系 统 分 析 讲 义

余芸生教授主编

（二）

☆

福 州 大 学 土 建 系

一九八一年翻印

表2・9 支线的状态分类

	$X_{ij}<L_{ij}$	$X_{ij}=L_{ij}$	$L_{ij}<X_{ij}<U_{ij}$	$X_{ij}=U_{ij}$	$X_{ij}>U_{ij}$
$\bar{C}_{ij}<0$	NFU	NFU	NFU	K	NRU
$\bar{C}_{ij}=0$	NFU	KFU	KFU* 或 KRL**	KRL	NRL
$\bar{C}_{ij}>0$	NFL	K	NRL	NRL	NRL

注：* $U_{ij}-X_{ij}$ 为增加顺向流量。

** $X_{ij}-L_{ij}$ 为增加逆向流量。

逆境法原理的阐明

逆境法的确实性的证明，需用线性规划和对偶性的概念，其证明颇复杂。但下面的描述可以用来阐明该法的确实性。该法的收敛性和能得到最优解的证明，则更较复杂，可参考在本章末所列Ford 和 Fullkerson 所著Flows in network

逆境法的基本概念是在提出一个“经济系统”，能显示系统中流

量的分配是否已为最优，亦即费用最少。若非最优，则应设法调整各点价格或支线流量的分配，使其能达到最优化。若按上节所提出各支线的状态来看，则在逆境法中的最优化，亦即网络中各支线的状态均已进入良好的情况若按表2·9所分支线状态，则网络中各支线的状态均有K字。

下述“经济系统”，可用来说明逆境法的原理。若将网络中的各点当作货物转运站。第i站收货时所付出的单价为P_i。同样地货物出站时，征收货物的单价亦为P_i。各站的进货量和出货量相等，所以各站均在收支平衡的状态。货物从i站运到j站的单价若为C_{ij}则两站间货运单价为

$$\bar{C}_{ij}=C_{ij}+P_i-P_j。$$

从经济的角度看这系统，若一支线的$\bar{C}_{ij}$为负值，亦即费用可以减低，则该支线的流量应增加以减少“系统”的费用。并且应该继续增加该支线的流量，直至其流量等于最大限量为止。此时，$\bar{C}_{ij}$仍为负值，则该支线已达到优良状态。且不应再有改变。同理，若一支线的$\bar{C}_{ij}$为正值，则应设法减少其流量，直至其流量等于最低限量为止。若此时$\bar{C}_{ij}$仍为正值，则该支线的状态亦称优良。

若一支线的$\bar{C}_{ij}=0$，而且分配流量X_{ij}仍在规定的范围之内，则增加和减低该支线的流量，对系统的总费用无影响。所以该支线的状态亦称为良好。但因分配流量仍有增减余地，故其状态仍可因其它支线状态的改变而改变。

上述概念可与表2・9所列状态对照。

虽然在计算开始时，各站所用的价格和各支线的流量均定为零（见表2・8），但若原网络中有已知值，则可用已知值作为系统起始状况，并且起始流量不必一定为可行的。但每站进和出的流量，必须满足连续方程。上节中所提出的规则1和规则3，保证一已标定的环道中流量的改变，不使已在良好状态的支线退入逆境。

