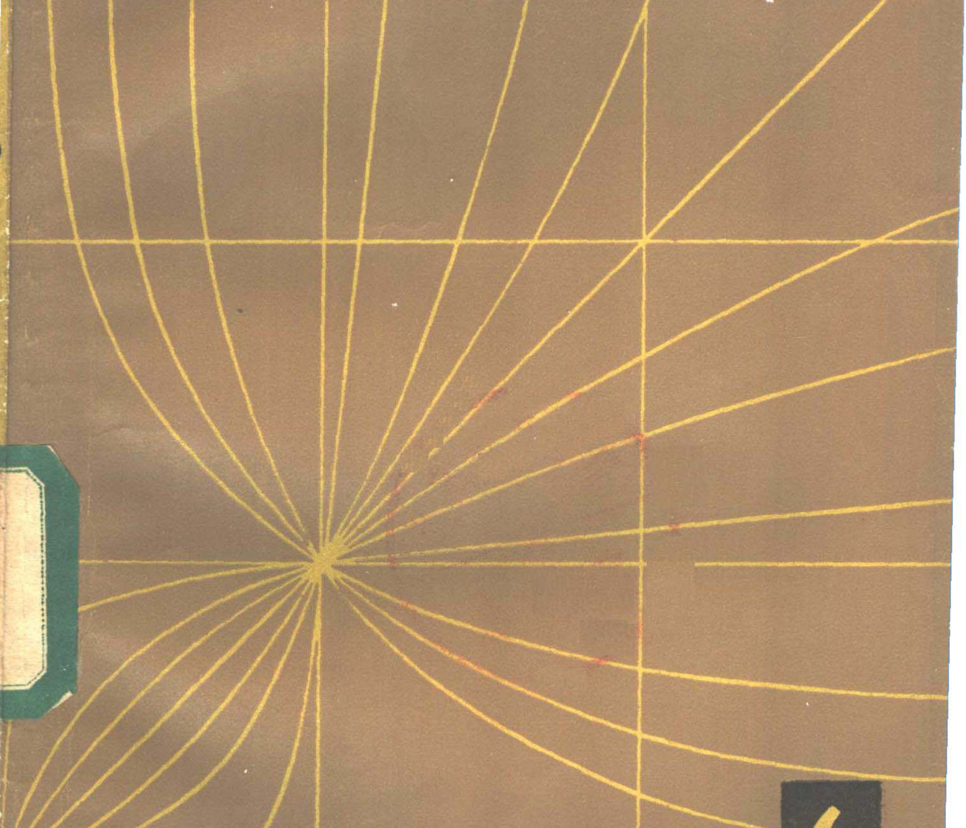
初等数学论丛



6

CHU DENG SHU XUE LUN CONG

目　录

几何变换

复旦大学数学研究所　胡和生

现实生活中，我们会碰到几何图形的多种多样的变换．举例来说：在纸上画一个圆，然后把这张纸从一个地方拿到另一个地方去，这个图形就从一个位置变到了另一个位置；又如，我们将一张照片放大若干倍(或缩小到原来的若干分之一)，这就把一个图形变到了另一个大小不同的图形；再如，在窗玻璃上粘一张剪好的纸花，当阳光斜照进来时，就在地面上得到一个窗花的影子，影子的图形与窗花的图形还有些不同呢．

在这三个例子中，一个图形都变成了另一个图形，但变化的程度各有不同．第一个例子的变化最少，它仍然把圆变为圆，而且大小也不改变，只不过是图形的位置变化了．第二个例子中，图形的大小有了变化，但所有图形是按比例地放大或缩小，一个圆形的物体，仍然保持为圆的，只是放大或缩小了若干倍．第三个例子是把圆变为椭圆了，但还是能够把直线变为直线．

这种按照一定的方法，把一个几何图形变为另一个几何图形，就是本文所要讲的**几何变换**．由前面的三个例子可以看到，对于几何变换，有两点是值得注意的：

1．图形的某些性质改变了．如第一个例子中，图形的位置；第二个例子中，图形的位置和大小；第三个例子中，图形的位

置和形状.

