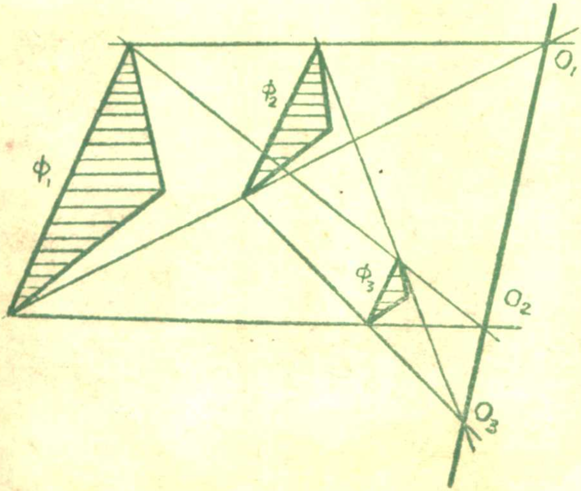
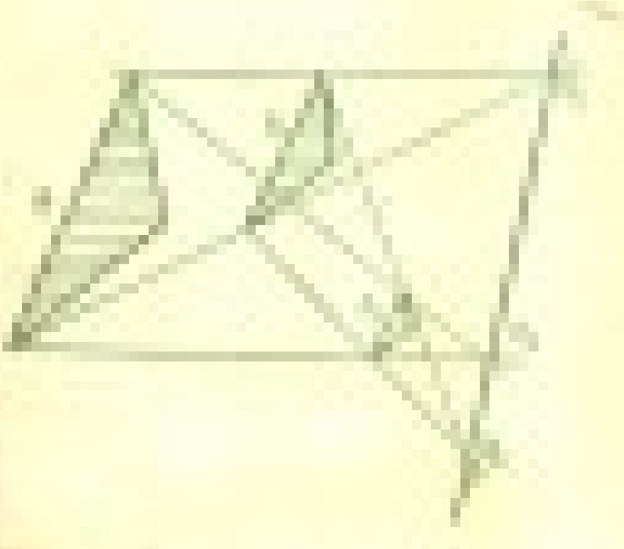
几何作圖与几何变换

刘凤璞



吉林人民出版社

几何作图与几何变换



几何作图与几何变换
刘凤璞编

几何作图与几何变换 刘凤璞 編

吉林人民出版社出版 （长春市北京大街） 吉林省书刊出版业营业許可証出字第1号

长春新华印刷厂印刷 吉林省新华書店发行

开本：787×1092 1/32 印张：1 5/8 插表：1 字数：36,000 印数：1—2,000册

1960年2月第1版 1960年2月第1版第1次印刷

統一书号：13091·20 定价(8)：0.19元

引 言

1959年暑假，作者应吉林省科协数理学会之邀，曾向吉林地区、四平专区等地的中学数学教师做了一个报告，题目是"中学几何作图問題"。当时吉林省科协数理学会，曾把那篇报告稿做为內部参考材料，印发給吉林省內各中学的数学教师。这个小册子就是在那篇报告稿的基础上，根据一些中学数学教师提出的意見，略加修改而成的。

这个报告題目，是吉林省科协数理学会根据中学几何教学实际情况，为解决一些具体問題而提出的，因而它的目的不在于全面地系統地闡述几何作图和几何变换，而在于就事論事，解决具体問題，这是应当向广大讀者說明的，其次，由于这本小册子的原稿是个通俗报告，因而在它的內容上，闡述观点多，邏輯論証少。这一点也是値得提出的。

