

上海徐汇教育丛书

# 中学

# 物理中的 数学方法

● 张培荣 彭 和 蔡 科 著

上海交通大学出版社

徐光啟  
傳

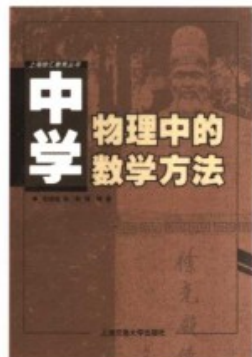


责任编辑 / 韩正之  
封面设计 / 黄展新  
摄影: 魏克

www.jiaodapress.com.cn  
bookinfo@sjtup.edu.cn

http://www.xhedu.sh.cn

徐汇教育名片  
中国教育学会教育改革实验区  
科技部·教育部等五部委科技教育实验区  
全国「双基」先进区  
联合国教科文组织亚太教育创新发展服务计划  
中国联系中心



## 《徐汇教育丛书》第一辑书目：

- 从 $a_n$ 到 $a_{n+1}$
- 学好政治也不难
- 中学物理中的数学方法
- 都是 $f()$ 惹的祸!

ISBN 7-313-03439-3



9 787313 034397 >

ISBN7-313-03439-3/G·543

定价: 11.00 元

上海徐汇教育丛书



# 中学物理中的数学方法

编著 张培荣 彭 和 蔡 科

上海交通大学出版社

## 内 容 提 要

本书从数学方法角度讲解如何解答物理题目。在总的介绍了在物理解题过程中经常采用的数学方法之后,就高中物理中各个部分的解题方法进行分类举例,并附有习题供练习用。书中介绍的解题方法巧妙、简单、实用,可以作为提高学生解题能力的训练教材,也可供物理成绩较好的学生提高用。书中附有练习的解题提示和答案。

### 图书在版编目(CIP)数据

中学物理中的数学方法/张培荣,彭和,蔡科编著.  
—上海:上海交通大学出版社,2003  
(上海徐汇教育丛书)  
ISBN 7-313-03439-3

I. 中… II. ①张…②彭…③蔡… III. 物理学  
—数学方法—中学—教学参考资料 IV. G633.73

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 061711 号

### 中学物理中的数学方法

张培荣 彭 和 蔡 科 编著

上海交通大学出版社出版发行

(上海市番禺路 877 号 邮政编码 200030)

电话:64071208 出版人:张天蔚

上海交大印务有限公司印刷 全国新华书店经销

开本:880mm×1230mm 1/32 印张:7.25 字数:204 千字

2003 年 10 月第 1 版 2003 年 10 月第 1 次印刷

印数:1—6 050

ISBN 7-313-03439-3/G·543 定价:11.00 元

---

版权所有 侵权必究

## 编辑委员会

**主 编:**杜 俭(副教授,上海市徐汇区教师进修学院院长、徐汇区教育学会会长)

**常务副主编:**陈永明(上海市徐汇区教师进修学院教授)

**副 主 编:**唐盛昌(特级教师、特级校长、上海市上海中学校长、上海市教育功臣)

包 霞(中学高级教师,上海市徐汇区教师进修学院副院长)

**编 委:**钱耀邦(特级教师,上海市南洋模范中学校长)

张正之(特级校长,上师大附中校长)

任博生(中学高级教师,上海市位育高级中学校长)

沈建华(中学高级教师,上海市第二中学校长)

王以权(特级教师,上海市南洋中学校长)

罗佩明(特级教师,特级校长,上海市世界外国语中学校长)

李雄豪(特级教师,上海市西南模范中学校长)

张培荣(特级教师)

陈友勤(特级教师)

陆保谦(特级教师)

经正阳(特级教师)

杨兰石(中学高级教师)

庄小凤(中学高级教师,上海市第二中学副校长)

# 序

记得余秋雨教授在他的《文化苦旅》中关于徐汇区有这么一些话：“我认为上海文明的肇始者，是明代进士徐光启……”，“其安葬地以后也是他的家族世代汇居地，开始称为‘徐家汇’。”“……徐家汇成了传播西方宗教和科学文明的重镇。”并提出“因此有人认为，如果要把上海文明分个等级，最高的一个等级也可名之为徐家汇文明。”

