

混沌科学丛书

HUNDUN KEXUE CONGSHU

# 地球物理中的混沌

刘式达 刘式适 著

纽约的一只蝴蝶翅膀一拍，北京的天气真的会变化吗？厄尔尼诺现象是可以避免的吗？突然发生的大地震可以预报吗？地磁场倒转到底是怎么回事？雪花的形状为什么是六角形的？这些地球物理中的难题引起了科学家们的极大兴趣，也是我们将要探讨的问题。

东北师范大学出版社

## 混沌科学丛书

|          |         |
|----------|---------|
| 社会现象中的混沌 | 12.00 元 |
| 生命过程中的混沌 | 10.00 元 |
| 光学中的混沌   | 14.50 元 |
| 电学中的混沌   | 7.50 元  |
| 地球物理中的混沌 | 6.00 元  |
| 微观世界中的混沌 | 5.50 元  |



ISBN 7-5602-2429-6



9 787560 224299 &gt;



ISBN 7-5602-2429-6/P · 8

定价：6.00 元

国家“九五”规划重点图书

刘式达 刘式适 著

# 地球物理中的混沌

● 混沌科学丛书

东北师范大学出版社

中国·长春

## (吉)新登字 12 号

出版者 ● 贾国祥  
总策划 ● 王忠山  
著者 ● 刘式达 刘式适  
责任编辑 ● 王忠山  
封面设计 ● 李冰彬  
责任校对 ● 方 军  
责任印制 ● 张允豪 梁喜湖

### 混沌科学丛书 ● 地球物理中的混沌

DIQIUWULI ZHONG DE HUNDUN

发 行 者 ● 东北师范大学出版社  
地址: 吉林省长春市人民大街 138 号  
邮编: 130024  
电话: 0431-5695744 5688470  
传真: 0431-5695744 5695734  
网址: [http:// www.nenu.edu.cn](http://www.nenu.edu.cn)  
电子信箱: [Chubs@ivy.nenu.edu.cn](mailto:Chubs@ivy.nenu.edu.cn)

制 版 ● 东北师范大学出版社激光照排中心  
印 刷 ● 吉林省吉新月历公司印刷分公司  
版 次 ● 1999 年 10 月第 1 版  
印 次 ● 1999 年 10 月第 1 次印刷  
开 本 ●  $850 \times 1092 (\text{mm}^2)$  1/32  
印 张: 4.5  
字 数: 90 千

印 数 ● 0 001 册~5 000 册  
书 号 ● ISBN 7-5602-2429-6/P·8  
定 价 ● 6.00 元

## 前 言

大家知道,世界上第一个提出“混沌”的人是气象学家洛仑兹(E. N. Lorenz),这一事实充分说明地球物理科学在混沌科学中的地位。世界上没有一天的天气是相同的,气象学家一直在思考着它的原因。混沌的发现反过来又告诉我们,描述大气的地球流体力学方程组是可以产生不确定的随机结果的。

也许有人要问,“混沌”和“分形”究竟有什么用?我们认为主要在于对自然界认识上的突破。过去我们只知道确定的系统只能有确定的结果,今天我们又知道确定性的非线性系统也可以有不确定的随机结果。这就是非线性动力系统的内在随机性。过去我们只知道离散的动力系统(映射)可以收敛到不动点,今天我们又知道,它还会“收敛”到“混沌吸引子”,若用过去的观点看,这似乎应该叫不收敛。过去我们只研究有特征尺度现象,可以自然地说出“中国海岸线的长度是 18000 公里”,“现在气候变暖了”;但是,今天我们发现,海岸线的长度是随尺度而变的,气候的冷暖也是随尺度而变的,它们都是“无特征尺度”现象,其尺度范围跨好几个量级,“海岸线长度”的提法、“气候冷暖”的提法都是不合适的。

从动力学观点来看,受恢复力作用的单摆运动表现为

振荡(周期)的运动形态;地球绕太阳公转的二体问题在万有引力作用下表现为椭圆轨道。但是,若在单摆运动中加上强迫振荡变成振动摆,那么运动的形态就可能成为混沌;若运动涉及三个相互吸引的天体(即所谓三体问题),那么轨道就可以出现非常复杂的混沌轨道。因此,混沌的发现丰富了动力系统的理论。

