概率论与数理统计典型习题解析

——工学、经济学硕士入学考试指南

孙荣恒　雷玉洁　编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

概率论与数理统计典型习题解析

——工学、经济学硕士入学考试指南

孙荣恒　雷玉洁　编

高等教育出版社

内容提要

为满足广大考研学生的需要，本书在总结编者多年教学经验的基础上，参照考研大纲编写而成。全书共八章，每章包含内容提要和例题分析两部分，每个例题又包含分析和解两部分。全书共183个例题、221个习题，基本覆盖了考研大纲，一方面可以开扩学生视野，另一方面可以帮助广大考生有效地复习应考。

本书既是工学、经济学硕士生入学考试的一本指南，也可作为广大本科学生学习概率论与数理统计的辅导教材，还可供教师、科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计典型习题解析——工学、经济学硕士入学考试指南/孙荣恒，雷玉洁编.—北京：高等教育出版社，2003.10

ISBN 7-04-012963-9

Ⅰ.概… Ⅱ.①孙…②雷… Ⅲ.①概率论-研究生-入学考试-解题②数理统计-研究生-入学考试-解题 Ⅳ.O21-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第061194号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京民族印刷厂		
开　　本	850×1168　1/32	版　　次	2003年10月第1版
印　　张	11.375	印　　次	2003年10月第1次印刷
字　　数	280 000	定　　价	14.50元

前　言

本书是工学、经济学硕士生入学考试的一本指南，也是本科大学生学习概率论和数理统计的一本辅导教材，也是教师、科技工作者的一本参考书，还可作为工学、经济学博士生和理科硕士生入学参考书。

近几年来，报考工学、经济学硕士研究生的人数逐年增加，而且这种上升势头在新世纪的头十年中还不会减弱。为了满足广大考生的要求，编者在总结多年教学基础上，参照考研大纲编写成本书，以帮助广大考生更有效地进行复习应考，多一些成功的机会。本书共八章，每章包含“内容提要”(介绍概念、性质、公式与方法)和“例题”两部分，每个例题又包含“分析”和“解”两部分，介绍解题思路和解法。有些例题的分析过程就是解过程，很难把两者分开，这时就将分析与解合二为一。全书共有183个例题，每个例题中有1～6个小题，书后附有孙荣恒等编写的《概率论和数理统计》一书的习题(共221个题)及其参考解答。习题可以作为练习题，如果做不出来可看参考题解。183个例题和221个习题基本上覆盖了考研大纲。由于本书不但是一本考研指南，而且是一本辅导教材和参考书，有些例题超出了考研大纲的要求。不过这些例题对扩大学生的视野、提高学生的提出问题、分析问题、解决问题的能力和实际应用是有帮助的。

朱鋐道教授详细审阅了手稿，提出了不少宝贵意见，编者在此表示衷心感谢！

由于编者水平所限，书中定有不少缺点和错误，恳请读者批评指正！

编者

2003－02－10

策划编辑　李艳馥
责任编辑　张爱和
封面设计　王凌波
责任绘图　赫　林
版式设计　史新薇
责任校对　俞声佳
责任印制　陈伟光

郑重声明

检 19

目　录

第一章　随机事件与概率

一、内容提要

1. 随机事件

(1) 随机事件的概念

在随机试验 E 中,对一次试验来说可能出现(发生)也可能不出现的结果(事情)称为 E 的随机事件,简称为事件,一般用大写字母 A,B,C 等来表示.它是概率论中最基本的概念之一.称每次试验(随机试验简称为试验)必然要出现的结果为必然事件,记为 Ω.称每次试验必然不出现的结果为不可能事件,记为 $\varnothing$.称 E 的最简单不能再分解的每个可能的结果为 E 的样本点,一般用小写字母 ω,e 等来表示.称由所有样本点组成的集合为样本空间,也记为 Ω.由于事件是由样本点组成的集合,所以,任意事件都是其相应样本空间的子集.然而,必须注意:样本空间的子集未必是事件.一个事件的出现当且仅当其中一个样本点(组成的事件)出现.从集合论的角度来说,必然事件就是样本空间,不可能事件就是不包含任何样本点的空集.