秋雨先生的这番评价，着实让徐汇人深感历史赠予的一份厚礼，令我们自豪；历史的馈赠又赋予我们更重的使命和责任，使我们不息地前行。的确，徐汇有着辉煌的文明史，有着深厚的文化底蕴。

在徐汇这块土地上，安息着古代纺织专家黄道婆，沉睡着近代文明的播火者、《几何原本》的翻译者徐光启，也浸渍了左联作家柔石、殷夫等前辈不屈的足印。

在徐汇这块土地上，近现代的大教育家蔡元培、著名音乐家贺绿汀、著名诗人柯灵等一大批文学艺术家曾生活或工作于此。目前生活或工作在徐汇区域内的有文学巨匠巴金；还有各领域的顶尖人才，包括在上海的近一半两院院士。

在徐汇这块土地上，集聚了10多所高等学府，有著名的上海交通大学、复旦大学医学院（原上海医科大学）、上海音乐学院等著名大学。同时，还集聚了一批声誉好质量高的中小学，是全市重点中学最集中的区。其中有全国著名的上海中学、南洋模范中学等一批重点学校；有6所百年老校，包括全国西洋式办学最早的学校——徐汇中学（创建于1849年）。成人教育领域也出现了如前进进修学院这样的知名品牌教育。

在徐汇这块土地上，汇聚了众多的科研院所。有中国科学院上海分院和它所属的上海天文台、有机化学研究所、药物研究所、植物生理研究所等10多个研究机构；有上海科学院和它所属的10多个研究机

构；有中央部委、集团总公司，以及局属和高校所属的各种研究机构 100 多个，其中包括上海市教育科学研究院。近年来还诞生了许多民办的研究所。著名的国家级漕河泾高科技园区也设在徐汇区内。

在徐汇这块土地上，各类学校培养了千千万万各类人才，其中包括数学泰斗吴文俊院士。同时，也造就了一批名师，如德高望重的赵宪初老师。新近，上海市评出了 9 位教育功臣，其中周小燕、唐盛昌和顾泠沅就工作于徐汇区区域内的教育单位和机构。除了上面提及的几位杰出教师之外，区内还有相当数量的特级教师、拔尖人才、学科带头人、中青年骨干教师，形成了优秀教师的人才“金字塔”。他们有着丰富的教学经验，是我区的宝贵财富。

在徐汇这块土地上生活着 86 万居民，其中具有大专以上文化程度的占五分之一。高中阶段的入学率已达 98%；已基本普及了十二年教育；高等教育毛入学率为 54% 左右。

徐汇，人杰地灵。她是科学文化的火车头；她是人才的聚宝盆；她是教育的沃土。为了对得起“最高一个等级的上海文明”这样的赞誉，为了对得起数以万计的学子和家长，徐汇的教育工作者始终兢兢业业，不敢有丝毫懈怠，力争做出更新更佳的成绩。2001 年，我区成为中国教育学会教育改革实验区，国家科技部、教育部等五部委授予的《中国青少年科技普及活动指导纲要》实验区，并被评为全国“双基”先进区。2003 年徐汇区教育局又被正式批准成为联合国教科文组织亚太地区“教育革新为发展服务计划”中国联系中心，是目前全国唯一的区县级教育行政部门获批准的 UNESCO-APEID 联系中心。

为了总结我们的教育教学经验，为了和全国的同行们切磋交流，上海市徐汇区教育学会编辑了这一套《上海徐汇教育丛书》。本丛书是学科性质的书籍，涉及语、数、外、理、化等学科。对象主要是学生，也可供教师参考。起点是中等水平的学生，优秀学生亦能从中得益。

本丛书力图体现素质教育的思想和要求，并从这样的角度联系中考和高考。既讲知识，习题，更重视培养能力、素质；既讲传统知识和技能，又体现时代特征（如计算机、计算器，双语等领域）。