地球物理学中的现象太复杂了。大地震不知何时在何处发生;温暖的南海,有时有台风,有时又没有;赤道东太平洋水温变暖的厄尔尼诺(Elnino)现象每3年~7年发生一次,却无法预测;地球磁场经常发生极性倒转,也让人莫明其妙,等等。“混沌”和“分形”的发现对解释这些复杂现象有新的启发,并促使人们对过去的一些看法进行检查,如:周期性的输入一定有周期性的输出吗?旱涝等极值气候出现的概率小吗?冷和暖、旱和涝、发生和不发生等一分为二的现象类似于单位长线段去掉中间 $1/3$ ,剩下的两段每段又去掉中间 $1/3$ ,……这样的康托(Cantor)集合,如何用动力系统描述?白噪声、褐色噪声和湍流有联系吗?指数函数相关和幂函数相关有什么联系?……

本书的章节标题多半是以概念和提出问题的方式引入的,以使混沌对地球物理学的应用不是就事论事,而是说明其应用的普遍性。这些概念和问题在其他学科中也会遇到。把“混沌”和“分形”的应用说成只有几个例子恐怕是不全面的。同时我们也应看到,随着应用的扩大,应用的深度也在增加。使广大读者掌握“混沌”和“分形”的概念,去应用它,深化它,这恐怕也是本书出版的目的。

刘式达、刘式适 1998年11月于北京大学

# 目 录

## 第一章 非线性的实质

|                        |    |
|------------------------|----|
| § 1.1 相互作用及其非线性表述..... | 1  |
| § 1.2 非线性的效应.....      | 6  |
| § 1.3 定常速度场和平衡态.....   | 12 |
| § 1.4 保守系统和耗散系统.....   | 19 |
| § 1.5 吸引子和李雅普诺夫指数..... | 24 |

## 第二章 确定的系统可以有不确定的结果

|                                  |    |
|----------------------------------|----|
| § 2.1 地球物理系统中的不确定性.....          | 28 |
| § 2.2 计算正确但不确定.....              | 29 |
| § 2.3 洛仑兹方程.....                 | 32 |
| § 2.4 周期性的输入不一定有同周期性的输出<br>..... | 40 |
| § 2.5 地震发生的随机性.....              | 43 |
| § 2.6 厄尔尼诺现象.....                | 45 |

|                     |    |
|---------------------|----|
| § 2.7 地磁场倒转的原因····· | 48 |
|---------------------|----|

### 第三章 无特征尺度性及其描述方法

|                              |    |
|------------------------------|----|
| § 3.1 地球科学中的无特征尺度现象·····     | 54 |
| § 3.2 海岸线的长度和分数维·····        | 56 |
| § 3.3 湍流的涡旋和余维·····          | 60 |
| § 3.4 地震活动和康托(Cantor)集合····· | 61 |
| § 3.5 气候冷暖随尺度变化规律·····       | 63 |
| § 3.6 极值气候和标度指数·····         | 66 |
| § 3.7 布朗运动和湍流的功率谱·····       | 68 |
| § 3.8 带有破碎概率的碎形·····         | 71 |

### 第四章 自相似标度律及其物理学意义

|                            |    |
|----------------------------|----|
| § 4.1 混沌中的自相似律·····        | 72 |
| § 4.2 一分为二的康托集合及其动力系统····· | 78 |
| § 4.3 不等比和不均匀的康托集合·····    | 81 |
| § 4.4 二维映射和平面自相似图形·····    | 87 |
| § 4.5 物理定律的标度不变性·····      | 92 |

### 第五章 奇异性和突变性

|                        |     |
|------------------------|-----|
| § 5.1 混沌中的奇异性和突变性····· | 95  |
| § 5.2 分岔的描述·····       | 96  |
| § 5.3 突变的描述·····       | 103 |
| § 5.4 突变和相变·····       | 109 |
| § 5.5 快 和 慢·····       | 111 |
| § 5.6 子波变换及奇异性的检出····· | 113 |

## 第六章 湍流中的规律性

|                                                |     |
|------------------------------------------------|-----|
| § 6.1 混沌和湍流的异同 .....                           | 118 |
| § 6.2 柯尔莫哥诺夫定律 .....                           | 120 |
| § 6.3 两个思考问题 .....                             | 123 |
| § 6.4 湍流介于白噪声和褐色噪声之间 .....                     | 124 |
| § 6.5 间歇湍流 .....                               | 126 |
| § 6.6 纳维-司托克斯(Navier-Stokes)方程的标<br>度不变性 ..... | 128 |
| § 6.7 指数相关导致幂函数相关 .....                        | 130 |
| 参 考 文 献 .....                                  | 134 |

