第30届国际数学竞赛预选题

单墫 葛军 刘亚强

数学奥林匹克

1989

北京大学出版社

数学奥林匹克(1989)

——30届国际数学竞赛预选题

单 墫 刘亚强 葛 军

北京大学出版社

数学奥林匹克（1989）
——30届国际数学竞赛预选题
单 墫 刘亚强 葛 军
责任编辑：王明舟
*
北京大学出版社出版
（北京大学校内）
国防科工委印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售
*
787×1092毫米 32开本 6.125印张 100千字
1990年10月第一版 1990年10月第一次印刷
印数：00001—21,000册
ISBN 7-301-01379-5/O·227
定价：3.10元

前　言

第30届国际数学奥林匹克于1989年7月在联邦德国举行。参加国家和地区多达50个，各国和地区给这届IMO提供的问题共109道。研究这些问题，对于数学教育是有益的。

除了这109道问题及其解答，本书还收入加拿大为准备这届IMO的训练题。题目是加拿大数学家Andy Liu提供给我们的，共48题（缺第30题），解答是我们做的。

编　者

1990年3月

目　　录

30届 IMO 预选题（1989）

1.（澳大利亚） 在集 $S_n=\{1,2,\cdots,n\}$ 中定义一种新乘法 $a*b$，具有如下性质：

（1）对任意的 $a\in S_n$，$b\in S_n$，积 $c=a*b\in S_n$。

（2）若通常的乘积 $a\cdot b\leqslant n$，则 $a*b=a\cdot b$。

（3）对于 $*$，通常的乘法定律成立，即

（i）$a*b=b*a$，　　　　　　　　　　（交换律）

（ii）$a*(b*c)=(a*b)*c$，　　　　　　（结合律）

（iii）若 $a*b=a*c$，则 $b=c$。　　　　（消去律）

在 $n=11$ 与 $n=12$ 时，试对这种新乘法设计一个乘法表，使以上条件均能满足。

解 首先考虑 $n=12$。

为了计算 $c=a*b$，将 $a\cdot b \bmod 13$ 即可。即定义 c 为

$$a\cdot b=13k+c,\quad k\geqslant 0,\quad 0\leqslant c<13,$$

其中 $c=0$ 是不会发生的（否则 $ab=13k$，但13为质数，$1\leqslant a,b\leqslant 12$），所以 $c\in S_{12}$。

运算性质（2），（3）显然均成立。

这一做法对于 $n+1$ 为质数的情况均适用。

现在考虑 $n=11$。先定义映射 f 为：

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$f(a)$	0	1	4	2	6	5	9	3	8	7	10

然后将 S_{11}的乘法 $*$ 映为$\{f(a)|a\in S_{11}\}$中 mod 11 的 加法，即为了计算 $c=a*b$，先求出 d：

$$d=\begin{cases} f(a)+f(b), & 若\ f(a)+f(b)\leqslant 10; \\ f(a)+f(b)-11, & 若\ f(a)+f(b)\geqslant 11. \end{cases}$$

然后定出 c，满足 $f(c)=d$（即 $c=f^{-1}(d)$）。

映射 f 是这样构造的：为使$1*a=a$对所有 $a\in S$成立，需且只需$f(1)+f(a)=f(a)$，即$f(1)=0$。

设 $f(2)=1$，则

$$f(2\times 2)=f(2)+f(2)=2,$$

$$f(8)=f(4\times 2)=f(4)+f(2)=2+1=3.$$

再设 $f(3)=4$（尚未用到的最小值），则应有

$$f(6)=f(2)+f(3)=5,\quad f(9)=f(3)+f(3)=8.$$

继续取 $f(5)=6$，这时 $f(10)=7$。最后取 $f(7)=9$，$f(11)=10$（取 $f(7)=10$，$f(11)=9$也可以）。

上面 f 的取法可以保证（1）成立。(2)，(3)成立是显然的。

2.（澳大利亚） $\triangle ABC$的角A的平分线交外接圆于A_1。类似地定义 B_1，C_1。AA_1 与 B，C 处的外角平分线相交于 A_0。类似地定义 B_0 与 C_0。证明