例如,设一袋中装有标号分别为 $1,2,\cdots,10$ 的十个球,现从中任摸一个球,设 $A=$"摸到的球的号码小于 4".用 e_i 表示摸到 i 号球,$i=1,2,\cdots,10$,则 $e_1,e_2,\cdots,e_{10}$ 都是该试验的样本点,事件 $A=\{e_1,e_2,e_3\}$,样本空间 $\Omega=\{e_1,e_2,\cdots,e_{10}\}$.显然,$A$ 是 Ω 的子集,即 $A\subset\Omega$,而且 A 发生(出现)当且仅当 e_1,e_2,e_3 之一(组成的事件)发生,又显然每次试验 Ω 都发生.

(2) 事件之间的关系与简单运算

因为事件是集合，所以事件之间的关系就是集合之间的关系，事件之间的运算就是集合之间的运算.

设 Ω，$\varnothing$分别为试验 E 的样本空间与不可能事件，A，B，C，A_1，A_2，A_3，…均为 E 的事件，e 为样本点，即 $e\in\Omega$.

1°. 子事件　如果 $e\in A$，则 $e\in B$，就称 A 为 B 的子事件，记为 $A\subset B$. 其概率含义是：A 发生，B 必然发生. 它有如下性质：① $A\subset A$；② $\varnothing\subset A\subset\Omega$；③ 如 $A\subset B$ 且 $B\subset C$，则 $A\subset C$.

2°. 相等　如 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A 与 B 相等，记为 $A=B$. 其概率含义是：A，B 之一发生，另一个也必发生.

3°. 和事件　由至少属于 A，B 之一的样本点全体组成的集合称为 A 与 B 的和事件，记为 $A\cup B$. 其概率含义是：A，B 中至少一个发生. 由至少属于 A_1，A_2，…，A_n 之一的样本点全体组成的集合称为 A_1，A_2，…，A_n 的和事件，记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$. 其概率含义是：$A_1$，$A_2$，…，$A_n$ 中至少一个发生. 由至少属于 A_1，A_2，A_3，…之一的样本点全体组成的集合称为 A_1，A_2，A_3，…的和事件，记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 或 $A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots$. 其概率含义是：$A_1$，$A_2$，$A_3$，…中至少一个发生.

4°. 积事件　称既属于 A 又属于 B 的样本点全体组成的集合为 A 与 B 的积事件，记为 $A\cap B$ 或 AB. 其概率含义是：A 与 B 同时发生. 称属于所有 A_1，A_2，…，A_n 的样本点全体组成的集合为 A_1，A_2，…，A_n 的积事件，记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 或 $A_1A_2\cdots A_n$. 其概率含义是：A_1，A_2，…，A_n 同时发生. 称属于所有 A_1，A_2，A_3，…的样本点全体组成的集合为 A_1，A_2，A_3，…的积事件，记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 或 $A_1A_2A_3\cdots$. 其概率含义与 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 的类似.

5°. 互斥(互不相容)事件与对立(互逆)事件　如果 $AB=\varnothing$,则称 A 与 B 为互斥事件或互不相容事件.其概率含义是:A 与 B 不同时发生.

如果 $AB=\varnothing$ 且 $A\cup B=\Omega$,则称 A 与 B 为对立事件或互逆事件.其概率含义是:每次试验 A,B 中有且仅有一个发生.

显然,对立的两事件必然互斥;反之,未必成立.

如果 $AB=\varnothing$,则记 $A\cup B$ 为 $A+B$,即 $A+B=A\cup B$.

6°. 差事件　由属于 A 而不属于 B 的样本点全体组成的集合称为 A 与 B 的差事件,记为 $A\setminus B$,其概率含义是 A 发生而 B 不发生.

如果 $B\subset A$,则称 A 与 B 的差(事件)为正常差(事件),记为 $A-B$,即 $A\setminus B=A-B$.记正常差(事件)$\Omega-A$ 为 $\bar{A}$,即 $\bar{A}=\Omega-A$.显然,$\bar{A}A=\varnothing$ 且 $\bar{A}+A=\Omega$,即 $\bar{A}$ 与 A 为两个对立事件.