# 第一章 非线性的实质

“混沌”和“分形”都是非线性现象。非线性的含义是什么？它在物理中有哪些表现？正是因为有多样性，“混沌”的出现就很自然；正因为有奇异性，“分形”也就不足为怪。耗散系统整体上运动是要保持在有限的相空间内，但局部又处处不稳定，非线性的效应只能出现“伸长”“折叠”而导致分形的混沌。

## § 1.1 相互作用及其非线性表述

20 世纪末，科学界最关心的一个词恐怕就是“相互作用”了。全球关注的环境问题不外乎就是人类和环境的相互作用。在研究气候变化时要考虑“海(洋)-气(大气)相互作用”和“陆-气相互作用”。当赤道东太平洋出现厄尔尼诺现象时，就想起了固体地球自转角速度的变化和海洋、大气之间的相互作用，因为固体地球、海洋、大气之间角动量是要交换的。当地震发生时，人们必然关注天文因子的影响，形成“天文地球动力学”前沿课题，研究天文-地球之间的相互作用。

事物之间的相互作用说明相互联系的事物不是单方面

的影响,而是相互影响,相互制约,相互依存的,这实际上就是非线性的实质。拿大鱼吃小鱼这件事来说,似乎小鱼多了大鱼也会多,但反过来大鱼多到一定程度,小鱼必然会少。我们说  $x$  和  $y$  分别表示大鱼和小鱼的数目,那么  $x$  和  $y$  随时间的变化为

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = (\text{大鱼的增加率}) - (\text{大鱼的死亡率})$$

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y} = (\text{小鱼的增加率}) - (\text{小鱼的死亡率})$$

(1·1)

大鱼和小鱼的相互作用表现为大鱼的增加率既依赖于大鱼本身的数量,又依赖于供给大鱼吃的小鱼的数量,所以可设

$$\text{大鱼的增加率} = axy \quad (1·2)$$

同时小鱼的死亡率也和  $xy$  有关,可设

$$\text{小鱼的死亡率} = - bxy \quad (1·3)$$

这样,方程组(1·1)可写成

$$\frac{dx}{dt} = axy - cx \quad (1·4)$$

$$\frac{dy}{dt} = dy - bxy$$

其中  $cx$  表示大鱼的死亡率和大鱼的数量成正比,  $dy$  表示小鱼的增加率和小鱼的数量成正比。

数学上  $x$  和  $y$  是两个因变量,它们的乘积  $xy$  就称为非线性或称为  $x$  和  $y$  相互“耦合”,英文叫 Couple。(1·4)式说明小鱼  $y$  多了,大鱼  $x$  也多,但大鱼  $x$  多了,小鱼  $y$  反而会少。

除了相互耦合的变量之间的乘积这种非线性表达式之

外,非线性也可以是变量本身的非线性函数。例如若以  $x$  表示人口的数量,马尔萨斯认为人口的增长率  $\frac{dx}{dt}$  和  $x$  成正比,这就得到马尔萨斯人口模型

$$\frac{dx}{dt} = ax \quad (a > 0) \quad (1.5)$$

(1.5)式是线性模型。由于(1.5)式的解为

$$x = x_0 e^{at} = x_0 r^t \quad (1.6)$$

其中  $x_0$  是初始  $t=0$  的人口数,  $r = e^a$ 。(1.6)式说明人口是按几何级数增长的(若  $t$  取整数  $1, 2, \dots$ )。

实际上,人口增长还受到环境、战争等因素的制约,人口不可能无限止地增长,我们可以设这种抑制人口增长的因素为  $-ax^2$ ,那么人口模型(1.5)就变成

$$\frac{dx}{dt} = ax(1-x) \quad (1.7)$$

(1.7)式称为逻辑斯蒂(Logistic)模型,这里的非线性形式就是  $x^2$  项。

若将(1.7)式改为描述生物种群(如昆虫),此时变量  $x_t$  改为离散的用年代  $n$  表示的数目  $x_n$ ,则(1.7)式变为

$$x_{n+1} = f(x_n) = \mu x_n(1-x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.8)$$