2. 图形的某些性质保留下来了. 第一个例子中, 图形的形状和大小都不变; 第二个例子中, 图形的形状不变; 第三个例子中, 直线会变成直线; 而圆、椭圆、抛物线和双曲线等二次曲线仍变为二次曲线.

上述三例子中, 第一种变换称为**运动**, 第二种变换称为**相似**, 第三种变换称为**中心射影**(它是射影变换的一个特例). 下面将分别予以讨论.

(一) 运　　动

运动是常见的一种几何变换, 它是欧几里得几何学的基础. 在欧几里得几何学中, 大家知道, 证明两个三角形全等时就用到了运动.

运动的概念来源于刚体的运动. 一个刚性的物体, 经过运动, 物体上任意两点的距离不会变; 它上面如有两条直线, 则它们的交角也不会变. 所以, 距离和交角都是运动下的不变量.

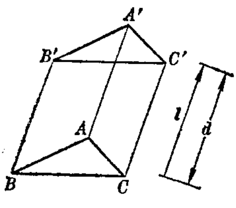


图 1-1

先考虑一类特殊的运动. 把一个图形依照一定的方向移动同样一段距离, 我们把这样的运动称为**平移**. 平移可以用一个向量来表示, 以平面上的平移来说, 例如对 A、B、C 三点平移一个向量 $\boldsymbol{l}$ 之后, 分别得到 A', B', C' 三点(图 1-1), 其中 $\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{CC'}=\boldsymbol{l}$, 直线段 AB, BC, AC 按向量 $\boldsymbol{l}$ 平移后得到直线段 $A'B'$, $B'C'$, $A'C'$.

平面上的图形接连两次平移之后, 仍然是一个平移. 例如第一个平移按向量 $\boldsymbol{a}$ 进行 ($\boldsymbol{a}$ 称为移动向量), 把这平移记为 L_a, 第二个平移的移动向量是 $\boldsymbol{b}$, 把这平移记为 L_b, 先进行

L_a 再进行 L_b 的后果记为 $L_b \circ L_a$，称为两个平移的乘积. 容易知道

$$L_b \circ L_a = L_{b+a},$$

因此也有
$$L_a \circ L_b = L_{a+b}.$$

由于$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$，因此

$$L_a \circ L_b = L_b \circ L_a.$$

这表示先按向量 $\boldsymbol{a}$ 再按向量 $\boldsymbol{b}$ 平移，与先按向量 $\boldsymbol{b}$ 再按向量 $\boldsymbol{a}$ 平移，所得到的结果是一致的.

再考虑另一类特殊的运动. 把平面上的一个图形绕这平面上一定点 O 转动 α 角，我们把这样的运动称为**旋转**，记为 $R_O(\alpha)$. 其中，O 称为**旋转中心**，α 称为**旋转角**. 容易知道

$$R_O(\alpha) \circ R_O(\beta) = R_O(\alpha+\beta) = R_O(\beta) \circ R_O(\alpha).$$

因而，绕同一点 O 连续进行两个旋转所得的结果，是与旋转次序的先后无关，并且其结果也是绕 O 的一个旋转.

如果采用以 O 点为原点的直角坐标，则平移的表达式为

$$\begin{aligned} x' &= x + a_1, \\ y' &= y + a_2, \end{aligned} \tag{1}$$

这里(a_1, a_2)是移动向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，(x, y)和(x', y')分别表示变换前与变换后点的坐标.