时間仓促、水平所限、缺点錯誤，恐难避免，敬希同志們批評指正。

刘鳳璞

1959.12.于长春

目　次

一、几何作图

1. 几何作图在几何課中的作用和地位

現在中学几何課中，所涉及到的作图問題，就其全貌来講，已經不限于尺規作图的范围了。这里先談中学几何課中作图問題的全貌，然后再专談中学几何課里的尺規作图問題。

就中学几何課中作图問題的全貌来說，作图工具之多，是我們所熟知的，除了直尺、圓規之外，还有量角器、刻度尺、三角板、平行尺、比例規、对角綫尺和放縮器等。不言而喻，直尺、圓規之外的这些工具，在欧几里得看来，一定是不合法的，但我們認为这些工具是和直尺、圓規同样合法的有效的。作图問題之广，也是我們所熟知的，除了有传統的作图問題之外，还包括一些其它的作图問題，試看我們的初中几何課本中有作100°角的問題（見初中平面几何課本37頁），有用刻度尺求綫段中点的問題，还有用折紙方法求綫段中点的問題（皆見初中平面几何課本50頁），另外还有用比例規来等分綫段的問題（見高中平面几何課本32頁），凡此等等，不一而足。作图技巧要求之高，也是我們所熟知的，我們一方面要求学生要以矩构方、以規为圓，进行严格地科班式訓練，另一方面要求学生要以目定量、以手草形，达到高度地艺术性技巧。徒手（只用笔，而不用尺、規等工具）构图，在欧几里得时代是无所謂的事情，甚至是荒唐的事情。但是在我們今天的生活里确是必需的，例如

我們听报告时，如果需要画个三角形或者画个圆，不都是徒手画的嗎？综合以上所述三点，可見我們今天中学几何課中作图問題的全貌，已远远超出欧几里得时代的几何作图問題了．因此認为：中学几何作图問題完全是2000多年前欧几里得时代作图問題的翻版，完全脫离生产实际和生活实际的观点是片面的，是沒根据的．

下面专来談談中学几何課中的尺規作图問題．我們中学几何課中的尺規作图，和欧几里得时代的尺規作图以及传統的尺規作图也都有很大的差別．就作图工具来說（更确切地說，是作图公法問題），我們有直尺、圓規，欧几里得也有直尺、圓規，表面上看似乎沒有什么不同，但在实质上，这里却有根本性的差异．問題出在这些工具允許如何使用上，我們的圓規用法是：以已知点为圓心，以定长为半徑画圓；欧几里得的圓規用法是：以已知点为圓心作过另一点的圓，因此要以欧氏的圓規用法，画出一个以已知点 O 为圓心，以綫段 AB 为半徑（假定 A、B 都不与 O 相合）的圓，其层次之多，手續之煩，实在令人不能容忍．我們把这个問題的作法全部写出来．

設已知一点 O 及一已知綫段 AB，求作以 O 点为圓心，以 AB 为半徑的圓．用欧几里得的圓規来作时，具体步驟如下：

（1）以 O 点为圓心，作过 A 点的圓 C_1；

（2）以 A 点为圓心，作过 O 点的圓 C_2；

（3）确定圓 C_1、C_2 的交点 P 和 Q；

（4）以 P 点为圓心，作过 B 点的圓 C_3；

（5）以 Q 点为圓心，作过 B 点的圓 C_4；

（6）确定圓 C_3、C_4 的另一个交点 M；

（7）以 O 点为圓心，作过 M 点的圓 C．

这圓C才是我們所要作的圓（証明从略，图形讀者当不难繪出）。这里所談的圓，一般系指圓周而言，但是为了合于习惯，我們都說成圓了，后文同此。

圓規的两种不同用法，实质上完全表現出了两种不同的学术思想。欧几里得的用法是，脫离生产、脫离生活、学究式的古董式的用法；我們的用法是結合生产、結合生活、科学的現实的用法。虽然两种用法所能解决的問題量上相同，但是我們必須看到这种学术思想上質的差别。

另外，在我們中学几何課里，当学过用直尺、圓規作已知直綫的垂綫与平行綫之后，应当認为在其后的各种作图中，如果再遇到作垂綫或平行綫的步驟时，就完全可以用三角板来直接完成这个步驟。自然，这种作法欧几里得是不会允許的，而我們不仅允許，并且应当提倡，甚至还要明确地規定下来。应当看到这个規定既不破坏尺規作图的理論体系，又完全符合現实生活（工程师們作垂綫与平行綫时，就眞这么作）。

