高等專業學校教學用書

測量誤差的理論基礎

Н. С. ПЕТЛОВ 著
黃駿 毛善培 譯

高等教育出版社

中等專業學校教學用書

測量誤差的理論基礎

H. C. 彼得羅夫著
黃　駿　毛善培譯

高等教育出版社

本書係根據蘇聯國立煤礦科技書籍出版社(Государственное научно—техническое издательство угольной литер ры)出版的彼得羅夫(Н. С. Петров)著"測量誤差的理論基礎"ошибок измерений)1953年版譯出。原書經蘇
審定爲採礦中等技術學校"礦山測量"專業學 紹了測量誤差的基本理論及平差的方法。

本書由毛善培、黃駿合譯。

測量誤差的理論基礎

書號84(課79)

彼得羅夫著

黃駿 毛善培譯

高等教育出版社出版

北京琉璃廠一七〇號

(北京市書刊出版業營業許可證出字第〇五四號)

新華書店總經售

商務印書館印刷廠印刷

上海天通菴路一九〇號

開本787×1092 1/25 印張3 8.5/12.5 字數 68,000

一九五四年九月上海第一版 印數 1—4,000

一九五四年九月上海第一次印刷 定價 ¥5,900

原　序

蘇聯國民經濟各部門進一步的發展及蘇聯人民的物質福利、保健事業和文化水平的提高，是黨十九次代表大會關於第五個五年計劃的指示。第五個五年計劃意味着我們國家沿着發展的道路，從社會主義向共產主義邁進了新的一大步。

隨着蘇聯國民經濟各部門的發展，蘇聯科學也發展着；它幫助蘇聯人民充分地發掘及更好地利用天然富源與自然潛力，改進社會主義的生產。

社會主義生產不斷地增長與改進，也要求比較詳細地研究那些過去因爲許多原因而沒有普及的各部門的知識。

本書所討論的測量誤差理論基礎，可作爲一個實例。其中全部的知識在目前對於地形測量者及礦坑測量者是必需的。

由於複雜的工程及水工建築物規模的巨大，礦業（特別是煤礦業）的發展，對地形測量及礦坑測量工作的進行，有了新的要求。

當設施現代化最巨大的水工建築物及其他複雜的工程結構，或者在具有長距離坑道的現代化煤礦井中進行礦坑工作時，地形測量者和礦坑測量者不但要能很好地完成測繪工作，而且還要能判斷這些成果的精度。

過去，礦坑測量者的業務，基本上局限於深度不大的坑道測量，而現在，當坑道很長，開鑿速度很大時；當從相對兩面開鑿礦山坑道時，測量誤差的累積之計算，具有特別重大的意義。

在現代化的礦山技術水平，礦山工作的規模及速度之情況下，鞏固的及足夠深刻的測量誤差理論的知識，對於礦坑測量者是需要的，而且是必要的。

測量誤差理論是專門的（實用的）課程，早就被研究得很完善。現

有的測量誤差理論的書籍都是高等學校的教科書或教材；因而，中等技術學校的學生就很難看懂。

因此有必要編寫適用於中等技術學校的關於測量誤差理論基礎的教材，它必須符合於教學大綱及培養礦坑測量技術員所要求的水平。

本書適用於礦業中等技術學校中“礦坑測量”專業的學生，其內容符合於蘇聯煤礦工業部教育司所頒佈的測量誤差理論的教學大綱。

本書僅討論測量誤差理論的基本問題及有關平差計算的一般知識，這些知識對於學習專門課程：“礦坑測量”及“礦區三角測量”是必需的；這兩門課中研究測量工作最後成果的誤差之估算方法以及根據最小二乘方的法則討論礦區三角測量的平差。

測量誤差理論之基本問題的探討，都附有最簡單的例題；爲了使學生能善於應用測量誤差理論去解決在礦坑測量及地形測量中所遇到的實際問題，這些例題是必要的。

本書所採用的測量誤差理論講述的次序，力求合乎邏輯的聯貫性以及發生在實際測量工作中個別理論問題的協調。

有關本書的任何批評，作者是非常歡迎的。

原稿經技術科學博士 Ф. Ф. 巴夫洛夫教授校訂，並經技術科學候補博士 Б. А. 羅曼諾夫副教授提出審查意見，作者表示深切感謝。

目　錄

測量誤差的理論基礎

第一章　測量的誤差

§1. 測量誤差的一般知識

在地形測量及礦山測量的過程中，常須丈量距離與觀測角度，以及兩者同時進行的機會也很多。

任何一種測量的任務就是通過與作為測量單位的一種相比較的方法來確定測量量的大小。例如，當丈量經緯儀導線邊的時候，用鋼卷尺或輕便卷尺的長度單位表示相隣兩點中心間的直線實長。當測量多邊形之水平角時，用度盤之刻度表示多邊形相隣兩邊的水平投影間之實際角度的數值。

