冲击振动理论与应用

陈庆生 编著

国防工业出版社

冲击振动理论与应用

陈庆生 编著

国防工业出版社

内容提要

本书论述机械振动基础理论及其工程应用。全书分为三个部分。第一部分为线性系统，其中包括单自由度系统、二自由度系统和多自由度系统。第二部分为连续系统、非线性系统和随机振动。第三部分为冲击振动理论在引信技术中的应用。本书在理论叙述上力求深入浅出并注重工程应用。

本书是为高等院校编写的教材，也可供有关专业工程技术人员参考。

冲击振动理论与应用

陈庆生 编著

*

国防工业出版社出版

（北京市车公庄西路老虎庙七号）

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印刷

*

787×1092 1/16 印张10 224千字

1989年5月第一版 1989年5月第一次印刷 印数：0,001—1,240册

ISBN 7-118-00471-5/TJ·31 定价：2.05元

前　言

振动理论是机器、火炮、弹药、引信设计的基础理论。机器运行、火炮发射、导弹飞行无不伴随着振动。进行结构动力与振动分析是保证机器、火炮、弹药、引信等具有良好的性能和可靠性的必要条件。今天，振动理论已成为工程技术人员进行产品设计、性能分析所必须具备的基础知识。随着电子计算机的广泛应用和新的振动测量仪器的问世，振动理论有了重要发展，已经推广应用到科学技术的许多领域。在高等工科院校中，振动理论已成为不少专业的必修课。

本书是在多年从事教学和科研的基础上编写的，其中包括线性系统、非线性系统、连续系统、随机振动以及振动理论在引信技术中的应用。在编写过程中曾参考了美、苏、英、法等国家的有关著作。

本书由王宝兴、谭惠民副教授主审。马宝华教授在审阅手稿过程中，曾提出宝贵的意见和建议。兵工教材编审室孙业斌编辑热情支持本书的出版工作。作者仅向以上各位致以深切谢意！由于作者水平有限，书中肯定有许多需要改进之处，恳请读者批评指正。

陈庆生

1987 年 10 月 16 日

目　录

第一章　绪　　论

1-1　课程的意义与研究对象

机械振动是物体或结构的振荡运动，它可以是连续的，也可能是瞬时的。某些情况下机械振动是有益的、有用的，例如振动试验设备、振动送料设备、风钻、各种乐器等。但在一些情况下，机械振动是人们所不希望的，甚至是有害的。机械振动理论在机械工程、建筑工程、土木工程、地质学、物理学、医学等自然科学与技术科学中均有广泛的应用。特别是在兵器系统的设计与生产过程中，机械振动理论尤为重要。火炮发射过程产生强烈的振动，这不仅关系到火炮的强度，而且影响着射击精度。火炮发射过程的最新研究表明，如果装药结构不合理，由火药气体和药粒形成的两相流对弹底的冲击有可能起爆弹丸主装药。引信系统的冲击与振动，就其本质来说，也属于机械振动。在计算引信零件强度、校核引信火工品安定性时，应考虑发射过程所引起的冲击与振动。这种振动还会影响近炸引信收发机、放大器、执行电路的工作特性。引信在装卸、搬动、运输过程中振动将是不可避免的。粗率的装卸、意外的跌落可能导致引信安全系统失效。航空母舰上的作战飞机在弹射起飞和拦截着陆时，引信也将受到很大的冲击载荷。空投弹药时引信安全系统将经受严峻的冲击考验。特别是降落伞开伞失效时，这种冲击将更为严重。综上所述，可以说引信在它的整个寿命期是处于冲击振动环境之中的。至于引信生产过程和验收过程中，各种机器和试验设备的运行无不与机械振动有关。研究振动理论的最终目的是确定振动对所研究的系统的性能与安全性的影响。而对振荡运动的分析是走向这一目标的重要一步。

1-2　机械振动系统的分析方法

机械振动系统一般应按下列三个阶段进行分析：第一阶段是建立系统的物理模型；第二阶段是根据物理模型写出运动微分方程，即建立系统的数学模型；第三阶段是研究系统对激励的响应。

