反证法漫谈

FAN ZHENG FA MAN TAN

王 连 笑

天津人民出版社

反证法漫谈

王 连 笑

天 津 人 民 出 版 社

反证法漫谈
王连笑
*
天津人民出版社出版
（天津市赤峰道124号）
天津新华印刷二厂印刷　天津市新华书店发行
开本787×1092毫米　1/32　印张 5 字数 98,000
一九八一年四月第一版
一九八一年四月第一次印刷
印数：1—32,000
统一书号：13072·13
定 价：0.36元

写在前面

这是一本介绍反证法的小册子。

反证法是数学证题方法的一种，而且是很重要的一种。许多数学命题可以按照从条件推导出结论的顺证方法证明，但是有些不容易用顺证法证明或者根本不可能证明。然而，正是反证法打开了这个局面。它从否定结论出发，进行正确的推理，得出明显的矛盾，于是间接地证明了原来的命题，解决了顺证法不能解决或不易解决的问题。数学上不少著名的定理，如“$\sqrt{2}$是无理数”、“素数有无限多个”等等，就是用反证法证明出来的。所以反证法对于证明数学命题来说，是必不可少的数学方法。

学习反证法，对于发展逻辑思维能力和培养灵活的解题能力是很有益处的。因为用反证法证题往往不象普通的顺证法那样顺理成章，它需要更严密地逻辑推理和对已知条件、已知公理、定理更灵活地运用，也需要有创造能力，所以熟练地运用反证法无疑地会使数学水平得到提高。

反证法是一种严格的证题方法。要介绍反证法就必须讲清它的原理，讲清与它有关的数学概念。因此，这本小册子首先讲述了命题、命题的四种形式和命题的否定等知识，以便为学习反证法扫清一些障碍。同时在讲述反证法之后，还

顺便介绍另一种间接证法——同一法和充分必要条件。

这本小册子在介绍反证法的原理和方法的基础上，主要是通过大量的代数、几何、三角等方面的例题和练习题（其中还有一些是很难入手的题目，甚至是国际国内的数学竞赛题）使大家能够比较熟练地掌握和运用反证法。为了帮助大家练习，书末还附有练习题的提示或答案。

由于作者的水平很低，书中一定有不少谬误之处，敬请读者批评指正。

作　者

一九八〇年五月

目　　录

一 命 题

我们先看几个例子：

(1) 如果两条平行直线被第三条直线所截，那么同位角相等.

(2) 若一个数是偶数，则这个数能被2整除.

(3) 煤球是白的.

这里每一个例子都是一个句子，这些句子都是命题.

那么，什么是命题呢？

命题就是判断某种事物是什么或者不是什么，具有某种性质或者不具有某种性质的句子.

例如，命题(1)就是判断平行线具有同位角相等的性质，命题(2)就是判断偶数具有能被2整除的性质，命题(3)则是说煤球的颜色是白的，因此，任何一个命题都应该有具体的确定的意义，都是揭露了某个研究对象的确定特征或者一些对象之间的关系.由于每一个命题都有具体的确定的意义，所以对于任何一个命题我们都能判断它是正确的还是错误的.

反过来，如果一句话没有什么具体意义，或者这句话是不是正确都搞不清，例如："这是什么？"、"现在几点钟？"、"请安静！"这样的句子就不是命题.

观察上面所列举的三个命题可以看出，命题，特别是数

学命题一般都是由“条件”和“结论”两部分组成的，如命题(1)的“两条平行线被第三条直线所截”就是条件，“同位角相等”就是结论；命题(2)的“一个数是偶数”就是条件，“这个数能被2整除”就是结论；命题(3)的“煤球”是条件，“白的”是结论，所以，我们一般可以把一个命题写成下面的标准形式

如果有A，那么就有B.

或者写成

若A则B

还可以用符号写作

$$A \Longrightarrow B.$$

这里的A是条件，B是结论.

命题的这种形式一般叫做“假言命题”.

有一些命题表面看起来并不是假言命题的形式，但是我们可以把它改造成假言命题的形式，这种改造的工作并不难.例如“煤球是白的”改造成假言命题的形式就是

如果是煤球，那么就是白色的.

又如“对顶角相等”这个命题改造成假言命题的形式就是

如果两个角是对顶角，那么这两个角相等.