7°. 完备事件组　如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互斥,且 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i=\Omega$,则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为一个完备事件组.

事件运算的顺序为:

"括号"→"逆"→"积"→"和"或"差".

事件之间的关系与简单运算有下列性质:

① $A\cup A=A,AA=A,A\cup\varnothing=A,A\Omega=A,\bar{\bar{A}}=A,A\setminus A=\varnothing,A\varnothing=\varnothing,A\bar{A}=\varnothing,A+\bar{A}=\Omega,A\cup\Omega=\Omega$;　(1.1)

② $A\cup B=B\cup A,AB=BA$;　(交换律)　(1.2)

③ $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),(AB)C=A(BC)$;

(结合律)　(1.3)

④ $\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\right)C=\bigcup\limits_{i=1}^{n}(A_iC),\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i\right)\cup C=\bigcap\limits_{i=1}^{n}(A_i\cup C)$;

(分配律)　(1.4)

⑤ $\overline{\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\right)}=\bigcap\limits_{i=1}^{n}\bar{A}_i,\overline{\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i\right)}=\bigcup\limits_{i=1}^{n}\bar{A}_i$;　(对偶律)　(1.5)

⑥ $A \setminus B = A\bar{B} = A - AB$; (1.6)

⑦ $AB \subset A, A \subset A \cup B, A \subset A, A \setminus B \subset A$; (1.7)

⑧ $A \subset B \Leftrightarrow AB = A \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow \bar{B} \subset \bar{A}$.（等价性） (1.8)

2. 概率

(1) 概率的概念

1°. 古典概率　如果试验 E 的样本空间 Ω 中只有有限个样本点,且每个样本点组成的事件等可能发生,则称 E 为古典概型.如果 Ω 由 n 个样本点组成,事件 A 由 r 个样本点组成,则定义 A（发生）的概率为 $\frac{r}{n}$,记为 $P(A)$,即

$$P(A) = \frac{r}{n} = \frac{A\text{ 中样本点数}}{\Omega\text{ 中样本点数}}.$$

称这样定义的概率为古典概率.

2°. 几何概率　设试验 E 的样本空间为某可度量的区域 Ω,且 Ω 中任一区域出现的可能性的大小与该区域的几何度量成正比,而与该区域的位置和形状无关,则称 E 为几何概型的试验,并定义 E 的事件 A（出现）的概率 $P(A)$ 为

$$P(A) = \frac{A\text{ 的几何度量}}{\Omega\text{ 的几何度量}},$$

其中,如果 Ω 是一维的、二维的、三维的,则 Ω 的几何度量分别为长度、面积、体积.称这样定义的概率为几何概率.

3°. 统计概率　设 A 为试验 E 的一个事件,如果 A 在 n 次重复独立试验中出现了 r 次,则称比值 $\frac{r}{n}$ 为 A 在 n 次试验中出现的频率,记为 $f_n(A)$,即 $f_n(A) = \frac{r}{n}$.如果随着重复独立试验次数的增加,A 出现的频率 $f_n(A)$ 在 0 与 1 之间某个数 p 附近摆动,则定义 A 的概率为 p,记为 $P(A)$,即 $P(A) = p$.

4°. 概率的公理化定义　设 Ω 是试验 E 的样本空间,P 是以 E 的事件为自变量的实值（集合）函数,如果 P 还满足下列三个条件:

① (非负性)对 E 的任意事件 A,有 $P(A)\geqslant 0$;

② (规范性)$P(\Omega)=1$;

③ (可列可加性)设 $A_1,A_2,A_3,\cdots$ 为 E 的两两互斥的可列无穷多个事件,则 $P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

那么就称 P 为概率.