下面加以详细讨论。

1-2.1　建立物理模型

任何真实系统的建模都必须作一些简化假设。例如，把某些分布质量看作是集中质量；把非线性弹簧简化为线性弹簧；求系统的谐振频率时，略去较小的阻尼。甚至在分析过程中，也可以把质量的运动限制在我们感兴趣的方向上。但是，实际的建模过程往往是比较复杂的。一个简单的模型容易进行分析，但其结果往往不够准确；相反，一个复杂的模型难于分析，但是却能给出更为精确的结果。以汽车前轮的振动为例。图 1-1(a)

是该系统的最简单的模型，这里略去了阻尼而且仅仅考虑系统的垂直运动。虽然这一模型很容易分析，但却不能给出多少有用的信息。图 1-1（b）的模型更接近实际，但分析过程就比较复杂。而且模型（b）也只考虑了系统的垂直运动。图 1-1（c）是一个更完善的模型，这里考虑了整个车体的直线运动和转动，当然对这一模型进行分析就必须付出更大的劳动。如果车体不能看作一个刚体，那就必须用有限元方法进行分析了。

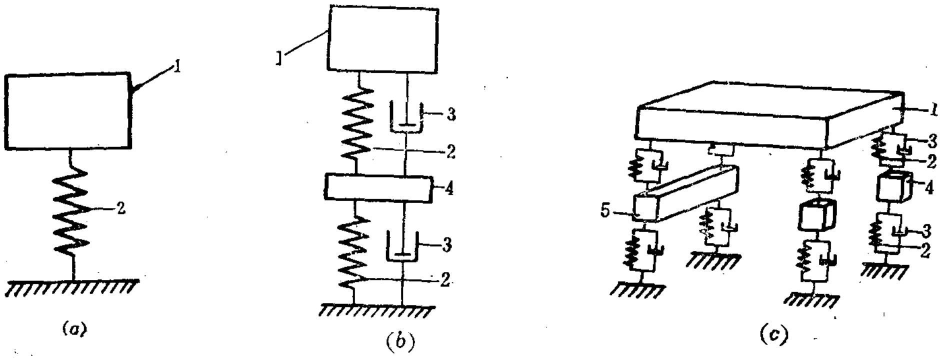


图1-1　汽车前轮系统的简化模型

1—车体；2—弹簧；3—阻尼器；4—非悬挂质量；5—后轴。

引信制动式后坐保险机构的模型建立也是一个典型的例子（图1-2）。惯性筒既有直线运动又有旋转运动，弹簧既受到压缩又受到扭转。在机构运动过程中，惯性筒和支座发生碰撞。初看起来，该机构的数学模型可能是很复杂的。但是，在略去系统阻尼、弹簧扭转等次要因素，并把碰撞过程作分段处理以后，该机构可以简化为单自由度质量—弹簧系统（详见第十章）。

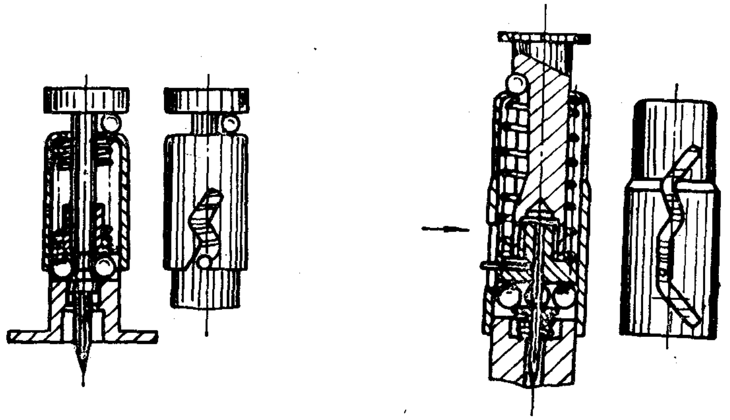


图1-2　制动式后坐保险机构

从上面的例子可以看出，机械振动系统的模型建立并不是一件轻而易举的事，需要周密的分析和适当的技巧。由于模型的近似性，略去一些次要因素是必要的。

1-2.2　建立运动方程

通常是假定系统的参量不变，而且参量之间呈线性关系。这样，系统的数学模型将是常系数线性微分方程。如果分布质量能用集中质量来代替，那么就可以避免用偏微分

方程来描述系统。

根据系统的数学模型可以用不同的方法求出系统的运动方程。方法的选择取决于具体模型和分析者本人。在有些情况下用分离图法可以建立运动方程，但在另些情况下应用能量法，例如拉格朗日方程更为有利。由运动方程可以得到系统的特征方程或频率方程，求得自然频率、振动模态和稳定性。