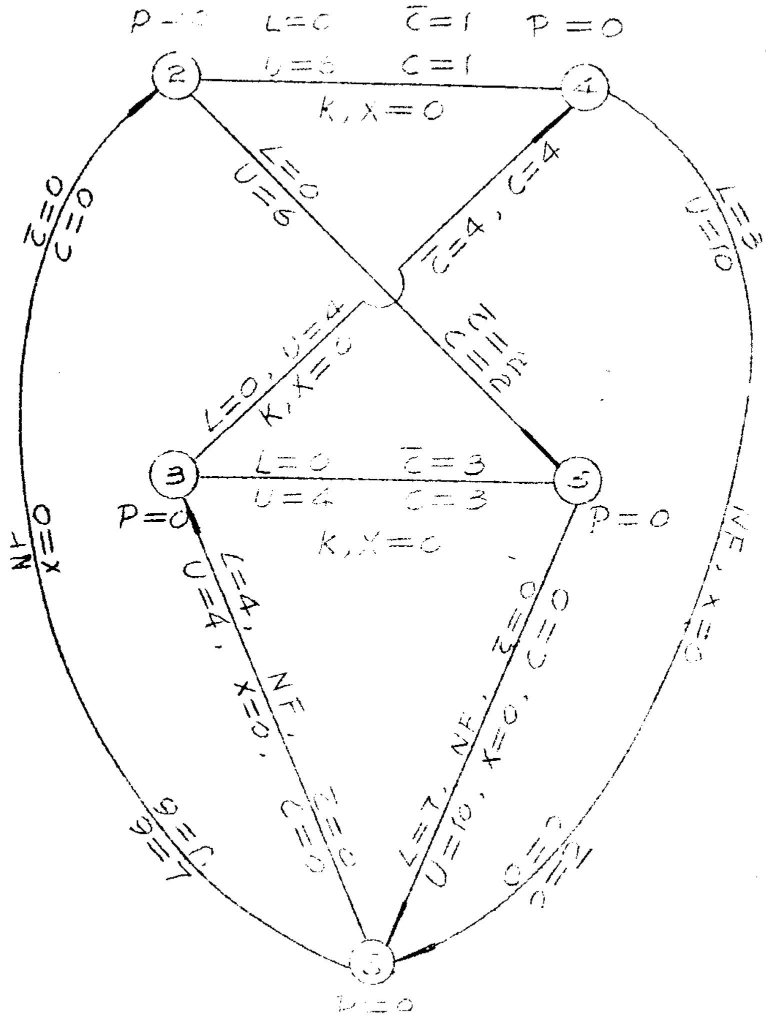
规则　能使原在逆境中的支线，终于进入良好状态，同时不使已在良好状态的支线退入逆境。

例1，逆境法程序的应用。

现仍用图2・9所代表的网络为例说明逆境法的应用，以求对该法更清晰的了解。图2・9代表的网络各支线上运费的单价是：$C_{24}=1$，$C_{25}=2$，$C_{34}=4$，$C_{35}=3$，各支线的最大和最小流量各用U和L表示。其值如图2・10所示。本题的目的是求网络中最低流量的分配。

首先把原网络改变成一封闭网络如图2・10所示。图中已加入一源和一汇，且该两点已会并为一点S。所加新支线上U和L的值，必须能满足各连接点的连续方程。网络中各点的起始单价和各支线的流量均为0。由C_{ij}，P_i值可算出$\bar{C}_{ij}$，并定出各支线的状态用符号表示在各支线上。

图2.10 起始情况



标定一环道

按表2·8中第五步，依照规则Ⅰa选定一在逆境中的支线，亦即图2·10中支线上标明第一字母为N的支线，作为一起始线。若该支线可有逆向流，则标定其源。若可有顺向流，则标定其汇。所定环道