转动 $R_O(\alpha)$ 的表达式为

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha, \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{aligned} \tag{2}$$

一般的运动，是平移和转动的结合：

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha + a_1, \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha + a_2. \end{aligned} \tag{3}$$

并且，如果平面上一个运动不是平移，即(3)中的 $\alpha\neq 0$，那末它一定是绕这平面上某一定点 O' 的转动．这个事实可以证明如下：

实际上，我们只要求出一点 (x_0, y_0)，使在(3)下是不变的，即

$$\begin{aligned} x_0\cos\alpha - y_0\sin\alpha + a_1 &= x_0, \\ x_0\sin\alpha + y_0\cos\alpha_0 + a_2 &= y_0. \end{aligned} \tag{4}$$

由于行列式

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha-1 & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha-1 \end{vmatrix} = (\cos\alpha-1)^2+\sin^2\alpha>0, \qquad (\text{这里 } \alpha\neq 0)$$

所以方程组(4)必有解 (x_0, y_0)，此即转动中心的坐标．利用(4)式，改写 a_1、a_2，(3)式就改记成

$$\begin{aligned} (x'-x_0) &= (x-x_0)\cos\alpha - (y-y_0)\sin\alpha, \\ (y'-y_0) &= (x-x_0)\sin\alpha + (y-y_0)\cos\alpha. \end{aligned} \tag{5}$$

这就表明，运动(3)可以表示为以 $O'(x_0, y_0)$ 为中心的转动，转角仍为 α．读者也可试用几何方法去证明上述事实．

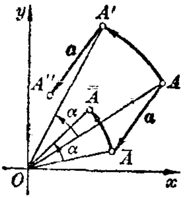


图 1-2

平面上平移和转动的乘积(或两个绕不同中心转动的乘积)一般是不可交换的．如在图 1-2 中，点 A 经运动 $L_{\boldsymbol{a}}\circ R_O(\alpha)$ 得 A''，而 A 经运动 $R_O(\alpha)\circ L_{\boldsymbol{a}}$ 得 $\overline{A}$，即有

$$L_{\boldsymbol{a}}\circ R_O(\alpha)\neq R_O(\alpha)\circ L_{\boldsymbol{a}}. \qquad (\text{其中 } \boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0},\ \alpha\neq 0)$$

所以，在作几何变换合成时，要注意它们的次序．

至于空间图形的运动，可以和平面的情形一样地讨论，但空间图形的转动要复杂得多．

（二）变 换 群

一个图形先经过一个变换 a，再经过一个变换 b，其结果恰恰表示这图形是经过了一个合成的变换，我们就把这个合成的变换称作是变换 a 和变换 b 的**乘积**，记作 ba. 前面我们已遇到两个平移 L_a、L_b 的乘积与两个绕 O 点的旋转 $R_O(\alpha)$、$R_O(\beta)$ 的乘积，它们的乘积分别为 L_{b+a} 与 $R_O(\beta+\alpha)$.

对一个变换，还可以定义它的逆变换，这就是：设变换 a 把图形 I 变到图形 II，那末把图形 II 变为图形 I 的变换就是 a 的**逆变换**，记为 a^{-1}.

把所有图形保持不动的变换称为**恒等变换**，记为 e. 显然，一个变换 a 和它的逆变换 a^{-1} 的乘积即为恒等变换 e.

设 Σ 是一些变换所组成的集合，如果 Σ 中每两个变换的乘积都在这个集合中，又其中每个变换的逆变换也在这个集合中，满足这样的性质的变换的集合叫做一个**变换群**. 看一看运动的全体. 如果 a 是一个运动，b 是一个运动，很明显 a 和 b 的乘积也是一个运动；又，a 是一个运动，则 a^{-1} 也是一个运动. 所以，平面（或空间）上运动的全体构成一个变换群，称为**运动群**.

平移的全体也构成一群，称为**平移群**. 平面上绕一定点的旋转也构成一群，称为**旋转群**. 由于平移群、旋转群中的所有变换都是运动，所以这两个群都是运动群的一部分，我们把平移群、旋转群称为运动群的两个**子群**.