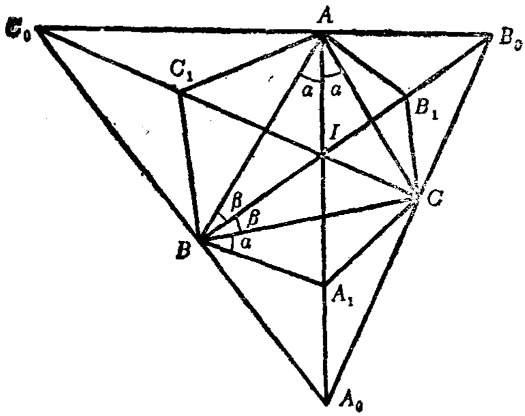
$$S_{A_0B_0C_0}=2S_{AC_1BA_1CB_1}\geqslant 4S_{ABC}.$$

证明 设I为$\triangle ABC$的内心，则I为 AA_0，BB_0，CC_0 的交点。

$$\angle BIA_1=\alpha+\beta,\ \angle A_1BI=\beta+\angle A_1BC=\beta+\alpha,$$

所以 $A_1B=A_1I$。

易知 $BB_1\perp BA_0$，所以



$$\angle A_1BA_0=90^\circ-\angle A_1BI=90^\circ-\angle BIA_1=\angle A_1A_0B,$$
$$AA_0=A_1B=A_1I$$

于是

$$S_{\triangle A_0BI}=2S_{\triangle A_1BI}.$$

类似地还有其他五个等式。这 6 个等式相加便得

$$S_{\triangle A_0B_0C_0}=2S_{AC_1BA_1CB_1}.$$

由于 A_1，C_1 分别为 A_0I，C_0I 的中点，所以 A_1C_1 是 $\triangle A_0C_0I$ 的中位线，平分 IB，从而

$$S_{\triangle IA_1C_1}=S_{\triangle BA_1C_1}.$$

类似地，还有三个等式，将它们相加得

$$S_{\triangle A_1B_1C_1}=S_{\triangle BA_1C_1}+S_{\triangle AC_1B_1}+S_{\triangle CB_1A_1}=\frac{1}{2}S_{AC_1BA_1CB_1}.$$

于是，要证明本题的第二个结论，只需证明：

$$S_{\triangle A_1B_1C_1}\geqslant S_{\triangle ABC}.$$

熟知 $\triangle ABC$ 的面积为

$$2R^2\sin A\sin B\sin C=2R^2\sin 2\alpha\sin 2\beta\sin 2\gamma$$

(R为外接圆半径)。

$\triangle A_1B_1C_1$ 的内角分别为 $\alpha+\beta,\beta+\gamma,\gamma+\alpha$,

因此

$$\begin{aligned}
S_{\triangle A_1B_1C_1}&=2R^2\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)\sin(\gamma+\alpha)\\
&=2R^2(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)(\sin\beta\cos\gamma\\
&\quad+\cos\beta\sin\gamma)(\sin\gamma\cos\alpha+\cos\gamma\sin\alpha)\\
&\geqslant 2R^2\cdot 2^3\sqrt{\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta\sin\beta\cos\gamma\cos\beta}\\
&\quad\times\sqrt{\sin\gamma\sin\gamma\cos\alpha\cos\gamma\sin\alpha}\\
&=2R^2\cdot 2^3\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta\cos\beta\sin\gamma\cos\gamma\\
&=2R^2\cdot\sin 2\alpha\sin 2\beta\sin 2\gamma\\
&=S_{\triangle ABC}.
\end{aligned}$$

即 (2′) 成立。证毕。

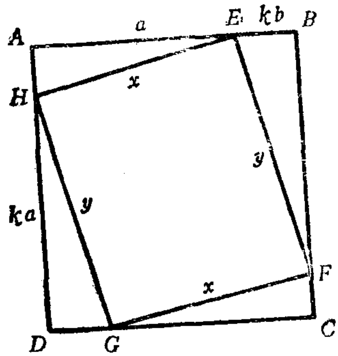
本题尚有其他多种证法．第二部分即1988年加拿大提供的预选题．《几何不等式》(上海教育出版社 1980年出版，单墫著)的习题七第26题的解法给出了(2′)的另一种证明．

3．(澳大利亚) 地毯商人阿里巴巴有一块长方形的地毯，其大小未知。很糟糕，他的量尺坏了，而又没有其他的测量工具。但他发现将这一地毯平铺在他两间店房的每一间中，地毯的每个角恰好与房间的不同的墙相遇。如果两间房间的尺寸为38呎×55呎与50呎×55呎，求地毯的尺寸。

