教育部人文社会科学重点研究基地基金资助

逻辑与认知文库

选择公理

The Axiom of Choice

赵希顺 著

人民出版社

《逻辑与认知文库》
中山大学逻辑与认知研究所主持

选择公理

赵希顺 著

人 民 出 版 社

责任编辑:陈亚明
装帧设计:曹　春

图书在版编目(CIP)数据

选择公理/赵希顺著.
-北京:人 民 出 版 社,2003.8
(逻辑与认知文库)
ISBN 7-01-003893-7

Ⅰ.选… Ⅱ.赵… Ⅲ.选择公理 Ⅳ.0143

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 021579 号

选 择 公 理

XUANZE GONGLI

赵 希 顺 著

人民出版社 出版发行
(100706 北京朝阳门内大街 166 号)

北京新魏印刷厂印刷 新华书店经销

2003 年 8 月第 1 版 2003 年 8 月北京第 1 次印刷
开本:850 毫米×1168 毫米 1/32 印张:9
字数:214 千字 印数:1-3,000 册

ISBN 7-01-003893-7 定价:16.50 元

邮购地址 100706 北京朝阳门内大街 166 号
人民东方图书销售中心 电话 (010)65250042 65289539

序　言

1904 年, 策莫罗 (E. Zermelo) 提出了选择公理:

选择公理: 对任意集族 $\mathcal{F}$, 存在一函数 f 使得对任非空 $S \in \mathcal{F}$ 都有 $f(S) \in S$ (称 f 为 $\mathcal{F}$ 上的 **选择函数**) 。

通俗地讲, 选择公理是说, 对任意集族 $\mathcal{F}$, 可从 $\mathcal{F}$ 中的每一非空集合中“选择 ”一个元素. 对于一些特殊的集族 $\mathcal{F}$, 其选择函数是存在的且可以构造出来. 例如, 设 $\mathcal{F}$ 是由形如 $\{a,b\}$ 的集合组成的集族, 其中 a,b 是实数, 则函数

$$f(\{a,b\}) = \min(a,b)$$

就是 $\mathcal{F}$ 上的选择函数. 又如, 若 $\mathcal{F}$ 为单点集的集族, 即 $\mathcal{F}$ 是由形如 $\{a\}$ 的集合组成的集族, 则也容易找到 $\mathcal{F}$ 上的选择函数. 再如, 若 $\mathcal{F}$ 为有穷多个集合组成的集族, 则也可证明存在 $\mathcal{F}$ 上的选择函数 (可用归纳法) . 由此看来, 选择公理不违背人的直觉. 尽管如此, 选择公理的提出还是遭到许多数学家的严厉反对. 他们的理由是: 对于一般的无穷集族 $\mathcal{F}$, 要从其中每一个非空集合中“选取 ”一个元素是不可能的, 除非有一个统一的选取规则. 例如, 设 $\mathcal{F}$ 是由无穷多个无序对 $\{S,T\}$ 组成的集族, 其中, S,T 为实数集合. 又如, 设 $\mathcal{F}$ 为无穷多个非空实数集组成的集族. 要构造 $\mathcal{F}$ 上的选择函数就非常困难, 甚至是不可能的. 而选择公理保证了这样的选择函数的存在性. 然而, 另一方面, 不管是在选择公理提出

之前，还是在其提出以后，许多数学家 (包括反对者) 都在有意识或无意识地使用选择公理。选择公理应用在几乎所有的数学分支中。而且发现了它的许多等价形式，如佐恩 (Zorn) 引理、莱文海姆—斯克伦 (Löwenheim-Skolem) 定理、季洪诺夫 (Tychonoff) 定理、势的三歧性定理等等。还发现了它的许多弱形式，如素理想定理、可数选择公理、依赖选择公理等等。可以毫不夸张地说，离开选择公理，数学将不是今天的样子。