另外，形式为

$$\begin{cases} x' = kx, \\ y' = ky \end{cases} \quad (\text{其中 } k>0) \tag{6}$$

的变换称为关于 O 点的**放大**，其中 k 是放大的倍数（其实，$0<$

$k<1$ 时，图形是缩小了）．并把放大和运动的乘积称为**相似变换**，可以用

$$\begin{aligned} x' &= k(x\cos\alpha - y\sin\alpha) + a_1, \\ y' &= k(x\sin\alpha + y\cos\alpha) + a_2 \end{aligned} \quad (\text{其中 } k>0) \tag{7}$$

来表示．容易验证，相似变换(7)的全体构成群，称为**相似群**．

（三）对　　称

对称变换是一种重要的几何变换．在平面上，有关于一点对称，也可以有关于一条直线对称．我们先来讨论关于一条直线对称，一个图形经关于一直线的对称变换后，得到另一图形，它的大小仍然和原来相同，形状看来也没有变化，但在摆法上却有不同．

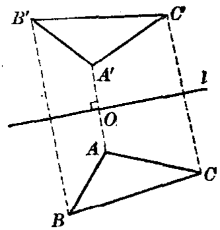


图　1-3

平面上一点 A 关于 l 的对称点 A' 的作法是：从 A 作 l 的垂线，垂足为 O，连结 AO 并延长至 A'，使 $AO=OA'$(图1-3)．

把一个图形变换为关于 l 对称的图形，称为**关于 l 的对称变换**，或称**关于 l 的反射**．

反射有下述一种很重要的性质：任何运动可以用偶数次反射的乘积来表示．例如一个平移把 A 移到 A'，我们可将线段 AA' 四等分，分点为 A_1、A_2、A_3，过 A_1 与 A_3 这两点分别作直线 l_1 与 l_2 垂直于 AA'，先作关于 l_1 的反射，再作关于 l_2 的反射，就得到 A 变到 A' 的平移(图1-4)．又如考察绕点 O 转动角度 α 的旋转，我们作过 O 点的两直线 l_1、l_2，使它们的交角为 $\dfrac{\alpha}{2}$，先关于 l_1 作反射，再关于 l_2 作反射，就得到刚才所说的旋转(参见图1-5)．由于运动是转动与平移的结合，这就

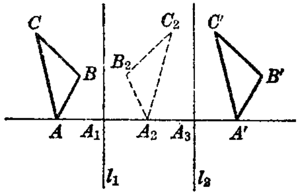


图 1-4

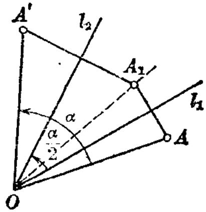


图 1-5

证明了任何运动可以用偶数次反射的乘积来表示.

值得注意的是平面上的反射并不是平面上的运动. 显然反射不是平移, 这因为关于 l 的反射使 l 上的每点均不变, 而平移(除非不动)则使每点都要变到另外的点去. 同时, 反射又不是转动, 因为一个转动(除非不动)只能有一个不动点, 即旋转中心. 这就证明了上述的结论. 附带指出, 图 1-3 中的两个三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 的形状虽一样, 但摆法关于 l 对称. 用平面上的运动绝对不能将 $\triangle ABC$ 运动到符合 $\triangle A'B'C'$. 但是如将图形 $\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$ 所在的平面沿直线 l 折迭一下, 就可使 $\triangle ABC$ 重合于 $\triangle A'B'C'$. 这个折迭不是此平面上的运动, 而是空间的运动, 即空间中此一平面绕直线 l 作 180° 的转动. 因而用空间的运动可将 $\triangle ABC$ 变到 $\triangle A'B'C'$.