解 设地毯的边长为x,y，易知

$$\triangle AEH\cong\triangle CGF\backsim\triangle BFE\cong\triangle DHG.$$

设$\dfrac{y}{x}=k$，则k是上述两组三角形的相似比。设$AE=a$,



$AH=b$。由相似，$BE=kb$，$DH=ka$。于是

$$a=kb+50。\qquad ka+b=55。$$

从而

$$a=\frac{55k-50}{k^2-1}，\qquad b=\frac{50k-55}{k^2-1}。$$

$$x^2=\left(\frac{55k-50}{k^2-1}\right)^2+\left(\frac{50k-55}{k^2-1}\right)^2$$

$$=\frac{3025k^2-5500k+2500+2500k^2-5500k+3025}{(k^2-1)^2}。$$

化简为

$$x^2(k^2-1)^2=5525k^2-11000k+5525。$$

类似地，由另一间房子得

$$x^2=\left(\frac{55k-38}{k^2-1}\right)^2+\left(\frac{38k-55}{k^2-1}\right)^2。$$

化简为

$$x^2(k^2-1)^2=3025k^2-4180k+1444+1444k^2-4180k+3025$$
$$=4469k^2-8360k+4469。$$

比较以上两式得

$$5525k^2-11000k+5525=4469k^2-8360k+4469,$$

即

$$1056k^2-2640k+1056=0,$$
$$2k^2-5k+2=0,$$

$k=2$或$\frac{1}{2}$，也就是一条边长是另一条边长的两倍。不失一般性，设

$$y=2x, a+2b=50, 2a+b=55.$$

于是

$$a=20, b=15, x^2=a^2+b^2=20^2+15^2=625,$$
$$x=25, y=50.$$

地毯的尺寸为25呎×50呎。

4．（澳大利亚） 地毯商人阿里巴巴有一块长方形的地毯，尺寸未知。很糟糕，他的量尺坏了，又没有其他测量工具。但他发现将地毯平铺在他两间店房的任一间，地毯的每一个角恰好与房间的不同的墙相遇。他知道地毯的长、宽均是整数呎，两间房子有一边的长相同（不知多长），另一边分别为38呎与50呎。求地毯的尺寸。

解 设房间未知的一边的长为q呎，同上题可得

$$(kq-50)^2+(50k-q)^2=(kq-38)^2+(38k-q)^2,$$

即

$$k^2q^2-100kq+2500+2500k^2-100kq+q^2$$
$$=k^2q^2-76kq+1444+1444k^2-76kq+q^2.$$

于是

$$1056k^2-48kq+1056=0,$$

即

$$22k^2-kq+22=0,$$
$$kq=22(k^2+1),$$
$$q=22\left(k+\frac{1}{k}\right).$$

由于 $k=\frac{y}{x}$ 是有理数，令 $k=\frac{c}{d}$，其中 c,d 是正整数，且$(c,d)=1$，则 $q=22\left(\frac{c}{d}+\frac{d}{c}\right)$。于是$22\left(c+\frac{d^2}{c}\right)=dq$ 是整数。从而 c 是22的约数。同样 d 也是22的约数。因而 $c,d\in\{1,2,11,22\}$。

由于$(c,d)=1$，所以（不妨设$c>d$）

$$k=1,2,11,\frac{11}{2}.$$

于是相应地，

$$q=44,55,244,485,125.$$

与上题类似

$$x^2(k^2-1)^2=(k^2+1)(q^2-1900). \qquad (1)$$

$k=1$，导致$0=72$矛盾；$k=2,q=55$，得出上题的解。

若$k=11$，则$61\mid(k^2+1)$，$61^2\nmid(k^2+1)$.$61\mid q^2$，$61\nmid1900$. 所以$61\mid(1)$的右边，$61^2\nmid(1)$ 的右边，这与（1）左边为平方数矛盾。

若 $k=22$，同样可得 $97\mid(1)$ 的右边，而$97^2\nmid(1)$ 的右边，仍导致矛盾。

若$k=\frac{11}{2}$，$k^2+1=\frac{125}{4}$，$k^2-1=\frac{117}{4}$，$q=125$，则5^3整除上式右边而5^6不能，矛盾。