概率 P 有下列性质:

① $P(\varnothing)=0$; (1.9)

② (有限可加性)设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为两两互斥的 n 个事件,则 $P(\sum_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$; (1.10)

③ (对立事件概率公式)对任意事件 A.有

$$P(\bar{A})=1-P(A); \tag{1.11}$$

④ (正常差概率公式)设 A,B 为两个事件,且 $A\subset B$,则

$$P(B-A)=P(B)-P(A); \tag{1.12}$$

⑤ (单调性)设 A,B 为两个事件,且 $A\subset B$,则

$$P(A)\leqslant P(B); \tag{1.13}$$

⑥ (有界性)对任意事件 A,有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$; (1.14)

⑦ (加法公式)设 A,B 为两个事件,则

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB); \tag{1.15}$$

更一般地,设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件,则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} P(A_iA_j)+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n} P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n); \tag{1.16}$$

⑧ (半有限可加性)设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件,则

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)\leqslant \sum_{i=1}^{n} P(A_i). \tag{1.17}$$

3. 条件概率与事件的独立性

(1) 条件概率的概念　设 A,B 为两个事件,且 $P(A)>0$,则

称$\dfrac{P(AB)}{P(A)}$为在 A 发生下 B 发生的条件概率,记为 $P(B|A)$,即

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}. \tag{1.18}$$

条件概率有下列三个性质,设 $P(A)>0$,则

① 对任意事件 B,有 $P(B|A)\geqslant 0$;

② $P(\Omega|A)=1$;

③ 对任意两两互斥的可列无穷多个事件 $A_1,A_2,A_3,\cdots$,有

$$P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i|A)=\sum_{i=1}^{\infty} P(A_i|A),$$

即条件概率满足概率公理化定义中的三个条件(公理),所以,凡是概率具有的性质条件概率也都具有.

(2) 计算概率的三个公式:设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件.

① (乘法公式)如果 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$,则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}). \tag{1.19}$$

② (全概率公式)如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为完备事件组,且 $P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$,则对任意事件 B,有

$$P(B)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B|A_i). \tag{1.20}$$

③ (贝叶斯(Bayes)公式)如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为完备事件组,$P(A_i)>0(i=1,2,\cdots,n)$,且事件 B 满足:$P(B)>0$,则有

$$P(A_j|B)=\frac{P(A_j)P(B\mid A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(A_i)P(B\mid A_i)},\quad j=1,2,\cdots,n. \tag{1.21}$$

(3) 事件独立性概念:设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个事件.

① 如果 $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)$,则称 A_1 与 A_2 相互独立,简称独立.

② 如果对 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意 $s(2\leqslant s\leqslant n)$ 个事件 A_{k_1}，$A_{k_2},\cdots,A_{k_s}$ 均有 $P(\bigcap_{j=1}^{s}A_{k_j})=\prod_{j=1}^{s}P(A_{k_j})$，即下列 2^n-n-1 个等式：

$$P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j),i\neq j,i,j=1,2,\cdots,n;$$

$$P(A_iA_jA_k)=P(A_i)P(A_j)P(A_k),i\neq j\neq k\neq i,i,j,k=1,2,\cdots,n;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2)\cdots P(A_n)$$

都成立，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立.如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意两个事件独立，则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两独立.

事件独立性有如下性质：设 A,B 为两个事件.

① 如果 $P(A)P(B)>0$，则

$$A\text{ 与 }B\text{ 独立}\Leftrightarrow P(B|A)=P(B)\Leftrightarrow P(A|B)=P(A);\tag{1.22}$$

② Ω 与 $\varnothing$ 都与任意事件独立；

③ A 与 B 独立 $\Leftrightarrow A$ 与 $\overline{B}$ 独立 $\Leftrightarrow\overline{A}$ 与 B 独立 $\Leftrightarrow\overline{A}$ 与 B 独立；

④ 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个相互独立的事件，则

1°. 对任意整数 $j(0\leqslant j\leqslant n)$，$n$ 个事件 $\overline{A}_{k_1},\overline{A}_{k_2},\cdots,\overline{A}_{k_j}$，$A_{k_{j+1}},\cdots,A_{k_n}$ 相互独立，即对 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意 j 个取逆后与其余 $n-j$ 个组成的 n 个事件相互独立.

2°. 对任意整数 $m(2\leqslant m\leqslant n)$，$m$ 个事件 $A_{k_1},A_{k_2},\cdots,A_{k_m}$ 相互独立，即 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意 m 个事件相互独立.