(1.8)式称为逻辑斯蒂映射或迭代方程。

非线性函数也不仅仅是  $x^2$  形式,例如单摆所受到的恢复力是重力指向平衡位置的分量  $\sin x$ ,其中  $x$  是单摆位置和垂线之间的夹角,那么单摆运动方程按照牛顿第二定律就是

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + \sin x = 0 \quad (1 \cdot 9)$$

其中  $\alpha \frac{dx}{dt}$  表示空气阻力。这里的非线性函数就是  $\sin x$ ，由于  $\sin x$  的泰勒展开式为

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \quad (1 \cdot 10)$$

所以若用展式(1·10)右端第一项  $x$  来代替  $\sin x$ ，那么(1·9)式就是描述振幅  $x$  很小时的线性单摆方程。

在流体力学和大气运动中，非线性则表现为另一种形式。白天太阳将地面加热，因此下层空气比上层空气温度要高，因而形成温度梯度  $\frac{\partial T}{\partial z}$ 。夏天常由这个上下空气的温度差而形成热对流，产生上升运动  $w$ ，反过来这种热的对流造成下面热空气向上，上面冷空气向下，又降低了当初形成热对流的温度梯度  $\frac{\partial T}{\partial z}$ 。因此速度  $w$  和温度梯度的乘积

$$w \frac{\partial T}{\partial z} \quad (1 \cdot 11)$$

是  $w$  和  $T$  相互作用的非线性表现。(1·11)式叫温度平流。同样，冬天冷空气南下，也会有形式  $u \frac{\partial T}{\partial x}$  的平流，也会有形式  $u \frac{\partial u}{\partial x}$ 、 $v \frac{\partial u}{\partial y}$  等的动量平流。因此，描述大气运动常用的无因次形式的方程组为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{R_0} v = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R_*} \Delta u$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{1}{R_0} u &= - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{R_e} \Delta v \\
 \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= - \frac{\partial p}{\partial z} + \theta + \frac{1}{R_e} \Delta w \\
 \frac{\partial \theta}{\partial t} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} + w \frac{\partial \theta}{\partial z} &= - R_i w + \frac{1}{p_r R_e} \Delta \theta \\
 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{1 \cdot 12}$$

其中 $(u, v, w)$ 是速度 $v$ 的三个分量, $\theta$ 是温度, $p$ 是气压。前三个方程是运动方程,左边前四项代表加速度,其中的平流项均是非线性项,含有气压 $p$ 的项是气压梯度力项,含有算子 $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 的项是黏性力项。第三个运动方程中 $\theta$ 表示浮力项,第一、二个运动方程中含有 $1/R_0$ 的项代表柯里奥利力项。第四个方程为热力学方程,第五个方程表示质量守恒的连续性方程。

(1·12)式中的无因次参数为

$$\begin{aligned}
 R_0 &= \frac{v}{fL} = \frac{\text{水平惯性力}}{\text{柯里奥利力}} && \text{叫 Rossby 数} \\
 R_e &= \frac{vL}{\nu} = \frac{\text{惯性力}}{\text{黏性力}} && \text{叫 Reynolds 数} \\
 p_r &= \frac{\nu}{\chi} = \frac{\text{分子黏性系数}}{\text{热传导系数}} && \text{叫 Prandtl 数} \\
 R_i &= \frac{N^2}{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} = \frac{\text{湍流的浮力因子}}{\text{湍流的剪切因子}} && \text{叫 Richardson 数}
 \end{aligned}
 \tag{1 \cdot 13}$$

其中  $N^2 = \frac{g}{\bar{\theta}} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}$ ,  $N$  为布朗特(Brunt)频率, 白天  $N^2 < 0$ , 称为不稳定层结; 晚上  $N^2 > 0$ , 称为稳定层结。  $\bar{\theta}$  表示大气平均位温分布。在讨论对流时, 常用 Rayleigh 数

$$R_a = - p_i R_z^2 R_i \quad (1 \cdot 14)$$

所以, 热对流时  $R_a > 0$ , 就相当于  $R_i < 0$ , 即白天大气情况。而晚上  $R_i > 0$ , 就相当于  $R_a < 0$ 。

## § 1.2 非线性的效应

上面已经看到, 事物的相互作用正是非线性的反映。但是, 由于非线性的数学处理的难度大, 而我们常常熟知的只是线性的理论和分析, 例如线性代数方程、常微分方程、偏微分方程的求解。究竟非线性会产生一些什么效应呢?