就作图的問題来說，我們現行中学几何課本里，选择的題目，一般說来对中学生是很适度的，分量也不算多。以初中平面几何为例，那里根本沒有离奇古怪的問題，象：已知一边和夹这边的一个角以及其余两边的差，作三角形；已知三条中綫，作三角形等問題，就要算作中学几何里比較难的問題了，一般的問題比它們还要容易一些。問題的数目，初中总共还不到200个作图題，何况教师还是选用。因此批評現行几何課本作图題多，作图題难，是沒有根据的。这种批評对几何課本及其作者来說，眞是冤哉枉也。

就作图的目的和要求来說，我們和历史传統的看法也不完全一样。我們今天的教学工作是依据馬列主义的認識論原理，以及教学工作的特点进行的。我們的教学工作要遵循教学原則

来进行，既要注意运用直观形象，又要重視发展抽象思維；既要充分作到深入浅出，又要尽量爭取系統严格；既要巩固理論知識，又要提高实践本領。六个原則，三个对立面。在几何課中，几何作图对貫彻这些原則都具有很大的意义。例如，对运用直观形象問題，图形本身是直观的，并且这些图形又要学生自己亲手来完成，因而对相应部分的几何知識的学习会留下深刻而直观的印象，并且对发展学生的空間想象力有很大益处；再如，发展抽象思維問題，解作图問題的四个步驟以及每个步驟本身，都是按照严格的邏輯体系构成的，特别是分析与討論两个步驟对发展学生的邏輯思維能力有很大的益处。要完成作图問題，形式主义的学习是不行的，教条主义的学习是无能为力的，因而作图問題的学习，就更有力的促进学生学习的自覚性。对巩固理論知識問題，我們知道，几何作图可以提供大量的練习材料，把学到的几何定理应用于解决某些具体問題，这一点几乎对每一章都是适用的，它对帮助巩固理論知識，确实起良好的作用。对提高实践本領問題，无論在測量繪图还是在其它繪图工作中，如果在几何課中学生已經对作图經过了严格的科班式的訓練，他們在别的繪图工作中，成績也将是比較优良的，因而也将会給生产建設直接带来好处。凡此等等，不一一列之。綜合上述几点，我們認为作图在几何課中作用是很大的，作图在几何課中应占有很重要的地位，要大大削减或根本删除它的观点是不正确的，就是只把它安排作一章也是不正确的。我們認为最好是把作图題尽可能地分散排在相应的各个章节里，与有关的各部分內容密切結合起来。我国現行的中学数学教学大綱对作图題的安排和上述原則是一致的。

2. 几何作图公法和基本作图

所有的几何作图，都是要求按某些已知条件，作出某种满足于一定要求的几何元素（如点、直綫、圓、三角形等等），但是几何作图問題，只給出已知条件和指出所求元素，还是不确切的，这里还必須指出用什么工具，以及在怎样用法下来完成作图，这个問題才算确定下来．事实上，由于所用工具的不同，同一个問題的意义就会有根本的不同．例如已知二边 a 和 b 以及其夹角为 36° 求作三角形問題，若是所允許的工具中，除了直尺和圓規之外，还有量角器，那么这个問題的作图就非常簡单，若只允許使用直尺、圓規，这个問題就变得十分复杂了．再如作100°角的問題，若用量角器很容易解决，但是若只許用直尺、圓規，这个問題就根本不能解决．由此可見，由于使用工具不同，問題能否解决以及能解决时是繁是簡都将有所不同．那么几何作图究竟应当規定使用哪些工具？这些工具又允許怎样使法？就成为很重要的問題了．