必须包括起始线，但不一定需要包括S点。但在此网络中，因2～3和4～5均无支线，故任一环道定包括S点。

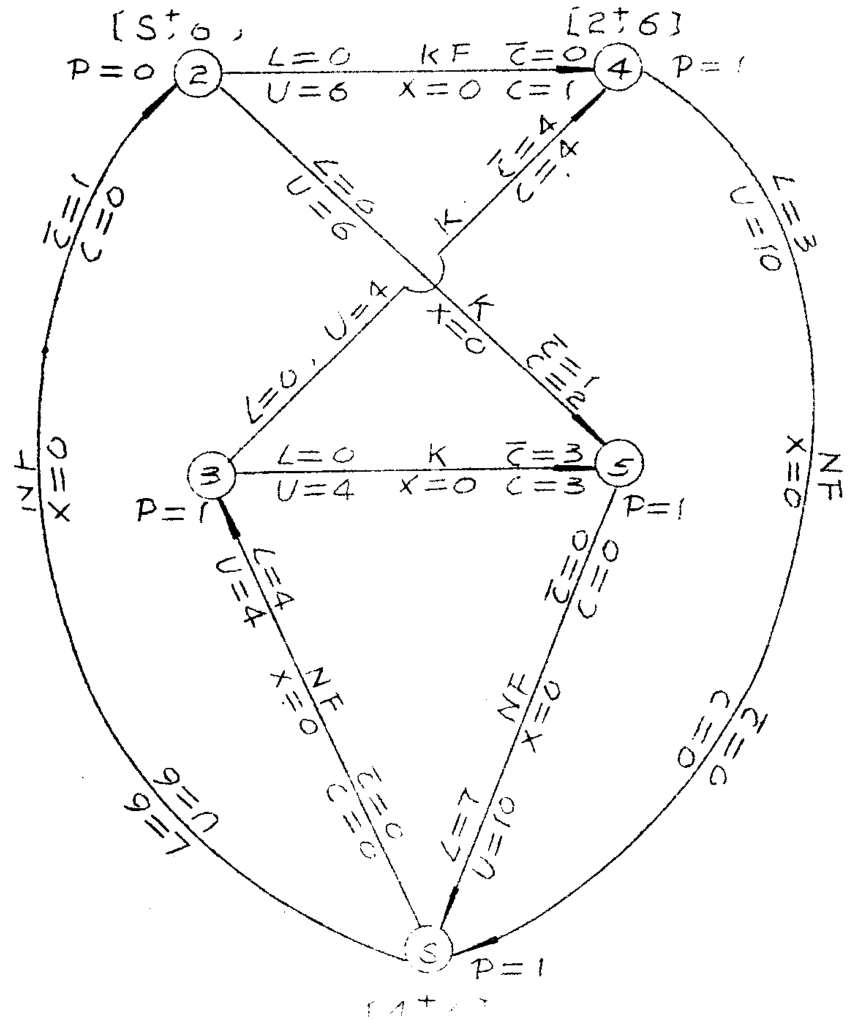
支线S～2符合需要条件，其中点2可以标定，因支线S－2是在逆境中且顺向流是可能发生的。按规则3a，用〔S＋，6〕标志定出点2。此标志表示从S到2的正向流容量$K_2=U_{S2}-X_{S2}=6$

点4和5均和2相连，且各点亦连结S。但2～4和2～5的状态均为K。故为一无突破情况，（表2．8中第9步）。必须按表2．8中第10步处理。

按规则2调整未标定点4和5的价格。从$\bar{C}_{24}$和$\bar{C}_{25}$中选一值较小者$\bar{C}_{24}=1$。并将所有未标定各点的价格增加1。再算出各支线的$\bar{C}$值，并决定其状态（表2．8中第11步）。

支线2～4的状态为KF故可有顺向流。因$K_2=6$，$U_{24}-X_{24}=6$，故用〔2＋，6〕标定点4。该标志表示从2到4可增加顺向流6单位。支线4－S的状态为NF，可有顺向流，S为汇，故可用〔4＋，6〕标定S。因$K_4=6$和$U_{4S}-X_{4S}=10$，取其小者为$K_S=6$。S－2－4－S为一标定环道，因其上所有各点均已标定。且环道可增加的最大流量为6。到此，环道标定已结束。其结果如图2．11

图2·11 第一次标定环道



所示·现可取量为所有各点的标志，定出环道上各支线的分配流量为6，并决定各支线的新状态（图2·12）·图示除S—3和5—S外

其余各支线的状态记号中均有K字母，故可选S—3为起始线。标是

《图2·12在后面。》⟶

点3为〔S+，4〕。但3—4或3—5均为K状态，故不能通过而需调整价格。取$\bar{C}_{34}=4$和$\bar{C}_{35}=3$中的小者，增加所有未标定各点的价格3单位，再计算$\bar{C}$决定各支线新状态（图2·13）。

图中3～5支线的状态为KR故点5可标定为〔3+，4〕。继而标定S为〔5+，4〕，因$K_5=4$小于$U_{5S}-X_{5S}=10$，S—3—5—S为一标定环道。其分配流量可增加4单位。取消所有各点标志，并算出各线所状态如图2·14。