由於我們感官上和測量儀器的缺點、進行測量時環境之變遷，以及許多其他因素，以致不可能求得測量量的眞實尺寸；也就是說，任一量的測量不是絕對精確的。我們僅能在某種程度上找出該量眞值的近似值❶。

測量的近似程度或精度，以測量誤差的大小來表示。

測量量的眞值及測得值的差數，即為測量的誤差。這種眞值與測得值之差，稱為測量之眞誤差。

如以 L 表示測量量長度之眞值；l 表示測得的數值（圖 1），則測量之眞誤差 δ 由下式決定

$$\delta=L-l。\tag{1}$$

誤差 δ 之值可正可負，它決定於測得值 l 是小於還是大於眞值 L。

❶ 測量量在施測時之實際大小，即為該量之眞值。

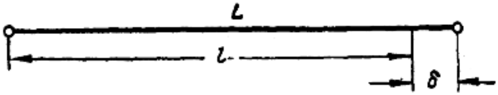

圖 1

誤差的大小與測量之精度有一定的關係。

測量誤差愈大,則測量精度愈低;反之,誤差愈小,精度愈高。

測量誤差之大小首先決定於儀器或工具的精確性及施測的方法。

若以步量長度,其誤差之値比以卷尺丈量同一長度時來得大。因此,要提高測量的精度(減少誤差),必須採用較精密之儀器及較完善之施測方法。

在某種範圍內,也可用增多複測次數以提高測量的精度。

進行地形測量及礦山測量時,確定每個單獨測量的誤差,測量結果的誤差以及由間接方法(間接測量)所得到的數値之誤差的本領,是很重要的。研究確定誤差之方法,爲測量誤差理論的主要內容。

測量誤差理論的任務,在於研究確定測量誤差及測量量函數的誤差之方法。

在轉入討論誤差分類及其確定方法的問題之前,我們先談一下關於絕對誤差與相對誤差的概念。

前面已經說過,任一測量量之眞値與測得値間的差數稱爲測量的眞誤差。眞誤差的數値以測量單位表之,稱爲絕對誤差。絕對誤差永遠是具體的數字,以長度、角度或其他測量單位表示。測量的絕對誤差,往往用字母 m 代表。

根據絕對誤差的大小,不能判斷測量的精度。例如,丈量兩根線:一根長 100 м,誤差爲 ±1 cм,另一根長 2 м,誤差爲 ±1 мм,根據這些絕對誤差的大小,很難講這兩個測量究竟那一個比較精確。

爲便於判斷單獨測量的精度,及互相比較測量的結果,我們引用測量的相對誤差,以 f 表示;相對誤差就是絕對誤差與測量量的比值。

在上述所討論的情況下，長度測量的相對誤差就是絕對誤差 m 與測量線的長度 l 之商。

長度測量的相對誤差以下式表示

$$f=\frac{m}{l}。 \tag{2}$$

分子 m 與分母 l 應取相同的單位；相對誤差 f 爲無因次數；最好以分子等於 1 的分數形式表示。

因而，相對誤差 f 說明了絕對誤差爲實測長度的幾分之幾。

利用公式(2)，求得前述例題的相對誤差分別爲

(1)長爲 100 м 的線之相對誤差

$$f_1=\frac{1\ см}{100\ м}=\frac{1}{10000};$$

(2)長爲 2 м 的線之相對誤差

$$f_2=\frac{1\ мм}{2\ м}=\frac{1}{2000},$$

也就是第二種情況較第一種爲大。

由此可見，長 100 м 的線比長 2 м 的線測得比較精確。

爲了表徵進行的測量，用相對誤差或絕對誤差都可以。例如，當表示多邊形角度觀測的精度時，用絕對誤差或多邊形角度的閉合差；角度觀測的相對誤差是不計算的，因爲角度的誤差與角度的大小無關。