直到康托 (G. Cantor) 集合论出现以后选择公理才得以被阐述清楚。康托的一个关键问题就是良序问题："是否每个集合都可被良序？ "严格地讲，良序问题起初并不是作为一个问题提出的，而是作为一个假设提出的。 1883 年康托提出了良序原则："每个集合都可以被良序。 "当时，良序原则并没有被大多数数学家所接受。为了证明良序原则，策莫罗才第一次提出了选择公理，并证明了它与良序原则等价。这引起了当时整个欧洲的数学家对他的公理和证明进行了激烈的争论。大数学家希尔伯特 (D. Hilbert) 在 1926 年曾写道："选择公理是当今数学文献中研究最多的公理。 " 1958 年，弗兰科尔 (A. Fraenkel) 和 Bar-Hillel 也曾写道： "选择公理是继欧几里德 (Euclid) 平行公理之后研究最多的数学公理。 "

关于选择公理的这场争论，一方面导致策莫罗对自己的证明进行辩护，另一方面导致了他对集合论进行公理化。然而，正当策莫罗通过对集合论进行公理化来为选择公理进行辩护时，许多学者却攻击这种公理化。之后 10 年，也只有分析和代数界的数学家研究选择公理。直到谢宾斯基 (W. Sierpinski) 建立了华沙学派之后，这种局面才发生了深刻的变化。谢宾斯基研究了选择公理与许多数学分支的关系，并且鼓励他的学生也这样做。与此同时，德国数学家弗兰科尔开始研究策莫罗公理系统的模型。他证

明了，如果允许存在无穷多个原子，则选择公理是独立的。1938 年，哥德尔得到了一个更好的结果。他证明了，在 ZF 系统的每一模型中都存在一个内模型，在其中选择公理和广义连续统假设都成立。哥德尔的工作消除了人们 (除构造主义者外) 对选择公理的怀疑。

在哥德尔工作之后的 25 年中，选择公理广泛地应用于数学的各个分支中。有许多命题被证明是与选择公理等价的，也有许多命题是选择公理的推论。对这些推论，人们怀疑它们比选择公理弱，但在当时却无法证明。直到 1963 年，这个缺陷才被科恩的力迫方法所克服。科恩曾使用力迫方法证明了选择公理和连续统假设相对于 ZF 系统的独立性。之后，许多公理集合论专家开始研究科恩的力迫方法，并利用该方法得到了许多与选择公理有关的独立性结果。

选择公理曾引起数学界的激烈争论。有人反对它，有人赞成它。反对者的理由是：(1) 当 $\mathcal{F}$ 是无穷集族时，既无法在有穷时间内从 $\mathcal{F}$ 的每一非空集合中选择一个元素，也没有一种规则对 $\mathcal{F}$ 中的每一不空集合都惟一确定其中的一个元素；(2) 选择公理与良序原则等价，但至今也没有找到全体实数集合上的良序；(3) 利用选择公理得到了一些“奇怪”的结论，例如巴拿赫—塔斯基 (Banach-Tarski) 分球定理。赞成者的理由是：ZF 系统是现代数学的基础。问题是 ZF 系统加上选择公理后会不会产生矛盾。而这一问题已被哥德尔和科恩的工作所解决。

选择公理的发展处在数学、逻辑学和哲学的交汇处。数学家如罗素 (B. Russel)、拜尔 (R. Baire)、波雷尔 (E. Borel)、勒贝格 (H. Lebesgue)、皮亚诺 (G. Peano) 等都曾对数学的内在本质作了哲学的分析。直到 20 世纪 30 年代末，勒贝格还坚持认为，数学哲学是由数学家而不是哲学家创立的。另一方面，关于选择

公理的争论导致了策莫罗对集合论进行公理化，这是第一次把集合论作为形式系统进行处理。同时，公理集合论所基于的一阶逻辑也得到了相应的发展。然而，在这场争论之后，一个最令人遗憾的局面出现了：数学家们不再深入探讨数学哲学了。许多数学家(尤其是华沙学派)只关心选择公理的推理强度以及与其他命题之间的关系，而忽略了它们的哲学内涵。也只有很少几个人认为这场争论应该继续下去。