本丛书的一本书讲一个专题；每个专题力求有新意。专题可以是

一个重点、难点,也可以是一种思想方法,或者是一个带综合性的课题。

编撰这样一部丛书是一个庞大的系统工程,我们还缺乏经验。希望我们这部丛书对埋头苦读的莘莘学子有所帮助,同时,希望我们这套丛书能够起到抛砖引玉的作用,并得到全国同行的指教。

杜 俭

上海市徐汇区教育学会会长

上海市徐汇区教师进修学院院长

2003年10月



## 目 录

<b>1 数学方法在中学物理中的作用</b> .....	1
1.1 表述物理规律 .....	2
1.2 推演物理过程 .....	4
1.3 处理实验结果 .....	10
1.4 物理与数学的区别 .....	11
<b>2 中学物理中常见的数学方法</b> .....	13
2.1 代数法 .....	13
2.2 几何法 .....	15
2.3 三角法 .....	17
2.4 图像法 .....	18
<b>3 数学方法在中学物理解题中的</b>	
<b>应用</b> .....	21
3.1 静力学问题中的数学方法 .....	21
3.2 直线运动问题中的数学方法 .....	41
3.3 牛顿定律应用中的数学方法 .....	56
3.4 曲线运动问题中的数学方法 .....	78
3.5 功能问题中的数学方法 .....	94
3.6 振动和波问题中数学方法 .....	113
3.7 气体性质问题中的数学方法 .....	127
3.8 电场问题中的数学方法 .....	149
3.9 电路计算中的数学方法 .....	174
3.10 磁场、电磁感应问题中的数学	
方法 .....	196

# 1 数学方法在中学物理中的作用

数学是科学的语言。数学能最简洁、最确切地表示自然现象的客观规律。

物理学是数学化程度最高的科学,物理学与数学的关系也最为密切——物理学的发展不断给数学提供了现实的模型和新的课题,数学的发展又为物理学提供了研究和解决问题的思维手段和重要工具。没有现代的数学,也就没有现代的物理学。

数学首先进入的是天文学和力学。古希腊天文学家首先运用几何学测量了太阳、月亮和地球的相对距离及相对大小,然后又巧妙地运用几何学测量了地球的周长。后来托勒密又建立了完善的天体运动的地心说体系,并创立了三角学;而阿基米德运用几何学的证明方法得出了杠杆原理和浮力定律。16世纪,哥白尼对大量天文观测资料进行严密计算提出了天体运动的日心说,开普勒根据第谷连续20多年的观察数据做了大量艰苦的数学计算,总结出行星运动的第一定律和第二定律,又经过9年的计算,发现了行星运动第三定律。

16世纪,伽利略开始真正把数学引进了力学,他首创了实验-数学研究方法,开辟了用精确的数学分析和总结实验数据为特点的物理学研究道路。标志着物理学的真正开端。而牛顿

则是第一个大量运用数学方法系统地整理物理理论、发现物理规律并取得重大成就的科学家。从牛顿时代起形成的数学-物理法对物理学的发展产生了很大的影响。他将数学与物理、理论与应用紧密地结合起来,扎根于实验和观测,发展了逻辑推理和数学分析,并且在运用数学分析和推演物理问题时,又始终以物理意义为中心。

运用数学解决物理问题的能力,是中学物理教学的要求之一,也是在当前世界科学技术日新月异迅猛发展的形势下对中学物理提出的新的要求。

数学在中学物理中的主要作用有:表述物理规律、推演物理过程和处理实验结果。

## 1.1 表述物理规律

数学化是科学知识理论化的重要条件,无论是概念的构架、定律的表述和知识体系的建立,都只有通过数学化才能取得严格的理论形式。许多物理概念和物理规律都是揭示几个相关物理量间的一种定量关系,用数学形式来定义或表示,也就是把物理问题数学化,这是一种最简洁的方法。

### 1.1.1 物理概念的表述

物理概念是揭示研究对象具有的物理属性的一种思维形式。物理概念包含的所有内容即为物理概念的内涵;该概念的使用范围,以及它解释的一切事物,即为物理概念的外延。

定性的物理概念定义最常用的形式是“属加种差”,例如“物体由于机械运动而具有的能量叫动能”。其中“能量”是属,表示动能是能量之一;“物体由于机械运动而具有的”即“种差”,表示动能与同属中的其他量(即其他能量)的区别。因此,定性的物理概念的定义通常不用数学形式来表示。