相反地，關於多邊形邊長測量的精度，多半是根據長度測量的相對誤差。或多邊形測站座標的增量之相對誤差判斷。與此相適應地在絕對或相對值中有規定的容許差額。

以前曾指示，角度觀測的相對誤差不計算；但在某幾種情況下以無因次數表示角度誤差的大小較爲方便。因此，將角度的誤差 m_β，以一不變的角值 ρ (等於 1 弧度) 除之。在比值 $\frac{m''_\beta}{\rho''}$ 中，角度誤差 m_β 與弧度值 ρ 應取同一角度單位，此時角度誤差係以無因次數表示，意卽角度誤差比弧度小多少倍。

我們知道，線長之相對誤差可以看作是縱的相對誤差；而以弧度表示的角度誤差可以看作爲橫的相對誤差，但它與線長無關。事實上，如觀測角 β 的誤差爲 m_β，而此角 $AБ$ 邊長的誤差爲 m_l（圖 2），則由於長度誤差 m_l，點 $Б$ 沿測量線移動，例如移到 $Б_1$ 的位置；而又由於角度誤差 m_β，點 $Б_1$ 沿與 $AБ$ 垂直的方向移至 $Б_1'$ 的位置。要從點 $Б$ 位置的誤差來判斷長度及角度測量的精度，必須求出長度測量的相對誤差，並以弧度表示角度的誤差。設 $m_\beta=\pm0.5'$，$m_l=\pm1\ см$，線長 $AБ=40\ м$。

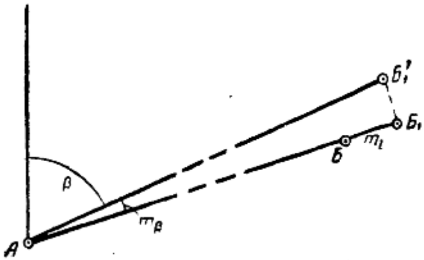

圖 2

長度 $AБ$ 的相對誤差爲

$$f_l=\frac{m_l}{AБ}=\frac{1\ см}{40\ м}=\frac{1}{4000}。$$

此處 f_l 爲點 $Б$ 位置的縱相對誤差。

角度的相對誤差 f_β，即角度誤差（$m_\beta=0.5'$）除以 1 弧度（$\rho'=3438'$）所得之商，爲點 $Б$ 位置之橫相對誤差。

$$f_\beta=\frac{m_\beta}{\rho}=\frac{0.5'}{3438'}=\frac{1}{6876}。$$

比較所得之誤差，知在已知的條件下，點 $Б$ 的位置在垂直於 $AБ$ 線的方向上較 $AБ$ 方向求得精確。

因此，在測量過程中發生測量誤差。測量之精度可以用測量的絕對或相對誤差之大小說明。

§2. 測量誤差的分類

測量誤差可分成三類：

1. 錯誤　由於誤算或漏算而發生。這種誤差是不當心或不正確的測量方法所引起的後果。例如，當丈量長距離時，將卷尺數算錯；當觀測角度時，將度盤刻度整數算錯等等。錯誤使測量結果歪曲，使其對於今後工作不能適用。

錯誤在測量誤差理論中不加討論。

測量應有組織，使錯誤不出現。為要避免錯誤，最好對於同一量進行彼此獨立的重複（校核）測量。

以下將要講到，重複進行測量可以保證較大的精度。

2. 常差或系統誤差　主要由於測量時所應用的儀器不完善而發生。

此外，系統誤差也可能是由於外界的環境所引起；例如溫度對測量儀器的影響；或者由於觀測者個人的特點所致等等。

在一定條件下，這些誤差無論大小或正負號大半都是不變的；因此可以很容易地計算出，作為測量結果的改正數，或者以適當的觀測法之組合將其全部消除。以不準確的鋼卷尺或輕便卷尺丈量距離所發生的誤差可作為系統誤差的例子。卷尺長度與其定額長度（此尺所代表之長度）不同。利用比較卷尺長度與標準長度之方法，可求得改正數之大小。為要消除因鋼卷尺或輕便卷尺大於或小於標準長度而發生之系統誤差，應將改正數加入實測之長度中。