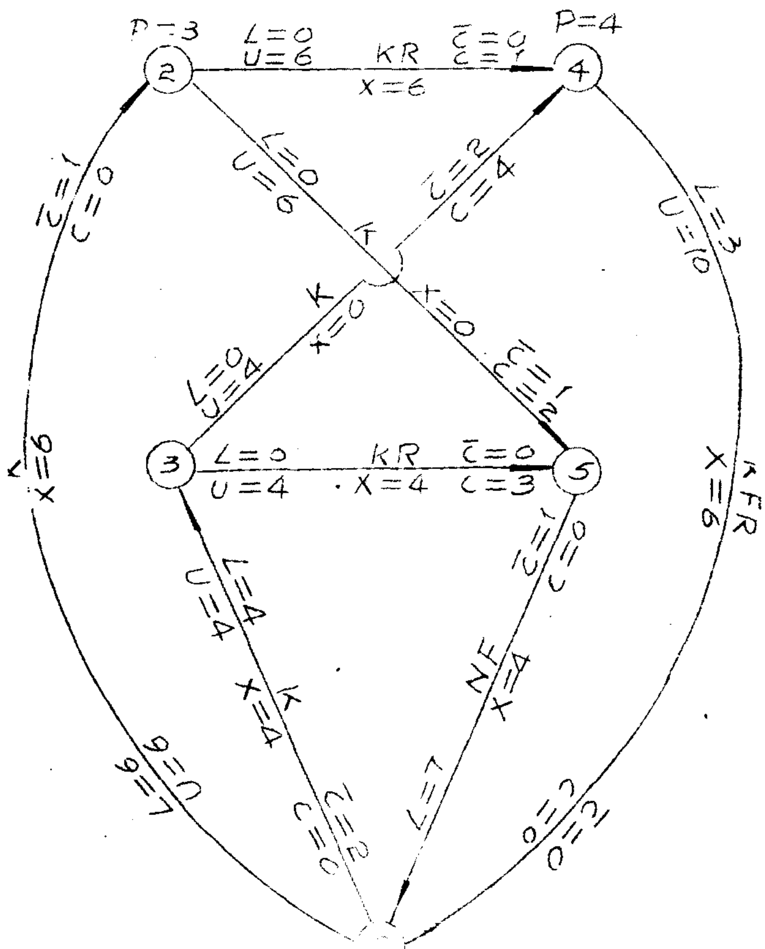


图2·12　第一次环道标定后的新状态

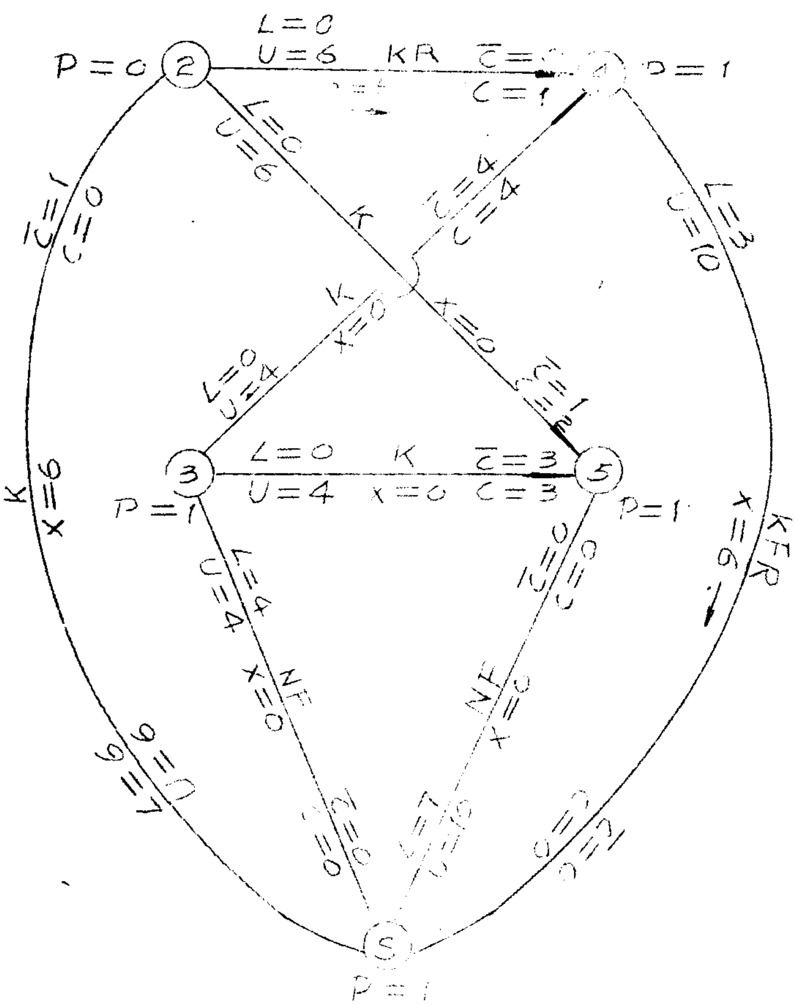
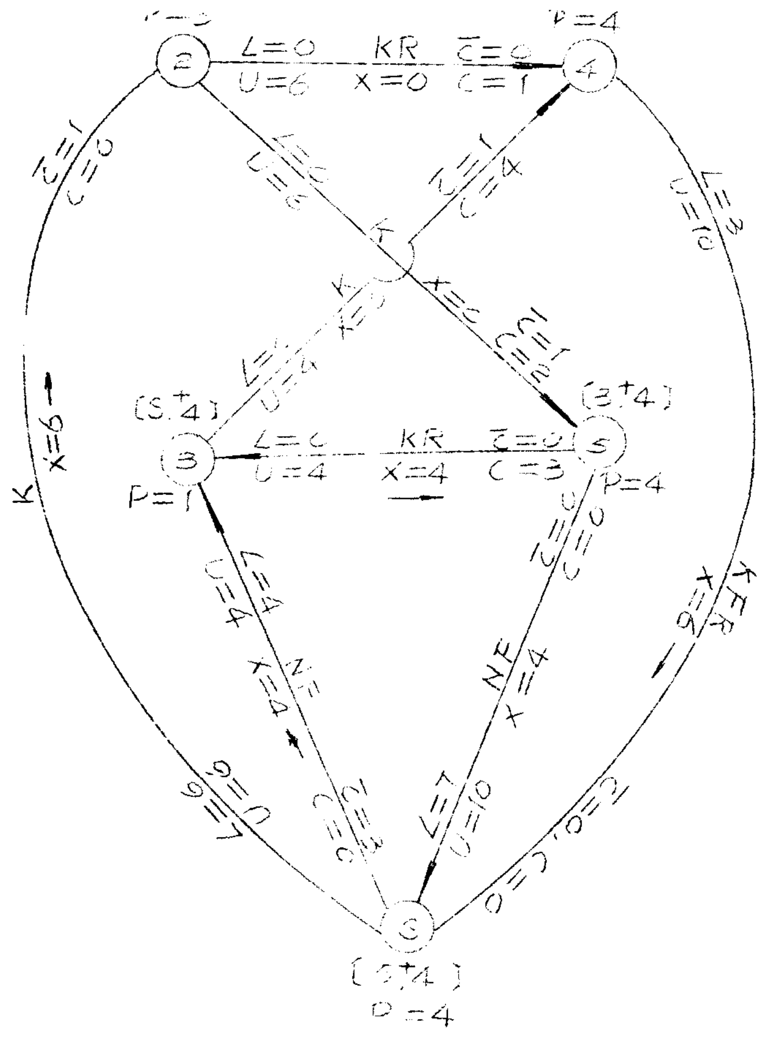


图2·13　第二次环道标定



图示除5～S外，其余各支线的状态均为良好。因5～S可有顺向流，且$K_S=6$，故标定S为〔5^+，6〕。因4～S为KFR状态，$X_{4S}-L_{4S}=3$小于$K_S=6$，故增加该线3单位逆向流，并标定点4为〔$\bar{S}$，3〕。同时，因支线2～4可有逆向流，故标定点2为〔4^-，3〕。到此已无通线。必须按规则2，增加未标定各点的价格1单位，因$\bar{C}_{25}=1$为最小值。重新计算$\bar{C}$值，决定各支线的新状态而得图2．14