如果选取坐标, 使 l 为 x 轴, 那末关于 l 的对称变换的表达式就是

$$\begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= -y. \end{aligned} \tag{8}$$

由于两个反射的乘积就不是一个反射, 平面上反射的全体不构成一个群. 但是, 平面上运动和反射的全体却构成一个变换群, 称为**等长变换群**, 这个群中的变换称为**等长变换**. 除形式为(3)的变换外, 它还包含

$$x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha + a_1, \quad y' = -x\sin\alpha - y\cos\alpha + a_2. \qquad (\text{其中 } \alpha \neq 0) \tag{9}$$

容易证明，两点间的距离在等长变换下也不变．这里，(3)式中 x、y 的系数行列式等于 1，而(9)式的系数行列式等于 -1．

在几何中，对称性可以解决许多问题．例如有一直线 l，在 l 的一侧有点 A 与点 B，我们要在 l 上求一点 C，使得 $AC+CB$ 的长度最短．为此，我们作 A 关于 l 的对称点 A'，对于 l 上任一点 C'，必成立 $AC'=A'C'$，因此

$$AC'+C'B=A'C'+C'B.$$

所以，当 A'、C'、B 这三点在同一直线上时 $A'C'+C'B$ 为最小，因此得到 C 点的位置为 $A'B$ 和直线 l 的交点．这时，$\angle ACM=\angle MCA'=\angle M'CB$，因此，如在 A 点有一光源射出光线，经过 l 的反射能达到 B 点的光线就是光线 AC（见图 1-6）．

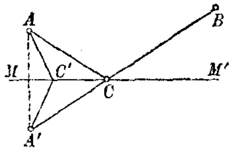


图 1-6

上述两个事实的联系不是偶然的，在光学里有一个**费马原理**，即光线所经过的路径就是所需时间最短的那个路径，现在规定了光线必须经过 l 的反射，所以光线必须走和 l 有公共点的路径，由于光速为常数，所以最短的路径必须是长度最短的折线 ACB．解决最短的路径的问题，一般要用到专门的数学分支——变分学．对这里提出的问题，我们用了对称变换的性质就解决了问题．

平面上除了关于直线 l 的对称（即反射）之外，还有关于一点 O 的对称，也称**点对称**．这时 O 点就称为**对称中心**．点 A 关于 O 的对称点 A' 的作法如下：连结 AO，并延长到 A'，使 $AO=OA'$．如取对称中心为原点，则点对称的表达式为

$$x'=-x,\ \ y'=-y. \tag{10}$$

实际上，平面上关于O点的对称也就是绕O作180°的转动．

在欧氏空间中，点对称能使两点间的距离不变．现代几何学中，我们还会遇到其他一些空间，称为黎曼空间（这是很广泛的一类空间，欧氏空间及球面都是特殊类型的黎曼空间）．黎曼空间（除欧氏空间外）都是弯曲空间．在黎曼空间中，任意两点也有距离这个概念，只是不能用很简单的式子来表示．例如，对球面而言，两点之间可以用大圆弧来确定它们的距离，大圆弧起着相当于平面上直线的作用（如图1-7）．但球面上的几何学就和平面上的几何学（欧氏平面几何学）不同，例如一个球面三角形三内角之和就会大于180°等等．我们还可以举出很多黎曼几何的例子来．在黎曼几何中，有一类空间经过点对称变换之后两点的距离也不改变，这种空间叫做**对称空间**．大家只要仔细思索一下就可知道，球面是一种对称空间（球面上关于一点O_1的对称变换，可参见图1-8）．对称空间是一种很重要的空间，利用它可以弄清楚群论中的许多问题．它表明不仅群的理论可以对几何学有很大的帮助，而且几何学对研究群也有很大的帮助．近代的数学各个分支是密切地联系着的，对称空间和群论之间的关系就是一个出色的例子．