1-2.3 系统对激励的响应

虽然分析的第二阶段能给出许多有用的信息，但它不能给出系统对特定激励的响应。为了确定系统的动态应力或噪音，必须求出系统对特定激励的响应。激励可以是力也可以是某一部位的运动，可以是简谐的、阶跃的或锯齿形的。这就要根据给定的激励函数求解运动方程。

1-3 自由度

振动系统的自由度是指决定该系统形态所必须的空间坐标数。所谓形态是指该系统的所有质量占有的几何位置。即使最简单的振动系统也具有无限多个自由度。但是在具体结构中，常常可以分离出集中质量，它的变形是可以忽略的。也可以分离出弹性元件，它的质量是可以忽略的，或者可以用等效质量来代替。例如，在图 1-3(*a*) 的质量——弹簧系统中，如果弹簧质量和质块的质量相比很小，并且我们不关心弹簧各圈的运动状态，则该系统就可以看作是单自由度系统。同样，如果图 1-3(*b*) 的转轴质量与转轮相比很小，而且转轮只绕转轴作平面旋转运动，则该系统也是单自由度系统。

图 1-4 是二自由度系统的例子。图 1-4(*a*) 两个质量的位置可以由 x_1、x_2 确定。图 1-4(*b*) 和(*c*) 的梁和支架的质量与质块的质量相比很小，而且其运动限于平面内。图 1-4(*d*) 的质块位置由质心下悬量 y 和转角 θ 确定，当然杆的质量也被略去。