3°. 对任意整数 $r(1\leqslant r\leqslant n-1)$，事件 $\bigcap_{j=1}^{r}A_{k_j}$ 与事件 $\bigcup_{j=r+1}^{n}A_{k_j}$ 相互独立，即 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中任意 r 个事件的积与其余各事件的和独立.

(4) 重复独立试验：设 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 为 n 个试验，我们把依

次进行试验 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 看成一个试验,记为 $\widetilde{E}$,称 $\widetilde{E}$ 为由 E_1, $E_2,\cdots,E_n$ 组成的复合试验. 当 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 为同一个试验 E 时,记 $\widetilde{E}$ 为 E^n,并称 E^n 为 E 的 n 重试验. 如果对 E_i 中的事件 A_i, $i=1,2,\cdots,n$,均有

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)=\prod_{i=1}^{n} P(A_i), \tag{1.23}$$

则称 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 为相互独立的 n 个试验(实际当中,如果试验 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 互不影响,则称 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 为相互独立的试验). 如果 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 既是相互独立的试验,又是同一个试验 E,则称 E^n 为 E 的 n 重独立试验.

只有两个可能结果的试验称为伯努利(Bernoulli)试验. 一个试验虽然有两个以上的可能结果,如果我们只关心其中一个可能结果或一个事件出现与否,则仍可把该试验看成伯努利试验. 将伯努利试验 E 重复独立进行 n 次所得的 n 重独立试验 E^n 称为 E 的 n 重伯努利试验.

二、例题分析

例 1.1 在数学系学生中任选一名学生,令 A,B,C 分别表示被选学生是男生、三年级学生、运动员.

(1) 在什么情况下 $\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}=\bar{C}$ 成立?

(2) 什么时候关系式 $B\subset C$ 是正确的?

(3) 什么时候 $A=B$ 成立?

(4) 什么时候 $A\cup BC=A$ 成立?

分析 本例由事件之间的关系与运算的性质可解. 由对偶律, $\bar{\bar{A}}=A$ 与等价性可解(1),由子事件概念可解(2),由事件相等定义可解(3),由等价性可解(4).

解 (1) 因为 $\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}=\bar{C}\Leftrightarrow\overline{ABC}=\bar{C}\Leftrightarrow ABC=C\Leftrightarrow C\subset AB$(或 $\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}=\bar{C}\Leftrightarrow\bar{A}\cup\bar{B}\subset\bar{C}\Leftrightarrow\overline{AB}\subset\bar{C}\Leftrightarrow C\subset AB$),即运动

员都是三年级男生情况下有 $\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}=\bar{C}$.

(2) 由子事件定义,当三年级学生都是运动员时有 $B\subset C$.

(3) 由事件相等定义,当该系男生都是三年级学生且三年级学生都是男生时有 $A=B$.

(4) 由等价性,$A\cup BC=A\Leftrightarrow BC\subset A$,所以当三年级学生中的运动员都是男生时有 $A\cup BC=A$.

例 1.2 有 5 件产品,用 $B_n(1\leqslant n\leqslant 5)$表示第 n 件产品是正品,试用 B_n 表示下列事件:

(1) 都是正品;　　　(2) 第一件是正品;

(3) 仅第一件是正品;　　　(4) 至少一件是正品;

(5) 至少一件不是正品;　　　(6) 至少 4 件是正品.

分析 利用事件的概率含义可解本题.

解 (1) $\bigcap\limits_{n=1}^{5} B_n$;　　　(2) B_1;

(3) $B_1\bigcap\limits_{n=2}^{5}\bar{B}_n$;　　　(4) $\bigcup\limits_{n=1}^{5} B_n=\overline{\bigcap\limits_{n=1}^{5}\bar{B}_n}$;

(5) $\bigcup\limits_{n=1}^{5}\bar{B}_n=\overline{\bigcap\limits_{n=1}^{5}B_n}$;　　　(6) $\bigcap\limits_{n=1}^{5} B_n+\sum\limits_{k=1}^{5}\bar{B}_k(\bigcap\limits_{\substack{n=1\\ n\neq k}}^{5}B_n)$.