《此表在后面》——————→

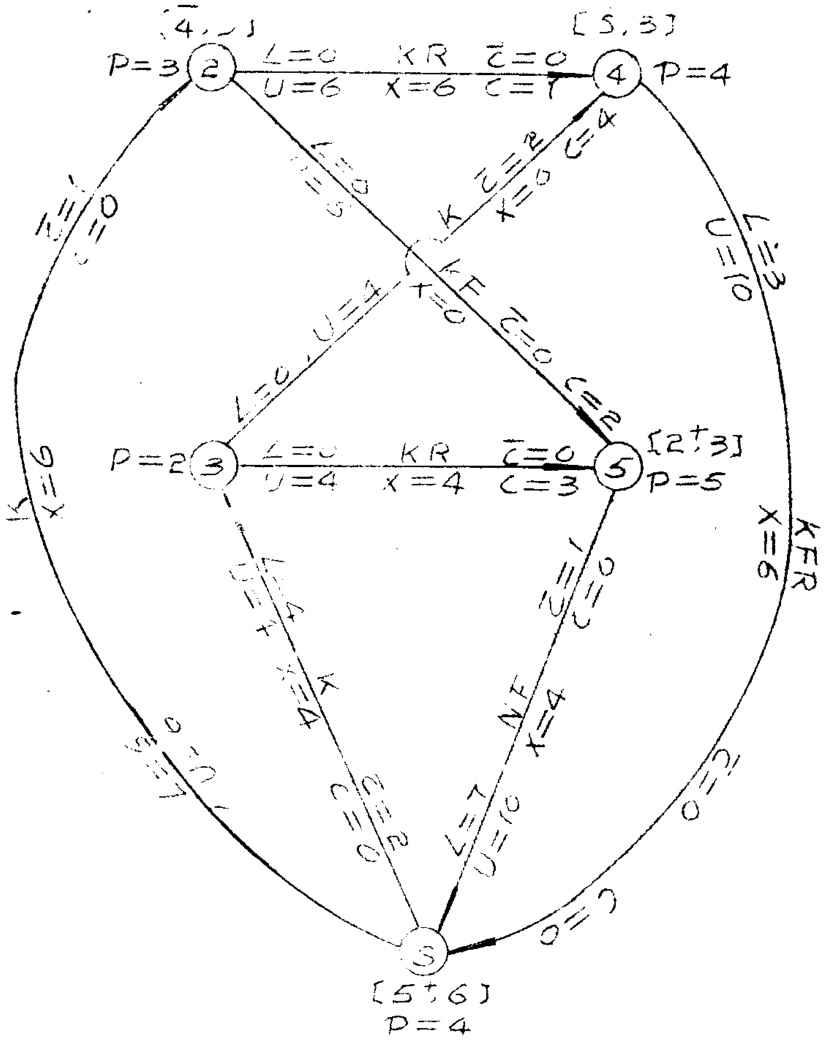
支线2～5可有顺向流。因$K_2=3$小于$U_{25}-X_{25}=6$，故标定点5为〔2^+，3〕，而得标定环道S—4—2—5—S。将环道上X_{25}和X_{5S}增加3单位，从X_{4S}和X_{24}中减去3单位。取消各标志，决定新状态如图2．15。图中各支线的状态记号均有K字母。亦即均已达到良好状态。最优解已经得到。其解为由点2分送3单位至点4和点5从点3送4单位至点5。

上例用逆境法解此简单题目，似嫌繁冗但此法计算中仅用加和减，且所需计算机储者存量甚小。故用于复杂网络十分有效。

图2．15在后面 ——————→

有很多问题，初看起来似不可用逆境法求解。实际上可使之组成为封闭网络并用逆境法求解。例如工作分派问题，最短路程问题，最大流量问题和用CPM或PERT所分析的问题等。后者将在下节中