由于命题是一种判断的形式，而我们的判断有可能对，也有可能错，所以并不是所有的命题都是正确的，命题是否正确，这要看它是否与客观现实相符合，要通过实践来检验，如果一个命题是客观现实的正确反映，也就是说条件A和结论B之间有着必然的联系，这个命题就是正确的命题.如

上面举出的命题（1）、（2），这是因为两条平行线被第三条直线所截必然得到同位角相等这个结论，对于一个偶数来说，它必然能被2整除，我们在中学学过的公理、定理等等都是正确的命题。

如果一个命题不是客观现实的正确反映，而是对客观现实的歪曲，那么这个命题就是一个错误的命题，错误命题的条件和结论之间不存在必然的联系，例如命题（3）就是一个错误的命题，因为煤球与白色并无必然的联系，又如“实数的平方是正数”也是一个错误的命题，因为并不是所有实数的平方都是正数，当然对于所有非零实数来说，这句话是对的，然而0的平方是0，并不是正数，所以“实数的平方是正数”并不能正确地反映实数的平方这个现实，倘若把这个命题改成“任何非零实数的平方是正数”或者“实数的平方是非负数”就是一个正确的命题。

有些命题是否正确是比较容易判断的，象刚才举过的几个命题，而有些命题判断起来就比较困难，往往需要进行严格的论证之后才能得出结论，还有一些命题是否正确却很难被人知道，例如“哥德巴赫猜想”就是这样一个命题：德国数学家哥德巴赫早在1742年就提出了这样一个猜想：

“每一个大于或等于6的偶数都可以表示为两个素数之和”

这个命题到现在已经二百多年了，虽然经过许多卓越的数学家的辛勤劳动，但是至今还不能得出它是否正确的结论，类似的命题还有一些，如孪生素数问题（是指“相邻二个素数的差是2的数对可能有无限多对”这样一个命题．如

(3, 5), (5, 7), (11, 13), (17, 19), (29, 31), (41, 43), (59, 61), (71, 73)…等等都是相差为2的素数对，这种成对的素数叫做孪生素数），费尔马问题（是指“对于大于2的整数n，不定方程$x^n+y^n=z^n$没有正整数解”这样一个命题）.

我们在研究命题时，不仅要关心命题的内容，即命题的条件是什么，结论是什么，也要关心这个命题是不是正确，也就是命题的真假.

为了研究方便起见，我们定义一个以命题为自变量的真值函数的概念.

设 $\{A\}$是一个命题的集合，若函数

$$f(A)=\begin{cases}1 & \text{如果命题为真}\\ 0 & \text{如果命题为假}\end{cases}$$

那么函数$f(A)$就叫做真值函数.

与已知命题对应的真值函数的值叫做这个命题的真假值，显然，命题的真假值只能是0或1.

命题的真假值对于研究命题是很有用的，在下面几节大家可以看到这个用处.

练 习 一

1. 判断下面各个句子哪些是命题？若是命题请判断它的真假.

(1) $y=ax^2+bx+c$的图象是抛物线.

(2) 熊猫是珍贵的动物.

(3) 开灯！

(4) 今天星期几?

(5) 如果一个整数的各位数字的和能被3整除，那么这个整数能被3整除.

(6) $1+1=10$

(7) 一个角的正弦是$\frac{1}{2}$，这个角等于$\frac{\pi}{6}$

2．把下面命题改变成假言命题，并判断它的真假.

(1) 平行四边形的对角线相等.

(2) 个位数是0或5的整数能被5整除.

(3) 1980是四位数.

(4) 实数的绝对值是正数.

(5) 三角形的内角和是180°.

(6) 同弧上的圆周角相等.

二　命题的复合

如果一个命题只表示一个内容，例如“三角形的内角和等于180°”、“个位数是5的数能被5整除”等等，这样的命题我们叫做基本命题．

把一些基本命题用“或（或者）”、“与(并且)”、“非（不）”这些词连结起来就构成了一个新命题，这样的新命题叫做复合命题．

例如：“平行四边形的对边平行”和“平行四边形的对边相等”是两个命题，我们用“并且”把它们连结起来就成为“平行四边形的对边平行并且平行四边形的对边相等”简单一些（把两个命题的共同条件只写一次）就可以写为“平行四边形的对边平行并且相等”，这个新命题就是一个复合命题。又如“1是方程$x^2-1=0$的根”和“-1是方程$x^2-1=0$的根”是两个命题，我们用“或者”把它们连结起来就成为“1是方程$x^2-1=0$的根或者-1是方程$x^2-1=0$的根”简单一些（把两个命题的共同结论只写一次）就可以写为“1或者-1是方程$x^2-1=0$的根”这也是一个复合命题．

下面我们分别研究用“或”、“与”、“非”复合的命题．

1．关于用“或”复合的命题

例如：命题A：我看书．

命题B：我读报.