系統誤差有時也可利用適當之觀測法的組合消除。例如用正倒鏡進行測角，經緯儀的視準差即能消除；游標盤之偏心差可取兩游標讀數的平均值作為結果以消除。

在測量誤差理論中，系統誤差與錯誤同樣地不加討論。

3. 偶然誤差　偶然誤差是抽象的，是因為我們感官的缺點及儀器

的不精密所引起的；它不能以數字決定；不能利用適當的觀測法消除。例如讀數的誤差：測角時讀游標；量長度時讀鋼卷尺或輕便卷尺；高程測量時讀水準尺。十字絲與物像不密切重合之照準誤差屬於偶然誤差，它是由於我們視覺上的缺點及望遠鏡放大率不足而引起的。

偶然誤差之來源很多。它的起因不僅是觀測者感官上及所用工具的缺點，如進行測量時的條件及觀測者之經驗，甚至與其精神上及肉體上的情況都有關係。

因偶然誤差的大小及其正負號不能計算出，因此無法避免偶然誤差對測量結果的影響。

總起來說，測量的偶然誤差不能算出來，也不能消除，因此它主要地決定了測量結果的精度。

基於這個原因，測量誤差理論中僅僅討論與偶然誤差有關的問題。整個誤差理論都從一個假定出發，就是測量的錯誤和系統錯誤已全部消除。因爲，爲了不與理論上的結論發生矛盾，測量時不能發生錯誤，而且應把所有系統誤差消除，或者測量結果中的系統誤差小於偶然誤差。

§3. 偶然誤差的基本特性

下述建立在實驗基礎上的基本特性是從偶然誤差性質的概念出發的。

第一特性：正負偶然誤差的數目相等。

事實上，量距時讀尺或測角時讀遊標，讀數可能比實際的小一些或者大一些；我們可以想像得到，它們的或然率應該相等。因此，當多次觀測時，沒有理由假定正誤差比負誤差碰到得多；或者相反，負誤差比正誤差出現得多。因而關於正負誤差數目相等的可能性之假定是正確的。

設某量的眞值爲 L，共測量了 n 次；$l_1, l_2, l_3 \cdots l_n$ 爲量 L 之實測

值。

計算這些實測值與眞值之差，即得：

$$L-l_1=\delta_1$$
$$L-l_2=\delta_2$$
$$L-l_3=\delta_3$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$L-l_n=\delta_n。$$

根據偶然誤差的第一特性，測量誤差 $\delta_1, \delta_2, \delta_3\cdots\delta_n$ 中，正誤差與負誤差數目均等；並且觀測次數愈多，這種假設也就愈準確。

第二特性：大小相同的正負誤差出現機會相等。

事實上，例如讀游標或卷尺時，我們沒有理由斷言（設系統誤差的影響已經消除）偶然誤差 $+\delta$ 比 $-\delta$ 容易發生。如果同一觀測者以同一儀器，在不變的外界環境下進行多次觀測，則完全有基礎可以說：大小相等，符號相反的誤差數目均等；並且觀測次數愈多，此偶然誤差的特性愈行準確。

第三特性：小的偶然誤差比大的偶然誤差出現機會多；並且在一定的測量條件下，後者不會超過已知的極限值。

這個偶然誤差的特性，很明顯，與前兩特性一樣地被多次的實驗研究所證實。

我們記住，上述偶然誤差的特性適用於同精度的觀測。

每個測量是同一觀測者，用同一儀器，在不變的外界環境（天氣情況、溫度、光線強度等）下進行的，稱爲同精度的測量（觀測）。

根據前兩個偶然誤差的特性，我們可以相信下列誤差理論中的非常重要的原理之正確性。

當測量次數無限增多時，同一量的等精度觀測之偶然誤差的算術平均數趨近於零，亦即

$$\lim \frac{\delta_1+\delta_2+\delta_3+\cdots+\delta_n}{n_{n\to\infty}}=0。$$

任一量的總和可以簡單地以方括弧表示之。今可寫成

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[\delta]}{n}=0。\qquad (3)$$

事實上，如將一系列測量的全部誤差加起來，則正誤差被負誤差抵消。無論誤差的數目如何增加，但是誤差的總和仍然是比較小的有限值。當 $n\to\infty$ 時，則 $\frac{[\delta]}{n}$ 趨近於零。