请读者自己分析图 1-5 中各振动系统的自由度。

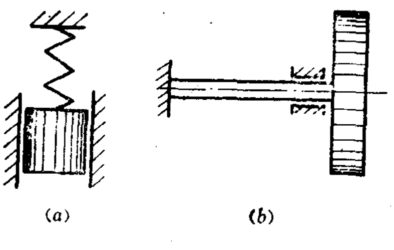


图1-3 单自由度系统

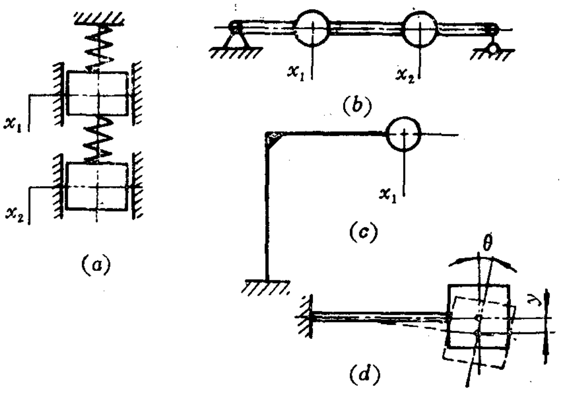


图1-4 二自由度系统

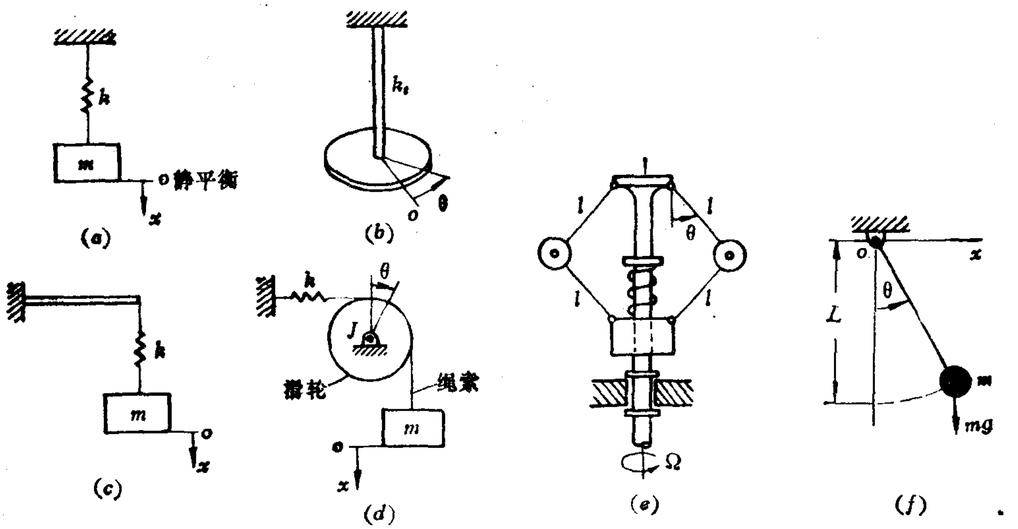


图1-5　机械振动系统

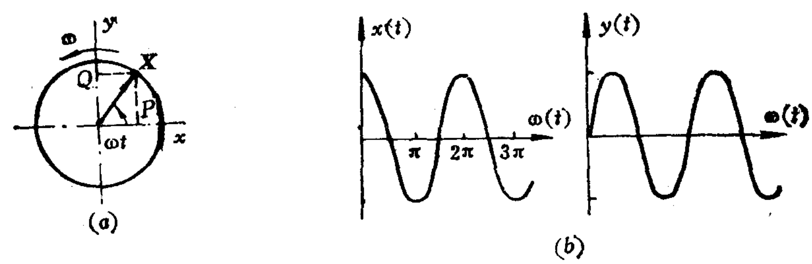


图1-6　用旋转矢量表示简谐运动

（a）矢量表示，（b）简谐运动。

1-4　简谐运动的矢量表示法

用旋转矢量 $\mathbf{X}$ 来表示谐运动是很方便的。它的模是 X，角速度是 ω（图 1-6）。x 轴定义为实轴，y 轴定义为虚轴，旋转矢量可由下列方程表示

$$\mathbf{X}=X\cos\omega t+jX\sin\omega t=Xe^{j\omega t} \tag{1-1}$$

式中 j 为虚数单位即 $j=\sqrt{-1}$，X 为模即矢量长度。

如果给出的简谐函数为 $x(t)=X\cos\omega t$，则它可以表示为 $x(t)=R_e[Xe^{j\omega t}]$。符号R_e 表示函数$Xe^{j\omega t}$ 的实部。同样函数 $y(t)=X\sin\omega t$ 可以表示为 $y(t)=I_m[Xe^{j\omega t}]$。符号 I_m 表示函数 $Xe^{j\omega t}$ 的 虚部。简谐运动是一个往复运动，用旋转矢量表示仅仅是为了方便。应用复变函数可以使这类方程的数学运算简化。但实际上所有的物理量不管是位移、速度、加速度或是力都必定是实量。简谐函数的微分可以用矢量的形式完成，$\mathbf{X}$ 的微分为：

$$\frac{d}{dt}\mathbf{X}=\frac{d}{dt}(Xe^{j\omega t})=j\omega Xe^{j\omega t}=j\omega\mathbf{X}$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{X}=\frac{d}{dt}(j\omega Xe^{j\omega t})=(j\omega)^2Xe^{j\omega t}=-\omega^2\mathbf{X} \tag{1-2}$$

因此，每一次微分等于矢量乘一次$j\omega$。一个矢量乘以j等于将该矢量的相角加 90°，即将该矢量向前旋转 90°。因此，每微分一次等于被微分矢量的模乘以ω并向前旋转 90°。

如果已知$x(t)=X\cos\omega t$，那么位移、速度、加速度之间的关系如下：

位移 $x=\mathrm{Re}[Xe^{j\omega t}]=X\cos\omega t$

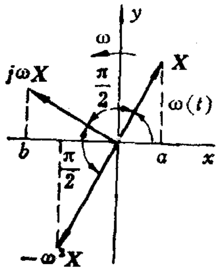
速度 $\dot{x}=\mathrm{Re}[j\omega Xe^{j\omega t}]=-\omega X\sin\omega t$

$=\omega^2X\cos(\omega t+\pi/2)$

加速度$\ddot{x}=\mathrm{Re}[(j\omega)^2Xe^{j\omega t}]=-\omega^2X\cos\omega t$

$$=\omega^2X\cos(\omega t+\pi) \tag{1-3}$$

用旋转矢量表示位移、速度、加速度如图 1-7 所示。由于位移$x(t)$是余弦函数或者说是沿实轴，所以速度和加速度也必沿实轴。因此，相应矢量的实部给出给定时间的相应的物理量。