本书的目的就是要让读者对选择公理在数学中的重要作用有一个全面的了解。同时使读者对与选择公理相关的哲学问题(如构造数学和抽象数学之间的联系，有穷和无穷以及超穷的本质联系和区别)有更深刻的认识。并为进一步研究选择公理提供必要的基础。本书第一章简要介绍选择公理的提出、发展及影响；第二章介绍了选择公理的在各个数学和逻辑学分支中的重要的等价形式；第三章介绍了选择公理的弱形式及其在各个分支中的应用，第二、三两章的内容可以使读者掌握选择公理在数学论证中所起的重要作用；第四章和第五章分别讲解选择公理的相对协调性和相对独立性，主要介绍哥德尔可构成模型和科恩的脱殊模型及力迫方法；第六章阐述了选择公理在大基数(强无穷)理论中所起的作用；在第七章中，主要讨论了若干与选择公理矛盾的命题，并着重介绍决定性公理及其应用。

作者特别感谢$\boxed{\text{张锦文}}$先生和丁德成先生，感谢逻辑界的前辈和同行多年来给予的支持和帮助。

限于本人水平，如有错误与不当之处，敬请批评指正。

目　录

第一章　选择公理的发展简史

本章对选择公理的发展历史作简要介绍。主要包括选择公理的产生 (1904 年之前) 、关于选择公理的争论 (1904—1908) 、过渡时期 (1908—1918) 、华沙学派对选择公理发展的影响以及选择公理的广泛应用 (1918—1940) 、选择公理的协调性与独立性等等. 同时，我们对与其相关的哲学背景也作适当地交待。

1.1　选择公理的产生

1904 年，策莫罗提出了选择公理：

选择公理：*对任意集族 $\mathcal{F}$, 存在一函数 f 使得对任非空 $S \in \mathcal{F}$ 都有 $f(S) \in S$ (称 f 为 $\mathcal{F}$ 上的* **选择函数**) 。

通俗地讲，选择公理是说，对任意集族 $\mathcal{F}$, 可从 $\mathcal{F}$ 中的每一非空集合中“选择”一个元素。策莫罗同时指出，在选择公理提出之前，许多数学家已经不知不觉地使用了它。那么，人们不禁要问：选择公理经过哪些过程和阶段才发展成为策莫罗所表述的形式？选择公理的产生主要分四个阶段。第一阶段是从单个集合中选取一个未指明的元素 (即任意选取一个元素) 。这一阶段的起始至少可以追溯到欧几里德。这种“选取”是古代数学证明方法的基础：任意选取一个对象 (而不是选取某个确定的对象), 而后再就这一对象进行论证。在这一阶段，数学家们在证明过程中，

还经常从有穷多个集合的每一集合中任意选取一个元素。我们必须指出的是，从单个集合中任意选取一个元素是不需要选择公理的，即使这个集合含有无穷多个元素。这是因为，在谓词逻辑中全称量词引入规则可用来避免这种任意选取。利用数学归纳法可以证明，从有穷多个集合的每一集合中任意选取一个元素这一过程也不需要选择公理。

19 世纪以前的数学发展过程主要就是一些构造过程。如果一个数学家要证明具有某种特定性质的数学对象的存在性，他就必须根据已构造出来的对象构造出一个这样的对象。然而，由于在构造过程中并没有对“任意选取 ”的技术作特别的要求，这就为无穷多次任意选取敞开了大门。到 19 世纪初，人们已经承认无穷集族的存在性，因而也就开始了无穷多次选取。例如，在数学分析中数学家常常通过无穷次任意选取而得到一个无穷序列；而在数论中，人们经常要从无穷多个等价类中选取代表元。第二个阶段就是有意识地利用某种规则进行无穷次选取。而第三个阶段则是无意识地利用某种规则进行无穷次选取。 1821 年，柯西 (A. Cauchy) 证明了一个闭区间上的连续函数，如果在两个端点上的值的正负号相反，则它有根。柯西的证明标志着第三阶段的开始。在证明中，柯西选取了两个收敛序列，其中每个元素的选取都依赖于前面的已选元素。实际上，柯西可以利用一种方便的规则进行选取，但他没有这样做。

真正的分水岭是在 1871 年。是年，康托证明了如下定理：一函数是连续的当且仅当它是序列连续的。在证明过程中，康托进行了无穷次任意选择。但是没有任何规则可用于这种选择，从而揭开了第四个阶段的序幕。然而，康托本人当时并没有意识到这些。 1877 年，戴德金 (R. Dedekind) 把任意选取推广到了代数数论中。当时，戴德金使用了不可数多次任意选取，旨在为每