不仅如此，在自然界中，存在着许多对称性、设计建筑

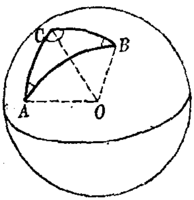


图 1-7

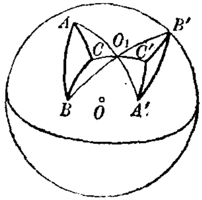


图 1-8

物，艺术图案都必须考虑到一定的对称性；一个结晶体总是有它的对称中心或对称平面，利用对称性，就可以把结晶体作出分类；在基本粒子之间也存在许多对称性，可以用比较复杂的变换群来描述这种对称性，来说明它们的许多性质．所以，对称变换是十分重要的几何变换．

（四）射影变换

在本文开始，我们就提到过太阳光斜照时从玻璃上的窗花变到地板上的影子这种类型的几何变换，现在我们详细地加以讨论．

设 O 为一定点，π 和 π_1 是两张平面，它们都不通过 O．对平面 π 上任意一点 A，作直线 OA，使和平面 π_1 交于点 A'．从 A 到 A' 的变换称为**中心射影**，其中 O 是**射影的中心**（图 1-9）．通过中心射影，π 上的图形映照成 π_1 上的图形，π 上的直线 l 在中心射影下的象就是点 O 与直线 l 所形成的平面和平面 π_1 的交线 l'．这时，有一个重要而特别的情况需要考虑：若 A_1 为平面 π 上一点，直线 OA_1 和平面 π_1 平行，则在平面 π_1 上就找不到 OA_1 和平面 π_1 的交点 A_1'（见图 1-10），对此，我们可以在 π_1 上"添加"一些无限远点，我们就说 A_1 的象 A_1' 是

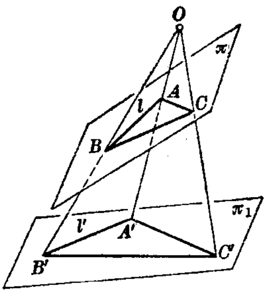


图 1-9

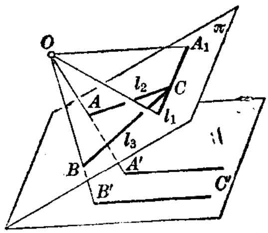


图 1-10

一个**无限远点**．若 l_1 是 π 上的直线，而通过点 O 与直线 l_1 的平面又恰恰和 π_1 平行，那末 l_1 的象就构成了**无限远直线**．这样，设 C 为 l_1 上一点，在平面 π 上两条在 C 点相交的直线 l_2、l_3 经此中心射影后就变成了 π_1 上的平行的直线，也就是相交于无限远的直线．

中心射影把平面 π 上的直线 l 射影为平面 π_1 上的直线 l'，但中心射影却把圆 c 的形状改变了．不过圆 c 的象仍然是二次曲线．设 l_1 是 π 上的直线，且其象为 π_1 上的无限远直线．我们作以 O 为顶点，以 c 为底的圆锥，用 π_1 去割它，就得到 c 在 π_1 上的象 c'，它是一条二次曲线．根据 c 在平面 π 上的不同位置，就得到不同的二次曲线．详言之，如果 c 和 l_1 不相交，c' 上就没有无限远点，因此 c' 就是一个椭圆；如果 c 和 l_1 有两个交点，则 c' 上有两个无限远点，那么所得曲线 c' 就是双曲线；如果 l_1 是 c 的切线，则 c' 上只有一个无限远点，那末 c' 就是抛物线．

如果再取一个射影中心 O' 和一张平面 π_2，使 O' 不在 π_1 和 π_2 上，我们可以把 π_1 上的点 A' 变换为 π_2 上的点 A''，这两次中心射影变换乘积就把 π 上的图形变为 π_2 上的图形．这种变换把 π 上的直线变为 π_2 上的直线，把 π 上的二次曲线变为 π_2 上的二次曲线，但一般地说来，两次中心射影的乘积所成的变换，不会是中心射影．因为设 A 的象为 A''，B 的象为 B''，C 的象为 C'' 等等，直线 AA''，BB''，CC''，…一般说来不会相交于一点(这事实通过作图就可明白，这里不作