如果 $[\delta]$ 與零差得很多，則可能是觀測時沒有消除的系統誤差所生的影響。這種情況下，必須查明系統誤差的來源，並採取消除的辦法。

若測量次數（誤差數目）為 n，而總和 $[\delta]=A$，則系統誤差的大小等於 $\frac{A}{n}$。

§4. 算術平均值

如對同一量進行一系列的同精度觀測，則必然發生一個問題：究竟取那一個作為測量的最後結果呢？

設 $l_1, l_2, l_3\cdots l_n$ 為 n 次觀測的結果，該量之真值等於 L。

這種情況下，並不是取某一觀測值 l_i，而是取全部觀測值的算術平均數作為測量的結果，即全部觀測值的總和被觀測次數所除之分數

$$X=\frac{l_1+l_2+l_3+\cdots+l_n}{n}。\qquad (4)$$

引用方括弧作為總和的簡單符號，寫成

$$X=\frac{[l]}{n}。\qquad (4\,a)$$

式中 X—測量結果（全部觀測值之算術平均數）；

$[l]$—L 量觀測值的總和；

n—觀測次數。

被用作測量結果的算術平均數 X 與 L 量最為接近。

根據以下的討論,可以使我們相信這個結論。

因爲偶然誤差 δ_i 爲觀測量的眞值 L 與觀測值 l_i (圖 1) 的差數,即 $\delta_i=L-l_i$, 因此,觀測量的眞值 L 可以下式表示

$$L=l_i+\delta_i。$$

這樣,我們以觀測值 l_i 和偶然誤差 δ_i 表示觀測量 L 的眞值,並求全部數值之總和,得

$$\begin{aligned}
L&=l_1+\delta_1\\
L&=l_2+\delta_2\\
L&=l_3+\delta_3\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
L&=l_n+\delta_n\\
\hline
nL&=[l]+[\delta]。
\end{aligned}$$

以 n 除等式之左右兩邊,得

$$L=\frac{[l]}{n}+\frac{[\delta]}{n}。\tag{4 б}$$

令 $n\to\infty$, 則根據偶然誤差之特性,可知 $\frac{[\delta]}{n}=0$。此時,式(4 б)可寫成下式

$$L=\frac{[l]}{n};$$

即如果觀測次數 n 爲無窮大,則觀測量的眞值等於全部觀測值的總和被觀測次數除得之分數。

事實上,對任何量我們都無法進行無窮多次的觀測,因而實際上不可能得到觀測量的眞值。

當測量時,常爲有限的觀測次數所局限,總和 $[l]$ 被測量次數所除之分數不等於 L 量的眞值,而 X 値多多少少是接近 L 的,稱爲觀測量的最或是值。並且,施測次數愈多,算術平均數愈接近 L。

因此,重複觀測進行得愈多,則算術平均數 X 對觀測量的眞值 L

的接近程度愈高。由此得出一條規律：觀測次數愈多，測量結果 X 愈接近測量量的眞值 L。因而測量的誤差也愈小。

根據以上說明，我們得出結論：算術平均值爲測量量的最或是值，並認爲是測量的最後結果。

我們現在討論求算術平均值的方法；因爲任何的多次觀測都要碰到這個問題。

1．求下列數字的算術平均值：2.5；2.6；2.7；2.9 和 3.0。

將上列數值代入公式(4)，得

$$X=\frac{2.5+2.6+2.7+2.9+3.0}{5}=\frac{13.7}{5}=2.74。$$

2．求某角的五次等精度觀測的算術平均值：53°11′45″，53°11′51″，53°11′48″，53°11′58″，53°11′53″。

在此例中，若以公式(4)計算算術平均值，對具體數字的計算要化很多時間。第一例中所採用的方法，這裏是不適合的。

爲了減化算術平均值的計算，可按下列方法進行。設 $l_1, l_2, l_3\cdots l_n$ 爲一系列的觀測值，於其中減去一接近算術平均值的任意值，並求差數的總和。

$$\begin{aligned}
l_1-l_0&=\Delta l_1\\
l_2-l_0&=\Delta l_2\\
l_3-l_0&=\Delta l_3\\
&\cdots\cdots\\
l_n-l_0&=\Delta l_n\\
\hline
[l]-nl_0&=[\Delta l]。
\end{aligned}$$

以觀測次數 n 除等式之左右兩端，卽得：

$$\frac{[l]}{n}-l_0=\frac{[\Delta l]}{n}$$

或

$$X=l_0+\frac{[\Delta l]}{n}。\tag{4B}$$