图2·14　第三次标定环道

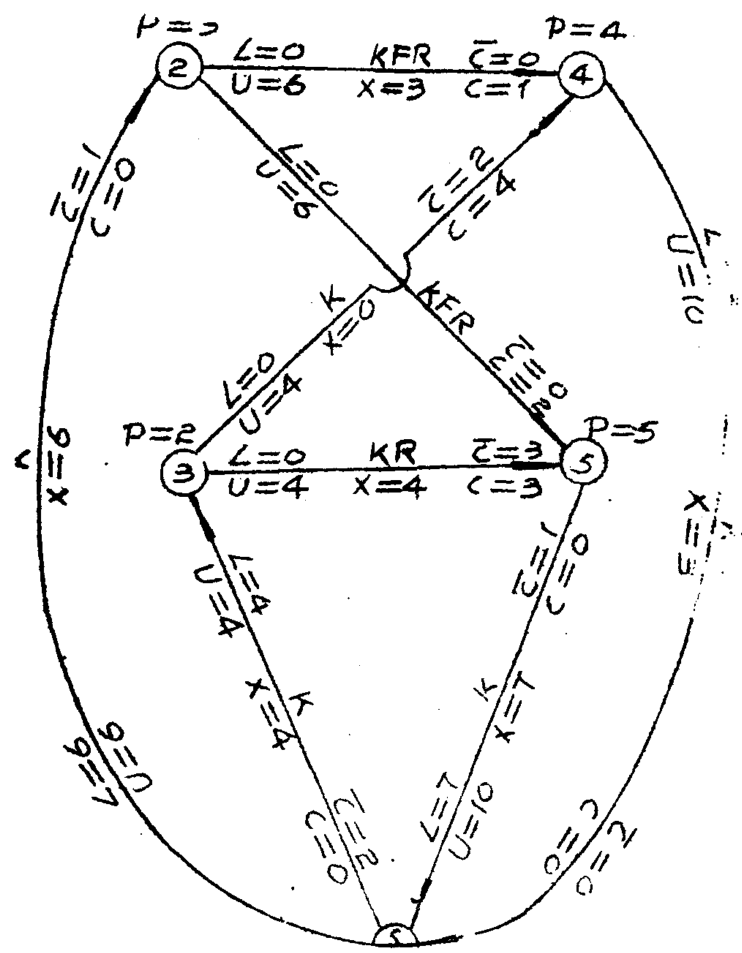


详细讨论·

前所讨论的最短路程问题（图2·3）·若在网络中加一点S与

0和T相连，并付支线S—0和T—S上注明最大和最小容量均为1。其它各支线最大容量为1，最小容量为零，则得封闭网络如图2·16所示。图中支线上的距离作为逆境法中的单价。S—0和T—S的单价可以定出任意值。用逆境法可求得费用最低的“运输”。