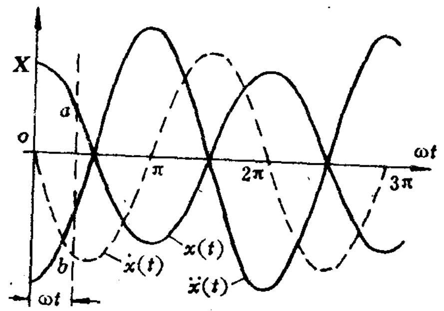


图1-7　位移、速度、加速度矢量

（a）矢量表示；（b）简谐运动。

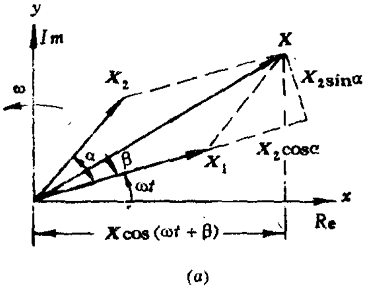
简谐函数可以用图解法，即矢量加法相加。矢量$\mathbf{X}_1$表示$X_1\cos\omega t$，矢量$\mathbf{X}_2$表示$X_2\cos(\omega t+\alpha)$。它们之和表示在图 1-8(a)。

合矢量$\mathbf{X}$的模为

$$X=\sqrt{(X_1+X_2\cos\alpha)^2+(X_2\sin\alpha)^2}$$

相对于$\mathbf{X}_1$的相角为

$$\beta=\mathrm{tg}^{-1}\frac{X_2\sin\alpha}{X_1+X_2\cos\alpha}$$



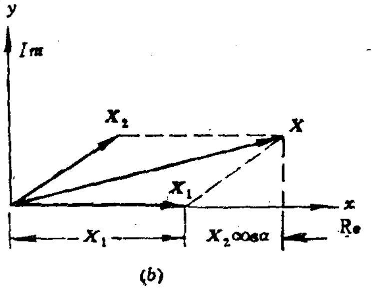


图1-8　谐函数相加的矢量方法

因为原来的运动是沿着实轴给出的，所以简谐运动的和为 $\mathrm{Re}[\boldsymbol{X}]=X\cos(\omega t+\beta)$。加法运算可以顺利地加以扩展来进行减法运算。

由于 $\boldsymbol{X}_1$ 和 $\boldsymbol{X}_2$ 以相同的角速度旋转，因此我们关心的只是它们的相对相角。假定 $\omega t=0$，将是很方便的。矢量 $\boldsymbol{X}_1$、$\boldsymbol{X}_2$ 与 $\boldsymbol{X}$ 就是用这种方法画在图 1-8(b) 上的。$\boldsymbol{X}_2$ 可以表示为

$$\boldsymbol{X}_2=X_2e^{j(\omega t+\alpha)}=(X_2e^{j\alpha})e^{j\omega t}$$
$$=(X_2\cos\alpha+jX_2\sin\alpha)e^{j\omega t}$$

或者

$$\boldsymbol{X}_2=\overline{X}_2e^{j\omega t}$$

$\overline{X}_2=X_2e^{j\alpha}$ 是一个复数并称为复模或矢量 $\boldsymbol{X}_2$ 的相位复矢量。同样 $\overline{X}=Xe^{j\beta}$ 就是 $\boldsymbol{X}$ 的相位复矢量。

简谐函数可以用矢量加法进行代数加法运算，应用与上面相同的函数 $\boldsymbol{X}_1=X_1\cos\omega t$，$\boldsymbol{X}_2=X_2\cos(\omega t+\alpha)$ 则它们的矢量和为

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2=X_1e^{j\omega t}+X_2e^{j(\omega t+\alpha)}$$
$$=(X_1+X_2e^{j\alpha})e^{j\omega t}$$
$$=(X_1+X_2\cos\alpha+jX_2\sin\alpha)e^{j\omega t}$$
$$=Xe^{j\beta}e^{j\omega t}=Xe^{j(\omega t+\beta)}$$