例 1.3 指出下列各事件等式成立的条件:

(1) $ABCD=D$;　　　(2) $A\cup B=\bar{B}$;

(3) $AB=\bar{B}$;　　　(4) $A\cup BCD=A$.

分析与解 (1) 由(1.8)知 $ABCD=D\Leftrightarrow D\subset ABC\Leftrightarrow D\subset A$ 且 $D\subset B$ 且 $D\subset C$,即当 D 同为 A,B,C 的子事件时,有 $ABCD=D$.

(2) 由事件相等定义,事件之间的关系与简单运算的性质知,

$A\cup B=\bar{B}\Rightarrow A\cup B\subset\bar{B}\Rightarrow B\subset\bar{B}\Rightarrow B=B\bar{B}=\varnothing\Rightarrow$

$\bar{B}=\Omega\Rightarrow A\cup B=\Omega\Rightarrow A=\Omega$,即当 $B=\varnothing,A=\Omega$ 时,有 $A\cup B=\bar{B}$.

(3) 由(1.5),$AB=\bar{B}\Leftrightarrow\bar{A}\cup\bar{B}=B$,再由(2)知,当 $B=\Omega$,A

$=\varnothing$时有 $AB=\bar{B}$.

(4) 由(1.8)知, $A\cup BCD=A\Leftrightarrow BCD\subset A$, 即当 BCD 为 A 的子事件时, 有 $A\cup BCD=A$.

例 1.4 化简下列各事件:

(1) $(\bar{A}\cup B)(A\setminus B)$; (2) $\bar{A}B\cup AB\cup\bar{B}C$;

(3) $(\bar{A}\cup B)(A\cup B)(B\setminus C)$.

分析 利用公式 $A\setminus B=A\bar{B}$ 与 $A\bar{A}=\varnothing$和分配律可解(1), 利用结合律与分配律可解(2), 利用分配律和(1.7)可解(3).

解 (1) $(\bar{A}\cup B)(A\setminus B)=(\bar{A}\cup B)A\bar{B}=\bar{A}A\bar{B}\cup BA\bar{B}=\varnothing$.

(2) $\bar{A}B\cup AB\cup\bar{B}C=(\bar{A}B\cup AB)\cup\bar{B}C=(\bar{A}\cup A)B\cup\bar{B}C$
$=\Omega B\cup\bar{B}C=B\cup\bar{B}C=(B\cup\bar{B})(B\cup C)=B\cup C$.

(3) $(\bar{A}\cup B)(A\cup B)(B\setminus C)=(\bar{A}A\cup BA\cup\bar{A}B\cup BB)B\bar{C}$
$=(BA\cup\bar{A}B\cup B)B\bar{C}=BB\bar{C}=B\bar{C}$.

例 1.5 设装有 100 个球的袋中有 25 个黑球,现从中不放回摸出 4 个球,求下列事件的概率:在摸出的 4 个球中,

(1) $A\equiv$“仅后两个是黑球”; (2) $B\equiv$“有两个黑球”;

(3) $C\equiv$“后两个是黑球”; (4) $D\equiv$“第 4 个是黑球”;

(5) $E\equiv$“至少一个是黑球”; (6) $F\equiv$“至多一个是黑球”.

分析 此题为古典概型中有限不放回抽样问题.样本空间中有 P_{100}^{4} 个样本点.事件 A 表示前两次摸到非黑球而后两次摸到黑球,用选排列种数可求 A(发生)的概率. B 表示 4 次摸球中有两次摸到黑球,哪两次? 是 4 次中任意两次.用组合数或选排列种数都可求 B 的概率. C 表示后两次摸到黑球,前两次摸到什么球?前两次可能没摸到黑球,摸到一个黑球,摸到两个黑球,用全概率公式可求 C 的概率. D 表示第 4 次摸到的是黑球,前 3 次可能摸 0,1,2,3 个黑球,用求 C 的概率方法可求 D 的概率.又 D 属抓阄问题,即从装有 m 个黑球和 n 个白球的袋中不放回摸球,可证(见