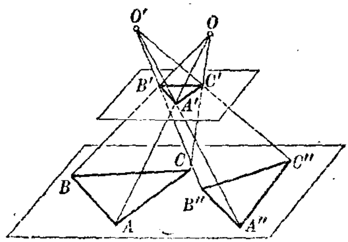


图 1-11

详细证明)．综上所述，中心射影的全体不构成变换群．

如果连续进行有限次中心射影，最后又把平面 π 上的图形重新映回到平面 π 上来，那末我们就得到平面 π 上的点的一个变换，这种变换称为**射影变换**(参见图 1-11)．例如，射影变换仍然使平面 π 上的直线变为直线，二次曲线变为二次曲线．

通过比较复杂的论证，可知平面上的射影变换的坐标表示是

$$x'=\frac{a_1x+b_1y+c_1}{ax+by+c},\qquad y'=\frac{a_2x+b_2y+c_2}{ax+by+c},\tag{11}$$

其中 a、b、c 不全为 0，

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0.$$

但我们可以容易地验证，(11) 确实是使直线变为直线的变换．若 a、$b\neq 0$，那末直线 $ax+by+c=0$ 就变为无限远直线．

射影变换的全体构成一个变换群(因为两个射影变换的乘积也是射影变换，射影变换的逆变换也不过是原来的中心射影乘积依照相反次序变回去，它也是平面 π 上的一个射影变换)，这个变换群称为**射影变换群**．

在射影变换中，形式为

$$\begin{aligned} x'&=a_1x+b_1y+c_1,\\ y'&=a_2x+b_2y+c_2, \end{aligned}\qquad 其中\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$$

的变换称为**仿射变换**．在仿射变换下，平行性不变，平行的直线仍变为平行的直线，而线段的长度却变了．但是，一直线上两线段长度之比在仿射变换下不变；有限处的点不会变为无限远的点，所以椭圆仍然会变为椭圆(包括圆)，双曲线变为双曲线，抛物线变为抛物线．

射影变换和仿射变换有许多重要的应用. 例如，我们在工程作图中，就得利用这些变换，用合理的方式把空间的图形表现到平面上来.

（五）变换群的几何学

变换群的理论及更一般的群的理论，是近世代数中的一个重要分支. 本文不来介绍这些理论，只是想进一步说明变换群和几何学的关系. 把变换群和几何学紧密地联系起来，这是十九世纪大数学家克莱因的功绩.

先看运动群. 在运动群下图形的形状大小都不变，直线变成直线，圆变成圆，三角形变为和自己恒等的三角形，线段的长短，角度的大小，平面图形的面积（空间图形的体积）都不发生变化，可以这样说，我们在中学里学的几何学的一切性质，在运动群下为不变的，这种几何学叫做欧几里得几何学. 大家知道，欧几里得几何学是研究平面或空间图形的性质的，人们如果要问，到底研究哪些性质呢？我们当然可以列举出许多来，如线段的长度，角度的大小，两个三角形是否全等，两个三角形面积是否相等，等等. 这样的列举是永远举不完的，但是能否用几句简短的话就能把这些性质都包含进去呢？这只要利用变换群的概念就可以了：欧几里得几何学是研究几何图形在运动群下不变的性质.