因为简谐运动是沿着 x 轴的。所以它们的和是

$$\boldsymbol{X}=\mathrm{Re}[\boldsymbol{X}]=\mathrm{Re}[Xe^{j(\omega t+\beta)}]$$
$$=X\cos(\omega t+\beta)$$

用旋转矢量来表示简谐运动常常会遇到求两个复数的积的情况。把复数表示为指数形式可以求出它们的积。例如 $\overline{A}$、$\overline{B}$ 两个复数的积为

$$\overline{A}\,\overline{B}=(a_1+ja_2)(b_1+jb_2)$$

或者

$$\overline{A}\,\overline{B}=(Ae^{j\alpha})(Be^{j\beta})=ABe^{j(\alpha+\beta)} \tag{1-4}$$

这里 $A=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$，$B=\sqrt{b_1^2+b_2^2}$ 是复数的模；$\alpha=\mathrm{tg}^{-1}(a_2/a_1)$，$\beta=\mathrm{tg}^{-1}(b_2/b_1)$ 是它们的相角。(1-4) 式表明

$\overline{A}\,\overline{B}$ 的模 $=$ ($\overline{A}$ 的模)($\overline{B}$ 的模) (1-5)

$\overline{A}\,\overline{B}$ 的相角 $=$ ($\overline{A}$ 的相角) $+$ ($\overline{B}$ 的相角) (1-6)

显然乘法运算规则可以推广到除法运算。

〔**例 1**〕 复数计算

(a) $\overline{A}=1+j\sqrt{3}=\sqrt{1+3}(\cos60^\circ+j\sin60^\circ)=2e^{j\pi/3}$

(b) $\overline{A}=\overline{A}_1+\overline{A}_2=(1+j2)+(4+j3)=5+j5$

$$=5\sqrt{2}\underline{/45^\circ}$$

(c) $\overline{A}=\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2=(1+j\sqrt{3})(4+j3)=(2e^{j\pi/3})(5e^{j0.642})=10e^{j(\pi/3+0.642)}$

(d) $\overline{A}=\dfrac{\overline{A}_1}{\overline{A}_2}=\dfrac{1+j\sqrt{3}}{4+j3}$

第二章　单自由度系统理论

2-1　建立运动方程的能量法

保守系统与外界没有能量交换，因此系统的总能量为常量，即系统的动能T与势能U的和为常量

$$T+U=\text{常量}$$

$$\therefore \qquad \frac{d}{dt}(T+U)=0 \tag{2-1}$$

应用式 (2-1)可以导出系统的运动方程。

〔**例 1**〕　图2-1所示为质量m、半径R_1的圆柱体在半径R的圆弧面上的滚动（无滑动）。试用能量法导出它的运动微分方程。

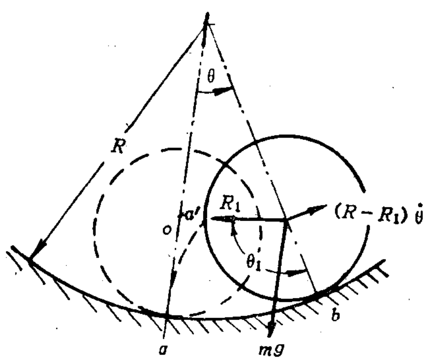


图2-1　在圆弧面上的圆柱

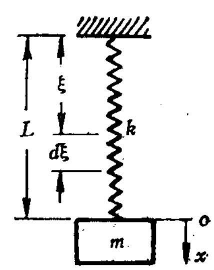


图2-2　弹簧的等效质量

解　柱体的动能由平移和旋转两部分组成。柱体质心的速度为 $(R-R_1)\dot{\theta}$，它的角速度为 $(\dot{\theta}_1-\dot{\theta})$。由于没有滑动，所以$\widehat{ab}=\widehat{a'b}$，$R\theta=R_1\theta_1$。因此角速度可以写成$(R/R_1-1)\dot{\theta}$。柱体的总动能为

$$T=\frac{1}{2}m[(R-R_1)\dot{\theta}]^2+\frac{1}{2}J_0[(R/R_1-1)\dot{\theta}]^2$$