个共轭类选取一个代表元。之后，康托和戴德金都在刻画有穷和无穷之间的界限时使用了选择公理。然而，他们和比其早半个世纪的柯西一样，并没有意识到他们使用了一个重要的原则。

康托的工作为选择公理的提出起了非常重要的作用。他的许多研究成果都直接或间接地使用了选择公理，因而成了通向选择公理的主要管道。康托利用邻域的方法引进了一些拓扑概念，如极限点、完满集等。10 年之后，约当 (C. Jordan) 利用序列的方法平行地定义了相应的概念。要证明这两种定义是等价的就必须使用可数选择公理，就像康托证明连续和序列连续等价一样。康托的可数并定理 (即可数多个可数集的并仍可数) 也使用了选择公理。在实分析中，拜尔、波雷尔和勒贝格都无意识地使用了可数选择公理和可数并定理。然而，有意思的是，在选择公理被提出以后，他们都极力反对该公理。

1883 年，康托提出了他深思熟虑的良序原则：即每个集合都可被良序。与此同时，他还发表了连续统假设并证明连续统假设蕴涵实数集可被良序。康托的来往信件表明，正是连续统假设才导致康托提出了良序原则。到了 1895 年，康托觉得应该证明良序原则，并在两年内给出了一个证明。后来到 1903 年约戴恩 (L. Jourdain) 也独立地作出了一个证明。尽管康托对约戴恩的证明感到不高兴，但他仍鼓励约戴恩发表其证明。独立于康托和约戴恩，布拉里–福蒂 (Burali-Forti) 提出了分割原则，并利用该原则证明基数的三歧性，这也是良序原则的推论。到了 20 世纪初期，人们也没有就良序问题形成一致见解。罗素和波雷尔一直怀疑良序原则和基数的三歧性。申夫利斯 (A. Schoenflies) 和施罗德 (E. Schröder) 赞同基数的三歧性，而对良序原则表示怀疑。哈代 (C. H. Hardy) 利用后继任意选择的方法证明了 $\aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$ 。希尔伯特相信至少实数集是可良序的。在 1900 年的巴黎第二届国际数

学家大会上，希尔伯特把连续统假设以及实数集上的良序的存在性作为 20 世纪数学中的重要问题。

为什么选择公理的反对者，诸如罗素和波雷尔等人都没有发现在他们自己的研究工作中使用了选择公理呢？部分原因是因为他们 (和当时其他人一样) 一直没有意识到这种任意选取的推理强度。另外，构造性方法和非构造性方法之间的界限当时还很模糊。当一个构造逐步扩展到无穷过程时，构造出来的对象并没有立即引起人们的重视。然而，在策莫罗之前，有三位意大利数学家皮亚诺、贝塔齐 (R. Bettazzi) 和勒维 (B. Levi) 已经意识到了无穷多次选取。但是他们认为无穷多次选取是不允许的，除非指明某种选取规则。皮亚诺在证明微分方程 $y' = f(x, y)$ 有惟一解的过程中要从无穷多个集合 $A_1, A_2, \cdots\cdots$ 中的每个集合中选取一个元素。他特别指出，要进行无穷多次选取，必须指明一种规则，否则是不允许的。皮亚诺也因此成为第一个承认无穷集合但反对无穷多次任意选取的数学家。自然地，当策莫罗提出选择公理时，皮亚诺和勒维都表示了反对意见。

总之，在策莫罗证明良序定理之前，无穷选取已经广泛地被应用了，但同时数学家们几乎都忽略了这种选择的推理强度，更没有人想到用一个公理来保证这种选择。所以，当策莫罗的证明突然揭示出其中的奥妙时，犹如平地一声惊雷，迫使数学家仔细审查 (他们已经无意识地应用的) 选择公理。

1.2 策莫罗及其反对者

当策莫罗开始自己的数学生涯时，他研究的领域与集合论相去甚远。他 1894 年的博士论文是研究变分学的，之后他很快转向了数学物理。1894 至 1897 年间他在柏林的理论物理研究所作