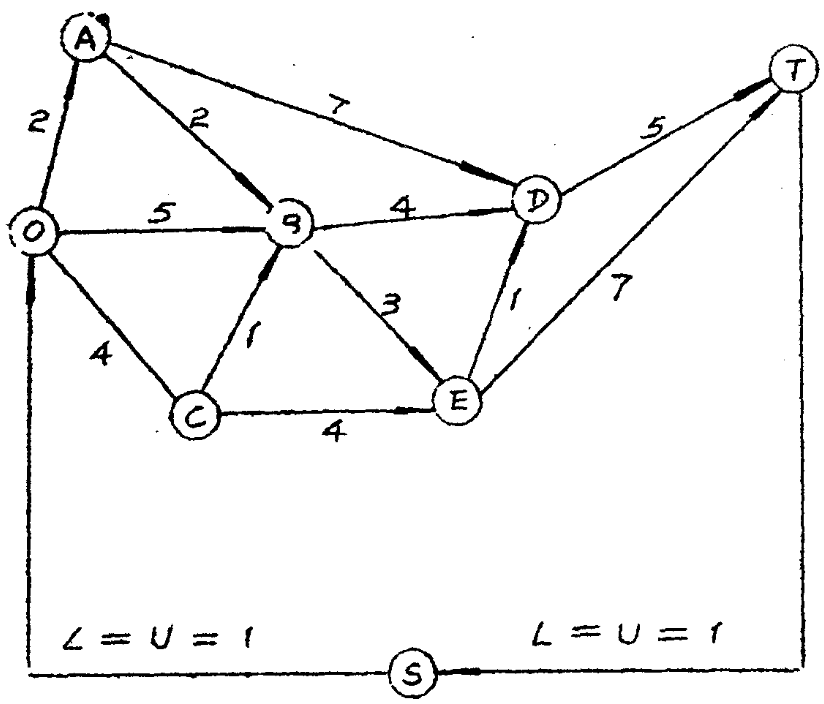
图2·16　取优解



最大流量问题亦可组成一封闭网络为逆境问题。且仅需将各原支线中的运费单价 C_{ij} 为零。从汇到源支线的单价可令为－1。应用逆境法求从汇到源的最大流量。

在PERT或CPM的网络分析中。若将其中每件工作所需时间看作运输单价并给一负号，然后将该题为最短路程问题处理，则关键路（Critical Path）为最长路程。并可变为逆境问题求解。

图2·16　最短路程问题用逆境法表示



注：其它各支线中，L＝0，u＝1

§2—4　工程管理技术：CPM 和 PEPT

大型工程常常包括很多不同的复杂任务，必须用有系统的和较有效的管理技术，在经济条件的限制下，尽量减少工程实施所需的时间。工程管理可按顺序分为规划，工程安排和进度控制等三步。

工程规划包括：

1. 将整个工程分解为各别的任务。

2. 估计各任务所需完工时间。

3. 把所有任务用一箭号网图代表，在网图中明确地表示各任务间的相依关系，许可用来排定日期。

在安排各任务的日程中，必须：

1. 制成工程实施的时间表，注明各任务的开始和结束时间和该任务与其它任务的关系。

2. 决定网络中直接影响全部工程竣工时间的一些关键任务和关键途径。

3. 决定非关键任务的松弛时间，当这些任务发生延误时，或在现有资源分配的平衡上，均可有利地运用松弛时间调整。

工程管理的最后一步为施工进度的控制此步包括应用时间表和号图作定期的进度汇报，并按需要来修正和更新分析网络，决定如何处理所有尚待完成的任务。

CPM（The Critical Path Method）关键途径法和PERT（The Project EValuation and ReView

Technique)工程估检技术，在工程管理技术中占显要地位。两法约同时在1956～1958年间发展，前者起始于美国 E · I · du Pont de Nemours公司用在基建工程的管理。后者则始于美国海军用在北极星或导弹工程的管理。经验证明此种方法的应用，显著地节省工程费用，所以在美国已得到广泛的应用。且有些重要工程的投标书中，已规定必须提出用 CPM和 PERT排出的施工时间表。

CPM和 PERT均用来决定一工程的时间表，二者的起源虽不同，但其方法颇相似。二法的最重要的区别是，CPM假设各任务所需完工时间是确定性的，而 PERT则考虑其随机性。CPM考虑工程所需时间和费用的比较研究。但现时所用的CPM和 PERT，其区别已不十分明显，大多数所用的PERT中，仅用一任务所需的期望完成时间来安排时间表，且 PERT亦已考虑时间和费用的比较研究。所以其区别已不十分明显。本节中将讨论规划和安排工程两部份。

§2—4—1　箭号网图

箭号网图是用来帮助规划工程中的各种不同任务和安排各任务的日程。每一任务在图中用一箭号表示，箭尾和箭头分别表示该任务的开始和结束。每一任务并用（ i ， j ）表示。i和 j 均为正整数且 i < j。箭号图必须按下列规划制成：

1. 任一任务在箭号图中仅可用一个箭号代表。任一箭号仅能代表一个任务。

2. 不可用相同的（ i ， j ）代表两个不同任务

例如图2·17中，A和B为两种不同任务，若用2·17〔a〕图表示，则违反此规则，而必须用图2·17〔b〕中的任一形式表示。图中虚线代表一虚设任务D，其作用是使A和B可各用唯一的记号代表，完成虚设的任务所需时间应为零。虚设任务亦常用来建立各任务间的合理箭号图。例如若任务C必须在A和B完成后始能开始，但任务E仅需在B完成后即可开始，若用图2·18〔a〕来代表此关系，则为不正确的。因为该图代表C和E均要在A和B完成后始能开始。图2·18〔b〕用虚设任务D来区别C和E的情况。

图 2·17