这里，$J_0=\frac{1}{2}mR_1^2$是柱体相对于纵轴的转动惯量。系统的势能为

$$U=mg(R-R_1)(1-\cos\theta)$$

将T、U表达式代入方程(2-1)，给出

$$\left[\frac{3}{2}m(R-R_1)^2\ddot{\theta}+mg(R-R_1)\sin\theta\right]\dot{\theta}=0$$

$$\ddot{\theta}+\frac{2g}{3(R-R_1)}\theta\approx 0$$

这里，在小振动情况下认为$\theta\approx\sin\theta$。它的自然频率$\omega_n=\sqrt{2g/3(R-R_1)}$。

〔例 2〕 若图2-2所表示的弹簧的质量是不能忽略的，试用能量方法确定系统的自然频率和等效质量。

解 假设系统处于静平衡位置时，弹簧 k 的长度为 L。设当弹簧端部位移为 $x(t)$ 时，弹簧中某一点 ξ 的位移为 $\frac{\xi}{L}x(t)$。因此 $x(t)$ 确定了系统的状态，系统只有一个自由度。

系统的动能由质量 m 的动能和弹簧 k 的质量的动能构成。弹簧长度 $d\xi$ 单元的动能为 $\frac{1}{2}(\rho d\xi)\left(\frac{\xi}{L}\dot{x}\right)^2$，$\rho$ 为单位长度的弹簧质量。令 $x=A\sin\omega_n t$，系统的最大动能为

$$T_{\max}=\frac{1}{2}m\dot{x}_{\max}^2+\int_0^L\frac{1}{2}\rho\left(\frac{\xi}{L}\dot{x}_{\max}\right)^2\cdot d\xi$$

$$=\frac{1}{2}\left(m+\frac{\rho L}{3}\right)\dot{x}_{\max}^2=\frac{1}{2}\left(m+\frac{\rho L}{3}\right)(\omega_n A)^2$$

系统的最大势能为

$$U_{\max}=\frac{1}{2}kx_{\max}^2=\frac{1}{2}kA^2$$

由最大动能等于最大势能

$$\frac{1}{2}\left(m+\frac{\rho L}{3}\right)(\omega_n A)^2=\frac{1}{2}kA^2$$

求得自然频率为

$$f_n=\frac{\omega_n}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m+\rho L/3}}$$

上式表明弹簧的等效质量为$\rho L/3$。如果一个重的弹簧下面悬挂一个轻的质量，在计算频率时弹簧的质量将有较大的影响。当弹簧的质量和质块的质量相等时，用这种方法计算所带来的误差小于 1 %。

2-2 能量法——拉格朗日方程

应用拉格朗日方程可以导出振动系统的运动方程。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}}\right)-\frac{\partial T}{\partial q}+\frac{\partial U}{\partial q}=Q \tag{2-2}$$

式中，T 为系统动能，U 为系统势能，q 为广义坐标，Q 为广义力。

〔例 3〕 一根直杆的一端悬挂在铰链上(图2-3)，直杆与螺旋弹簧连接在一起并处于垂直位置。试建立该系统的运动方程(忽略摩擦)。

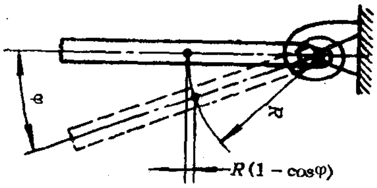


图2-3 杆的摆动

解 杆的位置唯一地由转角 φ 确定。这是一个单自由度系统。系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2$$

I 为杆对悬挂点的转动惯量。系统的势能由两部分组成，即螺旋弹簧的势能和杆在重力场中的势能

$$U=\frac{1}{2}k\varphi^2+mgR(1-\cos\varphi)$$

式中　k 为弹簧刚度。由此得到

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}=I\dot{\varphi},\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}\right)=I\ddot{\varphi}$$

$$\frac{\partial T}{\partial\varphi}=0,\quad \frac{\partial U}{\partial\varphi}=k\varphi+mgR\sin\varphi$$