### 1. 饱和效应

在线性分析中常要讨论线性系统中定常状态的演化问题, 例如人口模型(1.5)式令其右端为零求得  $x=0$ , 它代表系统(1.5)的定常状态。若由于种种因素对  $x=0$  有一个偏离  $\delta x$ , 那么这个偏离  $\delta x$  随着时间增加会越来越大呢, 还是越来越小呢? 若是前者, 则称定常状态  $x=0$  是不稳定的, 若是后者, 则称  $x=0$  是稳定的。显然在(1.5)式中的  $x$  用  $0 + \delta x$  代替, 则导得  $\delta x$  满足和  $x$  相同的线性方程

$$\frac{d(\delta x)}{dt} = a(\delta x) \quad (1 \cdot 15)$$

由于  $a > 0$ , 与(1.6)式类似它的解为

$$\delta x \sim e^{at} \quad (1 \cdot 16)$$

因此随着时间  $t$  增加,  $\delta x$  要趋向无穷。

若在(1·15)式中考虑环境(包括战争)和食物的影响, 则变成非线性方程

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 \quad (1 \cdot 17)$$

此时若有一扰动  $\delta x$  偏离  $x=0$ , 它就不会趋向无穷。因为(1·17)式右端为零时, 它还有另一个定常状态,  $x^* = \frac{a}{b}$ , 则方程(1·17)可以写成

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -bx\left(x - \frac{a}{b}\right) \\ &\sim -bx^*(x - x^*) \end{aligned} \quad (1 \cdot 18)$$

因此  $x - x^* \sim e^{-bx^*t}$ , 这就是说当  $t \rightarrow +\infty$  时,  $x - x^* \rightarrow 0$ , 因而  $x \rightarrow x^*$ 。

这就说明, 由于系统(1·17)变成非线性的以后, 解或扰动  $\delta x$  就不会无限制增长而变成饱和到一个有限的值  $x^* = \frac{a}{b}$ 。

饱和效应的结果, 可以使非线性系统出现各式各样的形态和斑图(pattern)。

## 2. 形态多样性

由于事物是相互影响、相互制约的, 必然有竞争, 因而导致多种形态以适应这样竞争的结果。拿人口模型来说, 若不考虑环境因素, 人口只能无限增长。但是, 由于人口过多, 环境(包括食物)的影响可以使人口稳定在一个定值  $b/a$  上。

大气运动不断地由冷的和暖的空气竞争而改变。若西伯利亚冷空气南下,遇到的暖空气又很弱,那么我国大部分地区就只能是一种形态——大风降温天气。但是,事实上冷、暖空气是要交锋的,形成降水的锋面,有的地方就形成另一种形态——下雨天气。所以,天气形态是多种多样的——晴天、多云、阴天、刮风、下雨、下雪等等不断地交替,永不休止。

热对流运动也是如此。若是线性的话,热空气上升不断就不会回来;但是由于非线性的热对流  $w \frac{\partial T}{\partial z}$ , 热的空气向上反而降低了上下的温度梯度  $\frac{\partial T}{\partial z}$ , 上面的冷空气又向下,形成对流状态。如大气夏天白天形成的积云;同时空气是有黏性的,驱动力和耗散力的竞争使空气团不断上下运动形成许多对流泡,这就造成另一种形态,积云发展更旺盛形成浓积云;最后上升运动不断凝结成水,而形成积雨云,以降水形态解决驱动力和耗散力的竞争的矛盾。

地球每天都在正常地自转和公转。但每天的天气从来都没有重复过,这些都是非线性的多样性的表现。在一个耗散系统中,除了像(1·17)式那样有多个定常状态而外,还有各种各样的周期状态,更有混沌状态及各种形式的斑图(Pattern)。

### 3. 突 发 性

地球系统中常见的地震、暴雨、大风、台风等现象都具有突发性。既然非线性系统中形态是多样的,由一种形态演变成另一种形态必然具有突发性。在动力系统中一般说控制系统状态的参数是连续变化的,但是状态却是突变的,