助教，1899 年他又到哥廷根作讲师，之后他受到希尔伯特的影响，开始研究数学基础，尤其是康托集合论中的基础问题。大约在 1901 年，策莫罗在施罗德的代数逻辑中发现了后来所谓的罗素悖论 (比罗素还早两年)，并将其发现寄给了希尔伯特。三年后，他还和哲学家胡塞尔 (E. Hussel) 讨论此事。但他始终没有把他的发现发表出来。1900 年冬天，策莫罗开始讲授集合论课程，并研究基数的三歧性和基数的加法。1904 年秋，来自匈牙利的数学家寇尼 (J. König) 参加了在德国海得堡举行的第三届国际数学家大会。在大会上他做了“关于连续统问题”的发言。寇尼声称连续假设是错误的，因为他证明了连续统不是某个阿列夫，从而实数集也不能被良序。听了寇尼的报告，康托显得局促不安，因为康托始终认为每个集合都可被良序且连续统假设成立。由于策莫罗认为寇尼对连续统假设的否证有瑕疵，1904 年他转向研究良序问题。经过与施密特 (E. Schmidt) 多次讨论，他的思想渐渐定型了。并于 1904 年 9 月 24 日完成了他的证明并寄给希尔伯特。这篇只有三页的文章 “Proof that Every Set can be Well-Ordered” 很快发表在 *Mathematische Annalen* 上。

在 1904 年，策莫罗提出了选择公理并证明了良序定理。然而仍有许多遗留问题未被解决。由于在 1903 年罗素悖论的提出，人们甚至对集合的构成都不清楚。另外，策莫罗的证明本身涉及一系列方法论问题，例如，使用无穷多次选择是否是一种合法的数学论证过程？更重要的问题是，选择公理是否是正确的？它是不是一个逻辑定律？在这之前，分析、代数数论界的许多数学家已经多次暗中使用了这种无穷多次选择，但没有人意识到他们的论证或构造过程涉及一个新的重要公理。尽管从 1890 至 1902 年三位意大利数学家发现了使用无穷多次选择的特例并反对这样做，但这些反对者并不清楚这种选择使用的范围有多广。他们对无穷

多次选择的顾虑也是在策莫罗证明了良序定理后才被发现的。

策莫罗的良序定理的证明和寇尼的实数不可被良序的证明相互抵触，随即引起了欧洲诸国乃至美国的数学家们的激烈争论。有的数学家，如法国大数学家哈达玛 (J. Hadamard) 甚至认为寇尼和策莫罗的结果形成了一个悖论。然而，主要的争论是关于策莫罗的证明。这是因为，一个被认为无害的且早已被广泛应用的论证或构造方法——无穷多次选择——被证明与康托的良序原则等价，而许多数学家对后者持怀疑态度。讨论的焦点还是集中到了无穷多次选择上。这些讨论主要集中在各国数学家内部进行。在德国、法国和英国，策莫罗的证明激起了广泛而持久的争论。在匈牙利、意大利、荷兰以及美国争论也非常热烈，但时续时断。不过，各国数学家都试图从数学和哲学的角度去发现为什么选择公理致使数学家产生了严重的分歧。

除了寇尼和策莫罗的相互矛盾的结论之外，其他悖论也影响着德国的康托主义者对策莫罗的证明的认识。伯恩斯坦 (F. Bernstein) 和申夫利斯认为策莫罗的错误正是由于布拉利–福蒂悖论。伯恩斯坦甚至不承认每个序数都有后继，却承认“每个集合都有一个基数”和“每个良序集都有一个序型”．伯恩斯坦找到了一个集合，他认为该集合不能被良序。因而他放弃了康托的良序原则。伯恩斯坦是康托的学生，但他却从他的老师那里得出了相反的观点。虽然，早在 1900 年申夫利斯就对康托的良序原则表示怀疑，实际上他是持中立态度的。他认为可数序数是安全的，然而对于其他序数则需要其他公设来保证它们存在的合法性。和伯恩斯坦一样，申夫利斯认为，策莫罗的证明是错误的。他们都认为，所有序数组成的整体 On 为一个合法的集合。但为了避免悖论，他们都不允许对这个集合进行扩充。申夫利斯认为，在 γ 步以前选取的元素组成的集合 L_γ 可能与 On 序同构。因而，在下一步选