所以$k=2$，$q=55$呎，$x=25$呎，$y=50$呎。

5．（保加利亚）数列a_0，a_1，…与$b_0, b_1, \cdots$定义如下：

$$a_0=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad a_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\sqrt{1-a_n^2}},n=0,1,2,\cdots.$$

$$b_0=1,\quad b_{n+1}=\frac{\sqrt{1+b_n^2}-1}{b_n},n=0,1,2,\cdots.$$

证明对于每一个$n=0,1,2,\cdots$，有不等式

$$2^{n+2}a_n<\pi<2^{n+2}b_n.$$

解　$a_0=\sin\frac{\pi}{2^2}$。设$a_n=\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}$，则

$$a_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{1-\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}}=\sin\frac{\pi}{2^{n+3}}.$$

同样用归纳法可以证明

$$b_n=\operatorname{tg}\frac{\pi}{2^{n+2}}.$$

由于$x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$时

$$\sin x<x<\operatorname{tg}x,$$

所以

$$a_n < \frac{\pi}{2^{n+2}} < b_n.$$

即题述不等式成立。

6．（保加利亚） 圆O_1，O_2相切于点A。过A的直线l分别交圆O_1，O_2于C_1，C_2。过点C_1，C_2的圆O分别再交圆O_1，O_2于B_1，B_2。圆n为$\triangle AB_1B_2$的外接圆。圆k与n相切于A，分别交圆O_1，O_2于D_1，D_2。证明

（1）点C_1，C_2，D_1，D_2共圆或共线；

（2）当且仅当AC_1，AC_2为圆O_1，O_2的直径时，B_1，B_2，D_1，D_2共圆。

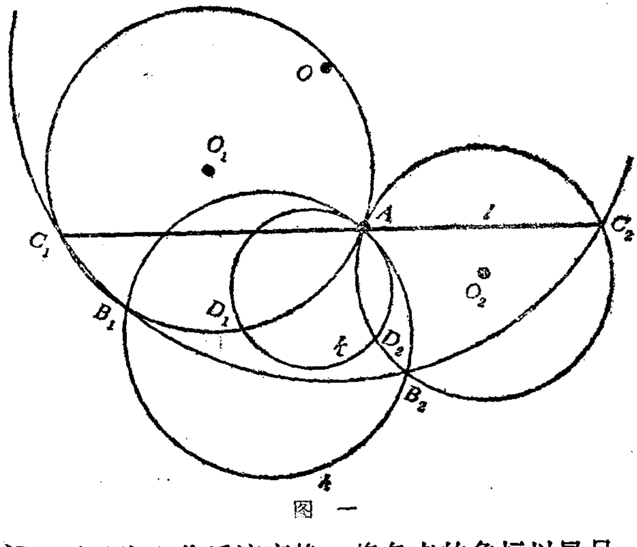


图 一

解 以A为心作反演变换。将各点的象标以星号。由于圆O_1，O_2相切于A，O_1^*与O_2^*为平行线。同样n^*与k^*为平行线。$B_1^*B_2^*D_2^*D_1^*$为平行四边形（图二）。

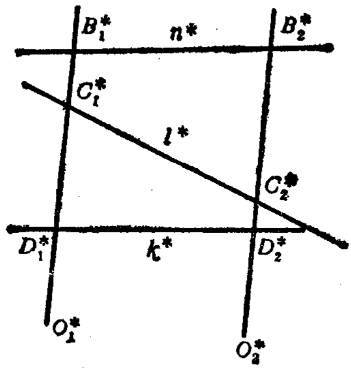


图 二

由于直线 $B_1^*B_2^* /\!/ D_1^*D_2^*$，而圆$O^*$过点 $C_1^*, C_2^*, B_1^*, B_2^*$，所以$C_1^*, C_2^*, D_1^*, D_2^*$共圆。从而$C_1, C_2, D_1, D_2$ 共圆或共线。

B_1, B_2, D_1, D_2共圆 $(\Longleftrightarrow)$ $B_1^*, B_2^*, D_2^*, D_1^*$共圆$(\Longleftrightarrow)$ $\square B_1^*B_2^*D_2^*D_1^*$ 为 矩 形 $(\Longleftrightarrow)$ $\angle C_1^* D_1^* D_2^* = 90°$ $(\Longleftrightarrow)$ $\angle C_1^*C_2^*D_2^* = 90°$ $(\Longleftrightarrow)$ $l^* \perp O_1^*$ $(\Longleftrightarrow)$ AC_1, AC_2 分别为圆 O_1, O_2 的直径。

7.（保加利亚） 证明对每一整数$n>1$，方程

$$\frac{x^n}{n!}+\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots+\frac{x^2}{2!}+\frac{x}{1!}+1=0$$

无有理根。

解 首先证明对每个整数 $k>0$ 及每个素数 p，$p^k \nmid k!$.