用"或"把命题A，B连结起来就是：

命题C：我看书或读报.

命题C就是用"或"把命题A，B连结起来得到的新命题，一般记作

A或B

或者写成　　A或者B

$A+B$

$A\vee B$.

在这本小册子中为了避免出现更多的符号而分散读者的注意力，将采用"A或B"这样的记号，下面的"A与B"也相同.

需要指出的是，我们这里所说的"或"与平时语言中的"或"还有一些区别.平时语言中的"或"一般有两种含义，如

"老张八点上班或八点半上班."

这里的"或"是指不是八点上班就是八点半上班，不可能又是八点上班又是八点半上班；

然而另一个例子：

"我去书店或图书馆."

这里的"或"是指去书店也行，去图书馆也行，两个地方都去也行.

我们这里所说的用"或"复合的命题是指第二种含义，即"A或B"是指或者是A，或者是B，或者是A，B二者.

如果我们知道两个命题A，B的真假，就能判断命题"A

或B”的真假，下面我们分几种情况举例说明．

（1）如果两个已知命题都是真的，例如

A：6能被3整除．（真）

B：6能被2整除．（真）

A或B：6能被3或2整除．（真）

显然，命题A，B皆为真时，命题“A或B”也为真；

（2）如果两个已知命题一个为真一个为假时，例如

A：6能被3整除．（真）

B：6能被4整除．（假）

A或B：6能被3或4整除．（真）

显然，命题A，B一个为真一个为假时，命题“A或B”也为真；

（3）两个已知命题都是假的，例如

A：6能被5整除．（假）

B：6能被4整除．（假）

A或B：6能被5或4整除．（假）

显然，命题A，B皆为假时，命题“A或B”也为假．

从(1)、(2)、(3)中可以知道，命题“A或B”是这样一种命题：在A和B至少有一个是真（或者两个都真，或者一真一假）的时候，它就是真的，只有在A和B都是假的时候，它才是假的．

关于这个结论，我们可以用第一节介绍的真假值列成一个表：

A	B	A或B
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

这个表叫做真值表，用这个表可以很清楚地看出命题之间的关系。

2. 关于用"与"复合的命题

例如：命题A：小王看书.

命题B：老张读报.

用"与"把命题A，B连结起来就是：

命题C：小王看书与老张读报.

命题C就是用"与"把命题A，B连结起来得到的新命题，一般记作

A与B

或者记作 $A \cdot B$ （或AB，$A \times B$）

$A \wedge B$.

命题"A与B"的意思是既A又B，或者说A并且B.

仍然分几种情况举例说明.

(1) 如果两个已知命题都是真的，例如

A：6能被3整除.（真）

B：6能被2整除.（真）

A与B：6能被3与2整除.（真）

显然，命题A，B皆为真时，命题"A与B"也为真.

(2) 如果两个已知命题一个为真，一个为假时，例如

A：6能被3整除.（真）

B：6能被4整除.（假）

A与B：6能被3与4整除.（假）

显然，命题A，B一个为真，一个为假时，命题"A与B"为假.

(3) 两个已知命题皆为假时，例如

A：6能被5整除.（假）

B：6能被4整除.（假）

A与B：6能被5与4整除.（假）

显然，命题A，B皆为假时，命题"A与B"也为假

从(1)、(2)、(3)中可以知道，命题"A与B"是这样一种命题：只有在A和B都是真的时候，它才是真的，A和B中至少有一个是假的时候，它就是假的.

我们也可以用真值表来表示A　B和"A与B"之间的关系

A	B	A与B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

3.关于用"非"复合的命题

例如：命题A：我看书.

　　命题非A：我不看书.

命题"非A"就是命题A用"非"复合的命题，一般记作

$$\overline{A}$$

或 $$\sim A$$

显然，若命题 A为真时，命题$\overline{A}$就是假的，而命题 A为假时，命题$\overline{A}$就是真的，因此，$\overline{A}$是命题A的否定.

用真值表表示出来就是

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

关于对“或”、“与”、“非”的理解，对于解数学题很有用. 例如

A: $x>2$

B: $x=2$

那么“A或B”就是“$x>2$或$x=2$”，但是，我们一般记作$x\geqslant 2$.

又如，不等式$\dfrac{x-3}{x-2}>0$就相当于“$x-3>0$与$x-2>0$”或“$x-3<0$与$x-2<0$”.

只有对“或”、“与”、“非”理解得正确，才会在使用中不犯错误.

练 习 二

1. 用“或”把命题A，B连结起来，并判断“A或B”的真假

（1）A：内错角相等，二直线平行.

B：同位角相等，二直线平行.