定量的物理概念又称物理量。按定义方法的不同分为基本量和导出量。

物理基本量的定义必须采用实验操作来定义,即规定一个标准以及可以与该标准比较的实验具体程序,或称量度法则,常由国际计量大会作出规定。例如长度在国际单位制中是一个基本量,1889年选择一根铂铱合金的米尺作为长度的标准,但保存这种材料的米尺作为世界标准,存在一系列麻烦的问题,1960年计量大会将长度的标准改为充有氪气的放电管中,氪-86单原子所发射的橙红光的波长。标准确定后,就要确定将未知量与标准进行比较的仪器和方法,例如将待测量长度与氪-86单原子所发射的橙红光的波长进行比较的仪器常采用光学干涉仪。质量、时间、电流强度等基本量都是这样定义的。

除了七个基本量之外的物理量都是导出量,物理导出量大都采用数学操作定义,也即提供根据其他能够量度的量来计算它的一套规则。

例如:功的定义  $W = F s \cos \theta$ , 平均速度的定义  $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$  等。在中学阶段,由于数学知识的限制,有些物理量无法用数学式子来表示,例如即时速度,中学数学没有学过微积分,而且高一时也没学过极限,所以在高一物理中只说:物体在某一时刻或某一位置运动的快慢叫即时速度,其实当时间间隔趋向于零时,该段时间内的平均速度就是即时速度,所以学了极限后,即时速度可定义为

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

学了导数后又可将即时速度定义为  $v = \frac{ds}{dt}$ 。

### 1.1.2 物理规律的表述

物理规律常用复合判断来表达。多采用假言判断,又称条件判断,即断定某一事物要具有某一属性,须依赖某种条件的复合判断。如玻意耳定律表述为:一定质量的气体,在温度不变时,压强与体积成反比。也有的物理规律表述时省去了条件,而它的适用范围或条件则另外加以说明,如万有引力定律:任何物体都是相互吸引的,两物体间引力的大小跟物体质量的乘积成正比,跟它们的距离平方成反比。但它只适用于两个质点或两个均匀球体间的万有引力的计算。不管怎样,物理

规律都可以用数学公式来表述,如玻意耳定律可表述为: $p_1V_1 = p_2V_2$  ( $M, T$  不变);万有引力定律可表述为: $F = G \frac{Mm}{r^2}$  等。

物理规律有时还可采用数学中函数的图像来表述。

## 1.2 推演物理过程

为了对某个物理问题给出定量的结果,必须能熟练地综合运用多种数学方法,从物理问题中通过分析、讨论,找出一般规律。

若不善于运用数学方法解开已经布列的方程,往往会只认识了某些特定的表面现象,无法洞察其深刻的内在本质而功亏一篑。例如第谷,连续进行了 20 多年的天文观测,精确测定了约 750 颗星的位置,但他不精通数学,无法从中找出天体运动的规律。以后,开普勒根据第谷观测所得的数据进行大量的计算,才找出了天体运动的三条定律。

推演物理过程主要是不断推理、变换和讨论的过程。

### 1.2.1 推理

物理推理,是由一个以上的物理判断获得另一个新的物理判断的思维形式。根据获得新判断的过程,通常将物理推理分为归纳、演绎与类比推理。不同的推理过程,主体方法不同,但都属于数理推理或逻辑推理。

物理归纳推理就是由个别的物理判断推出一一般性的物理判断,通常使用的有简单枚举归纳和科学归纳两种。

由一个具体的物理判断,就直接得出一般性的物理判断就是简单枚举归纳。在近代物理的发展中常用到简单枚举归纳,例如由“氢原子光谱是分立光谱”的单一物理判断,玻尔提出了原子能级的定态假设这个一般性的物理判断。简单枚举归纳所得出的结论往往只是一种假设,需要进一步验证后才能被科学接受。