将以上各式代入式 (2-2)，得到系统的运动方程

$$I\ddot{\varphi}+k\varphi+mgR\sin\varphi=0$$

当 φ 很小时，认为 $\sin\varphi\approx\varphi$，所以

$$I\ddot{\varphi}+(k+mgR)\varphi=0$$

〔例 4〕 质量为 m 的重物在 $P(t)$ 力作用下沿导轨 AB 运动（图2-4）。$P(t)$ 的方向与导轨平行。导轨的左端挂在铰链上，右端压在弹簧上。导轨对 A 点的转动惯量为 I。试求系统的运动方程。

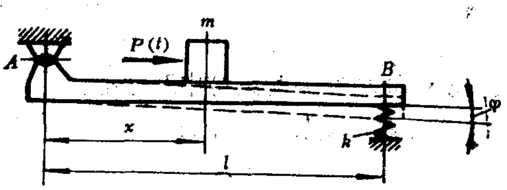


图 2-4

解 系统的状态由两个参量确定，导轨转角 φ 和重物质心至 A 点的距离。系统的动能为

$$T=\frac{1}{2}m[\dot{x}^2+(x\dot{\varphi})^2]+\frac{1}{2}I\dot{\varphi}^2$$

当 φ 角很小时，系统的势能为

$$U=\frac{1}{2}k(l\varphi)^2-mgx\varphi$$

由以上二式得到

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{x}}=m\dot{x},\qquad \frac{\partial T}{\partial x}=mx\dot{\varphi}^2,\qquad \frac{\partial U}{\partial x}=-mg\varphi$$

$$Q_x=P(t)$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}}=(I+mx^2)\dot{\varphi},\qquad \frac{\partial T}{\partial\varphi}=0$$

$$\frac{\partial U}{\partial\varphi}=kl^2\varphi-mgx,\qquad Q_\varphi=0$$

将以上各式代入式 (2-2)得到

$$m\ddot{x}-mx\dot{\varphi}^2-mg\varphi=P(t)$$

$$(I+mx^2)\ddot{\varphi}+2mx\dot{x}\dot{\varphi}+kl^2\varphi-mgx=0$$

2-3 分离体图法

所谓分离体图法就是直接应用牛顿第二定律建立系统的运动方程。以图2-5所示的单自由度系统为例可以看出，质量m所受的力有：重力mg，弹簧力$k(x+\delta_{st})$，阻尼力$c\dot{x}$，激励力$F(t)$。根据牛顿第二定律，可直接写出系统的运动微分方程

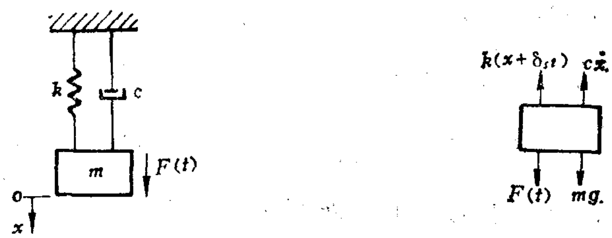


图2-5 单自由度系统

$$m\frac{d^2}{dt^2}(x+\delta_{st})=-k(x+x_{st})-c\frac{d}{dt}(x+\delta_{st})+mg+F(t) \tag{2-3}$$

式中，c为粘性阻尼系数，k为弹簧刚度，δ_{st}为静平衡状态时弹簧变形量，$F(t)$为激励力。由于$k\delta_{st}=mg$，所以系统的运动方程为

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F(t) \tag{2-4}$$

上式表明静止力在振动系统中互相抵消，因而在建立运动方程时仅需考虑动力。这一概念对于分析更为复杂的系统是有用的。

2-4 自由振动

在式(2-4)中当激励力不存在时，即为自由振动。此时运动方程变为

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=0 \tag{2-5}$$

它的解为

$$x=Ae^{rt} \tag{2-6}$$

把式(2-6)代入式(2-5)，得到

$$mr^2+cr+k=0 \tag{2-7}$$

上述特征方程的根为

$$r_{1,2}=\frac{1}{2}\left[-\frac{c}{m}\pm\sqrt{\left(\frac{c}{m}\right)^2-\frac{4k}{m}}\right] \tag{2-8}$$

因此式(2-5)的解可以写为

$$x=A_1e^{r_1t}+A_2e^{r_2t} \tag{2-9}$$

设

$$\omega_n^2=\frac{k}{m} \tag{2-10}$$

$$\zeta=\frac{c}{c_c} \tag{2-11}$$