由于历史的传統，尺規作图的体系是很完整的，它在几何課中的作用和地位已見前文．我們今天的中学几何課中除了有不少其它种作图之外，就其基本体系来說，采取的仍是尺規作图．但是所謂直規作图，并不是直尺、圓規怎样用都算数的，而是有一定用法的．把这些用法以数学語言具体化固定下来的就是作图公法．然而同是說的尺規作图公法，却在各書上常常出現不同的表述形式，各种表述形式在实际內容方面是否一致，其間的关系是怎样的；从理論上講較严格的作图公法应当怎样叙述；在中学里采用什么样的表述形式为好，等等問題，都是值得研究的．

現在把我們最常見的几种書籍中的尺規作图公法，列举几种，幷稍事比較。

① 在Д. И. Перепелкин 著（馬忠林譯)的初等几何学教程上卷中（第二章§17，50頁）提出下列的公法：

“a）过两已知点引一直綫；

b）决定两已知直綫的交点；

c）已知圓心和半徑作一圓周；

d）决定已知直綫和已知圓周的交点（这一个問題的特殊情形是截取一个等于已知长的綫段)；

e）决定两已知圓周的交点。”

这組公法是最常見的，許多几何学教程都采用这五条公法。对这五条公法的使用限于有限次，因此所謂尺規作图問題，就是它的解法要归結为上述五条公法的有限次結合。另外在作图时还允許我們选取任意元素（如在直綫上或直綫外任取一点等等)。

② 欧几里得的作图公法共有三条（参看秦元勛著几何学通論第二章Ⅱ之4．第10—11頁)：

“直尺仅有两种用法，如下：——

1．經过已知的两点作一直綫．

2．无限制的延长一已知直綫．

这里必須說明，欧氏的尺子上面沒有刻度，故不能作量长度之用．

欧氏的圓規只有一个用法，如下：——

已知 O 点及 A 点，以 O 点为圓心，以 OA 为半徑作一圓。”

③ 在Н. А. Глаголев 著（奚今吾、管承仲譯）的初等几何学中（第二章Ⅳ几何作图題§73，76頁）写道，

"圆規是为了画圓和圓弧用的，直尺是为了画直綫用的。"

④ 在刘薰宇著的初級中学課本平面几何里（第一章XⅣ基本作图72，56頁）写道：

"在初等几何学里，作图所用的工具，理論上有一定的限制。就是只限于使用直尺（沒有刻度的）和两脚規。用直尺：①是过两点作直綫或連結两点成綫段，②是延长直綫。用两脚規：①是截取綫段等于一条已知的綫段，②是画圓（或弧）。"

⑤ 在余元庆等四人所編的現行的初級中学課本平面几何里（第二章Ⅻ基本作图题§60，97—98頁）写道：

"很明显，利用直尺（沒有刻度的）和圓規，我們可以：

（1）过两个已知点作一直綫；

（2）把一条已知綫段延长到任意长；

（3）以已知的点为圓心，已知的长为半徑作一个圓；

（4）在一条已知直綫上截取一条綫段等于一条已知的綫段。"

我們就列举这些吧！

第①組公法暂名之为"通用公法"，第②、③、④、⑤各組公法各以其作者的姓（或姓的第一个字）来表示之，如第②組公法我們称之为"欧氏公法"，其他类推。所有这些公法，我們都将以"通用公法"为标准来品評它們。