科学归纳先分析出众多的研究对象也都具有同样的物理内因,然后再得出与具体判断结论相同的一般性的物理判断。科学归纳也是一

种不完全归纳,它的结论仍有或然性,但由于科学归纳抓住了对物理内因的分析与比较,因而正确的概率显著提高。物理学中的归纳推理大多数都是科学归纳推理。例如,开普勒首先对火星的运动进行研究,他认为哥白尼的思想基本上是正确的,所以他通过数学计算,把第谷从地面观察得到的行星位置转换为太阳不动,而地球绕太阳旋转的太阳中心系坐标,经过了70次试验终于找到了一个与观测结果符合得很好的轨道,但是他发现继续延伸下去,他的轨道与观测结果有 $2/15$ 度的偏差,于是他否定了自己得出的曲线,而采用各种椭圆来作轨道,他根据对火星的大量观测数据进行归纳,得出火星轨道是一个椭圆,且太阳位于火星的椭圆轨道的一个焦点上,以后发现其他行星的轨道也如此,从而进一步从一些已知行星的轨道归纳得出了开普勒行星运动第一定律。

归纳推理中运用了由数学提供的逻辑手段,可以使我们从少量实验或通过局部问题的研究所取得的正确结果,对现象的整体和实质作出合理的判断,或者,可以由实验许可条件下得出的结论,推出难以甚至无法用实验验证的极端情况的结果。

对于实验数据的归纳,还常用到图线法等各种数学方法。

物理演绎推理就是由一般性的物理判断推出个别性的物理判断。一般可分为物理语言演绎和数理演绎。

数理演绎主要靠数学及其与物理学组元(包括观察、实验、概念、规律和理论)的相互关联作工具完成的物理演绎推理。数学与物理组元的关联包括:数学符号本身与物理内涵间的关联以及这些数学符号形成物理量或物理公式后,它们之间在物理学范畴内的相互关联。

**例1** 试用玻意耳定律和查理定律推理想气体的气态方程。

**分析与解:**设一定质量理想气体在初状态Ⅰ时的状态参量分别为 $p_1, V_1$ 和 $T_1$ ,在末状态Ⅱ时的状态参量分别为 $p_2, V_2$ 和 $T_2$ ,并设想该气体先由初状态经一个等温过程变化到中间状态Ⅲ,再经一等容过程变化到末状态Ⅱ,状态Ⅲ的状态参量分别为 $p_3, V_3$ 和 $T_1$ ,如图1-2-1所示,则第一个过程中由玻意耳定律得: $p_1 V_1 = p_3 V_3$ ,而第二个过程中

由查理定律得： $\frac{p_3}{T_1} = \frac{p_2}{T_2}$ 。

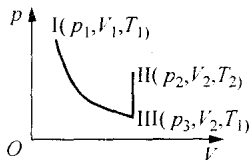


图 1-2-1

将上述两式两边分别相乘，得： $\frac{p_1 V_1}{T_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2}$ 。

评析：在此演绎推理过程中，不仅是简单的数学变换，而且要考虑到这些数学符号所表示的物理量和物理过程以及它们所遵循的物理规律。

物理类比推理是根据不同物理研究对象在某些方面具有相同点的几个物理判断，推出它们在另外的方面也可能相同的新的物理判断。类比推理的结论是或然的，物理学史上，物理类比推理的结论曾被充分肯定而最终又被彻底否定的典型例子就是“磁荷”。

### 1.2.2 变换

根据问题的要求，对物理参量作数学变换，它除了可以方便计算外，还便于分析，容易从中找出某种规律。

**例 2** AB 为一足够长的斜面，倾斜角为  $\alpha = 30^\circ$ ，一小球从 A 点以  $v_0 = 10\text{m/s}$  的初速度作平抛运动，如图 1-2-2 所示，求抛出后经多长时间，小球与斜面的距离最大？最大值为多少？

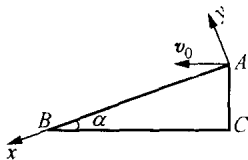


图 1-2-2

**分析与解：**取沿斜面向下方向为  $x$  轴，垂直于斜面斜向上的方向为  $y$  轴，则沿  $y$  向的初速度为  $v_0' = v_0 \sin 30^\circ$ ，加速度为  $a' = -g \cos 30^\circ$ ，