设 $s\geqslant 0$ 为整数，满足 $p^s \leqslant k < p^{s+1}$，则满足 $p^r \mid k!$的最大整数

$$r=\left[\frac{k}{p}\right]+\left[\frac{k}{p^2}\right]+\cdots+\left[\frac{k}{p^s}\right]$$

$$\leqslant \frac{k}{p}+\frac{k}{p^2}+\cdots+\frac{k}{p^s}$$

$$=k\cdot\frac{1-\frac{1}{p^s}}{p-1}<k.$$

所以 $$p^k \nmid k!.$$

设有理数 α 为所给方程的根，则

$$\alpha^n+n\alpha^{n-1}+\cdots+\frac{n!}{k!}\alpha^k+\cdots+\frac{n!}{2!}\alpha^2+\frac{n!}{1!}\alpha+n!=0.$$

由此易知 α 为整数$\left(设\ \alpha=\frac{c}{d},\ c,d\ 为互质整数\right)$,则

$$c^n+nc^{n-1}d+\cdots+\frac{n!}{1!}cd^{n-1}+n!d^n=0,$$

从而 $d|c$，d 必须为 1.

设 p 为 n 的素因数,则由上面的方程,$p|\alpha^n$,从而 $p|\alpha$。设 r 为满足 $p^r|n!$ 的最大整数。由于 $p^k|\alpha^k$，$p^k\nmid k!$，所以

$p^{r+1}\left|\frac{n!}{k!}\alpha^k\right.,k=1,2,\cdots,n$。从而由上面的方程得 $p^{r+1}|n!$.

矛盾!

8. (哥伦比亚) 考虑多项式

$$P(x)=x^n+nx^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n.$$

$r_i(1\leqslant i\leqslant n)$为$P(x)$的全部根，并且

$$|r_1|^{16}+|r_2|^{16}+\cdots+|r_n|^{16}=n.$$

求这些根。

解 设$a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n$为复数，则有柯西不等式

$$\left|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right|^2\leqslant\sum_{i=1}^{n}|a_i|^2\cdot\sum_{i=1}^{n}|b_i|^2,$$

当且仅当有常数$k\in\mathbf{C}$，使$a_i=kb_i(i=1,2,\cdots,n)$时上面的等号成立。

应用这不等式得

$$n^2=|r_1+r_2+\cdots+r_n|^2\leqslant n(|r_1|^2+|r_2|^2+\cdots+|r_n|^2), \tag{1}$$

$$n^4=|r_1+r_2+\cdots+r_n|^4\leqslant n^2(|r_1|^2+|r_2|^2+\cdots+|r_n|^2)^2$$
$$\leqslant n^3(|r_1|^4+|r_2|^4+\cdots+|r_n|^4), \tag{2}$$

$$n^8=|r_1+r_2+\cdots+r_n|^8\leqslant n^6(|r_1|^4+|r_2|^4+\cdots+|r_n|^4)^2$$
$$\leqslant n^7(|r_1|^8+|r_2|^8+\cdots+|r_n|^8), \tag{3}$$

$$n^{16}=|r_1+r_2+\cdots+r_n|^{16}\leqslant n^{14}(|r_1|^8+|r_2|^8+\cdots+|r_n|^8)^2$$
$$\leqslant n^{15}(|r_1|^{16}+|r_2|^{16}+\cdots+|r_n|^{16})。 \tag{4}$$

但$|r_1|^{16}+|r_2|^{16}+\cdots+|r_n|^{16}=n$，所以在（4）中等号成立，从而

$$|r_1|^8+|r_2|^8+\cdots+|r_n|^8=n。$$

再由（3）同样导出

$$|r_1|^4+|r_2|^4+\cdots+|r_n|^4=n。$$

由（2）得

$$|r_1|^2+|r_2|^2+\cdots+|r_n|^2=n。$$

最后，由（1）中等号成立，得$r_1=r_2=\cdots=r_n$，但由韦达定理，$r_1+r_2+\cdots+r_n=-n$，所以

$$r_1=r_2=\cdots=r_n=-1,$$
$$P(x)=(x+1)^n。$$