首先是"欧氏公法"。其第一条和"通用公法"第1条一致。其第2条在"通用公法"中是沒有的，因此我們要追究这条是不是必要的？回答是否定的。并且这条公法本身也是含糊

不清的，試問“无限制的延长一巳知直綫”究竟是什么意思呢？本来直綫是无限长的，怎样再把它无限延长呢？如果說“无限制的延长一条巳知綫段”，这在意义上才是明白的，但仍然是沒必要的．因为：既是巳知綫段，則必知其两个端点，于是根据“欧氏公法”第1条，則其所在的直綫是可以作出的，因而当然不必把延长綫段的事規定为作图公法了．这种看法也完全可以用在“刘氏公法”及“余氏公法”相应的条款上．下文将不另談．应当特别注意的是“欧氏公法”的第3条，和“通用公法”的第3条是有原則区别的．“通用公法”中第2、4、5各条，在欧氏公法中是沒有的，但是他不是不用的，而是默認的，因此实际上也是有的．这样一来，“通用公法”和“欧氏公法”最根本的区别就在于第3条了．由此所反映出的学术思想上的差别，巳見前述，此处不再重复．至于在有这个区别的情况下它們解决問題的范围是否一致的問題，倒很值得研究．即：用其中某一組公法能解决的問題，是否用另一組也能解决呢？回答是肯定的．它們解决問題的范围是一样的．为了証明这一点，我們只要証明用其中任何一組公法的各条能作出另一組公法的各条就可以了．前面巳經証明了用“欧氏公法”可以作出“通用公法”第3条，因而就巳經証明了用“欧氏公法”可以作出“通用公法”的一切条款．至于反面的問題，用“通用公法”作出“欧氏公法”的一切条款那是不用說了．

其次，談“格氏公法”（第③組）．在該書中并沒明显的提出作图公法，用連貫叙述的方式，說出了相当于“通用公法”的第1、3各条，至于第2、4、5各条是默認了的．因之它与“通用公法”实际上沒有区别．

再次，談“刘氏公法”（第④組）．它共包括四条，其直尺用法之①与“通用公法”第1条一致（他說的麻煩一些），直尺

用法之②在前面談“欧氏公法”时已講了．其圓規用法之①是多余的，这是因为它也默認了“通用公法”的第2、4、5各条，而第4条与其圓規用法之②結合起来，就解决了其圓規用法之①．总括起来，它实际效能是和“通用公法”一样的，但是在叙述上，除了有默認的条款之外，还有多余的。

最后，关于“余氏公法”（第⑤組），我們沒有必要再逐条重复了．

前面所談的問題，都是以“通用公法”为标准来說的，这是不是意味着“通用公法”是理論上最严格的公法呢？不是的．事实上，如果从理論上严格地探討作图公法的話，那应該和研究公理体系的方法相象（仅是相象），应該滿足完备性，在作图过程中表現为，不默認任何作法，所用到的都有根据，另外还应該滿足独立性，凡能用其他条公法作出的命題，就不再列为公法．用这样的标准来衡量“通用公法”，我們就能看出它不滿足独立性的要求．在单圓規作图中，那里研究的問題，实际上是用“通用公法”的第3、5两条就可以解决全部尺規作图問題，所差的就是画不出直綫（即“通用公法”第1条解决不了），因此我們知道只要以“通用公法”第1、3、5三条则可以解决尺規作图的全部問題，亦即第1、3、5三条合起来就和“通用公法”效能一样．可見其第2、4两条也是多余的。

从其第1、3、5三条中，是否还能成条的去掉之后仍与“通用公法”效能一样呢？这是不可能的了．但是对其中的某一条是否还可以加严呢？答曰：可以，例如“通用公法”第3条用“欧氏公法”的第3条换过之后的1、3、5第三条仍与原来未换第3条时效能一样．事实上在前文談“欧氏公法”的作图时，仅用了“欧氏公法”的第3条和默認了“通用公法”的

第5条，就已作出“通用的公法”第3条了．

現在我們再来談一談究竟采取哪一組公法合适的問題．这要以不同的对象分别論之，对高师的学生来說，系統的学习平面几何时，我認为采取“通用公法”是合适的，因为它滿足了完备性，但沒必要把第3条換成“欧氏公法”的第3条．自然更沒有必要采用第1、3、5各条（或者其中的3又換成“欧氏公法”的第3条）所組成的公法，比“通用公法”更严的几組，学究气实在太浓了．对中学生来說，我認为只提出“通用公法”中的第1、3两条就可以了，其余各条以默認的方式承認它而不必明文列出来．至于明文列出1、3两条，其好处是很明显的，不仅論述有根据，而且可以避免学生在作图中濫用直尺圓規(例如用了尺上的刻度)．現行中学几何課本共提出四条，其中第2、4两条还是不列为宜．