既然，欧几里得几何学和运动群有这样密切的关系，那末其他的变换群有什么作用呢？我们可以这样地回答：从17世纪以来，除了欧几里得几何学以外，又逐渐地形成了好几种几何学，例如射影几何学，在这一门几何学中，人们不讨论线段的长度和交角，而讨论一些与长度、交角、面积概念没有关系的几何性质，举几个例子来说，射影几何学中有一个有名的德

沙格定理：若两个三角形 ABC 与 $A'B'C'$ 的三对顶点联线 AA', BB' 与 CC' 共点，那末三对对应边的交点（见图 1–12，AB 和 $A'B'$ 的交点 P，BC 和 $B'C'$ 的交点 Q，CA 和 $C'A'$ 的交点 R）共线（大家可以用画图来验证，不过要注意到，从射影几何的观点来看，平行线被认为是相交于一无限远点的直线）．又比如说，**巴斯噶定理**：在二次曲线上任取六点 A、B、C、D、E、F，设 P 为 AB 和 DE 的交点，Q 为 BC 和 EF 的交点，R 为 AF 与 CD 的交点，那末 P、Q、R 共线（图 1–13）．在这些定理中，我们已摆脱了长度、角度、面积等几何概念，而只讨论点的共线，线的共点等等性质．这样，在当时就形成了一门新的几何学，这便是射影几何学．怎样来说明射影几何学所研究的对象呢？我们还是可以概括地说出：射影几何学是研究几何图形在射影变换群下不变的性质．

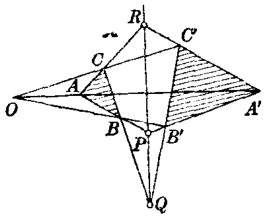


图 1–12

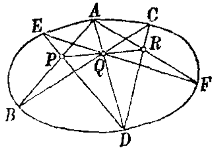


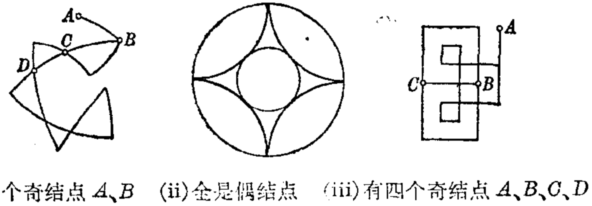
图 1–13

依据这样的思想，每一变换群都可以有一对应的几何学．相似群当然也有它的几何学，不过它和欧几里得几何学相差不多，没有使我们把它作为另外一门几何学来独立地进行研究．依据这个思想，还可以说明其他的许多几何学，例如对十九世纪出现的非欧几何学以及球面几何学，也都可以作这样的解释．但我们现在在这里想讲一个另外的例子．

一个几何变换，如果它把任意相接近的两点仍变到任意

相接近的两点，那末就称它为**连续的**，如果一个变换自己为连续，又它的逆变换也连续，那么就称它为**拓扑变换**(拓扑两字为译音)．拓扑变换的乘积也是拓扑变换，拓扑变换的逆变换也是拓扑变换，因此构成一群，称为**拓扑变换群**．研究在拓扑变换群下图形不变的性质也构成一门几何学，称为**拓扑学**．拓扑变换的一个具体例子是把一个橡皮膜任意拉伸所产生的变形．

拓扑学是近代数学中一个重要分科之一，其中有许多很有意义的内容，举一个简单的例子来说：有一个线路图，问它是否可以用一笔把它画成(同一线路不可重复)？为了解决这个问题，我们把线路图中的结点分成两类：奇结点与偶结点(我们观察通入和通出一个结点的线路的条数，如是奇数，则称这点为**奇结点**，如是偶数，则称为**偶结点**)．图 1-14(i) 中的 A、B 是奇结点，C、D 等都是偶结点．如果用一笔能画成这个线路，那末一定有一个始点和一个终点，只有始点和终点可能是奇结点，其它的点必须是偶结点，因为画到这一点后还要离开这一点．如果始点和终点不一致，那末图形有而且只有两个奇结点；如果始点和终点一致，那末图形没有奇结点．因此，线路图如果能够一笔画成，那末它没有奇结点或者只有两个奇结点．利用数学归纳法，还可以证明相反的事实：如一线路图没有奇结点或只有两个奇结点，那末这一线路图总可



(i) 有两个奇结点 A、B　(ii) 全是偶结点　(iii) 有四个奇结点 A、B、C、D

图 1-14