作类上抛运动,到离斜面最远点所需时间为

$$t = v_0' / (-a') = v_0 \sin 30^\circ / g \cos 30^\circ = 0.577 \text{ s},$$

离斜面的最大距离为

$$H = v_0'^2 / (-2a') = v_0^2 \sin^2 30^\circ / 2g \cos 30^\circ = 1.44 \text{ m}.$$

**评析:**本题如采用常规的分解方法,求到离斜面最远处所用时间还比较容易,因为由该时刻的速度方向与斜面平行即可求出,但要求离斜面的最远距离却很难。而现在用了数学上的坐标变换,问题就简化了,只需求解  $y$  方向的运动就行了。

**例 3** 甲从离地  $h$  高处以水平初速  $v_0$  抛出物体 A,同时乙从地面向上以大小相同的初速竖直上抛物体 B,且它们的初速在同一竖直平面内,空气阻力不计,为使 A 和 B 能在空中相遇,设甲、乙两人抛出点的水平距离为  $s$ ,则  $h$ 、 $v_0$ 、 $s$  应满足的条件是 ( )

- A.  $s = h/2$     B.  $s = h$     C.  $v_0 > \sqrt{gh/2}$     D.  $v_0 > \sqrt{gh}$

**分析与解:**取甲为参照系,则甲静止,乙的初速度为  $\sqrt{2}v_0$ ,方向与水平面成  $45^\circ$ ,加速度为零,即作匀速直线运动。要使它们能在空中相遇,甲、乙连线必与水平面成  $45^\circ$ ,如图 1-2-3 所示,则立即可知应有  $s = h$ 。又它们相遇所需时间为  $\frac{h}{v_0}$  或  $\frac{s}{v_0}$ ,要在空中相遇,此时间必须小于乙落回地面所需时间,则有  $\frac{h}{v_0} < \frac{2v_0}{g}$ ,所以  $v_0 > \sqrt{gh/2}$ 。故应选 B, C。

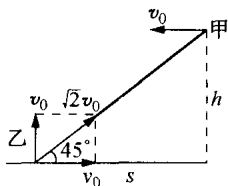


图 1-2-3

**评析:**本题作了参照系的变换,使问题的解决得到简化,在运动学中遇到两个物体运动时常采用此法将问题转化成一动一静的问题来求解。

**例 4** 将质量为  $m$  的物体由离地心  $2R$  处移到地面,  $R$  为地球半



径,已知地球质量为  $M$ ,万有引力恒量为  $G$ ,求在此过程中万有引力对物体做的功。

**分析与解:**此过程中万有引力不断改变,是变力做功,因此我们采用微元法,把此过程分成无限多个小段,如图 1-2-4 所示,各分点离地心的距离分别为  $r_1, r_2, \dots, r_n$  等。则在第  $k$  到第  $k+1$  小段中万有引力对物体做的功为

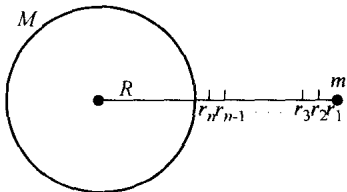


图 1-2-4

$$\begin{aligned} W_k &= G \frac{Mm}{r_k^2} (r_k - r_{k+1}) \\ &= G \frac{Mm}{r_k r_{k+1}} (r_k - r_{k+1}) \\ &= GMm \left( \frac{1}{r_{k+1}} - \frac{1}{r_k} \right), \end{aligned}$$

整个过程中万有引力做的功为

$$\begin{aligned} W &= W_1 + W_2 + \dots + W_n \\ &= GMm \left( \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_{n-1}} \right) \\ &= GMm \left( \frac{1}{r_n} - \frac{1}{r_1} \right) \\ &= G \frac{Mm}{2R}. \end{aligned}$$

**评析:**本题解题关键是作了  $G \frac{Mm}{r_k^2} = G \frac{Mm}{r_k r_{k+1}}$  的变换,使推导能顺利进行。所以变换有时是很重要的解题技巧。

### 1.2.3 讨论

讨论就是根据物理原理对所列出的数学式作求解可能方向或途径