下面談基本作图問題．

根据上面的論点，我們知道要解决任何一个尺規作图問題，就是要把它归結为 a—e 五条公法的有限次結合．但是在实际解作图題时，所得到的公法結合次数相当多，有时可以达到几十个，这样就使得作图步驟的叙述变得非常冗长而且很不显明．例如，解已知一边及其对角和此边上的高求作三角形的問題，要完全直接归結于 a—e 的五条公法的結合，則有（对于某一种解法，解法从略）：

$$cddcdceacceaacdcceabcbcbacdcceadaa$$

三十四次的結合．因此在实际解作图題时，往往不是一一按公法的結合来作，常常把它們归結到一些用尺規可以作出的簡单而又用处較广的作图題和某些公法的結合就可以了．这些作图題称为基本作图，由于教学大綱結构的不同，各書規定为基本作图的題目个数也不尽相同．根据我国現行中学数学教学大綱

的規定，应当認为下列的作图是基本作图：

作图1．已知三边作三角形；

作图2．作与已知角相等的角；

作图3．平分已知角；

作图4．过已知直綫上一点作这直綫的垂綫；

作图5．过已知直綫外一点作这直綫的垂綫；

作图6．平分已知綫段；

作图7．已知两边及其夹角作三角形；

作图8．已知两角及其夹边作三角形；

作图9．过已知直綫外一点作这直綫的平行綫；

作图10．等分已知綫段；

作图11．作已知圓的切綫，使它平行于已知直綫；

作图12．过已知点作已知圓的切綫；

作图13．作两个圓的公切綫（內公切綫及外公切綫）；

作图14．以已知綫段为弦作一弧，使其弓形角等于已知角；

作图15．作已知三角形的內切圓；

作图16．作已知三角形的外接圓；

作图17．已知与多边形某边对应的一边，作一相似多边形；

作图18．按已知比內分（或外分）已知綫段；

作图19．作三已知綫段的第四比例綫段；

作图20．作二已知綫段的比例中項綫段；

作图21．作一綫段使其平方等于二已知綫段的平方和；

作图22．作一綫段使其平方等于二已知綫段的平方差；

作图23．作与已知多边形等积的三角形．

在論証体系里有：公理、定理及一般証明問題．在作图体系里有：公法、基本作图及一般作图題．两相对应，公法相当于公理，基本作图相当于定理，解作图題的过程中，要經常的应用基本作图，因而必須把它們練习純熟才行．

3．解作图題的步驟

我們都知道，解作图題通常分为四个步驟：（1）分析；（2）作法；（3）証明；（4）討論．下面略談它們的目的和进行方法．

（1）分析．其第一个目的是找出存在于已知条件和未知条件之間的几何联系，从而得到解答問題的方法．为了实現这个目的，通常先作一个草图，假定它就是求作的图形，然后区分出其中的已知部分与未知部分，进而仔細观察其間的相互关系，分析出哪一部分可以作以及如何作，其次又有哪一部分可以作了以及它又該如何作，如此等等．在分析中常常可以看到能够先作出一个三角形，然后在这个基础上継續完成其他部分，这就是所謂三角形奠基法．有时要先作一些輔助綫（或曰补助綫），才能看出已知部分与未知部分之間的联系．进行分析时，主观因素起很大的作用，不仅对于具有不同經驗和不同知識的人，完成分析会有快慢之别，而且还可能产生本质上很不相同的分析方法，从而得到的解法也根本不同，我們当然希望要能够获得优异解法的分析．

分析的第二个目的是找出解的一般性，使分析必須保証用所选择的方法，把問題所存在的解全部找到．往往由于分析的不全面，忽略了已知条件与未知条件的某些可能存在的情形，