中学数学巧解百例

卢四维/

陕西科学技术出版社

中学数学巧解百例

卢 四 维

陕西科学技术出版社

中学数学巧解百例

卢　四　维

陕西科学技术出版社出版

（西安北大街131号）

陕西省新华书店发行　陕西省印刷厂印刷

开本787×1092　1/32　印张4.5　字数93,000

1983年10月第1版　1983年10月第1次印刷

印数1—85,000

统一书号：7202·78　定价：0.42元

目　　录

1. 化简：$\dfrac{a+2+\sqrt{a^2-4}}{a+2-\sqrt{a^2-4}}+\dfrac{a+2-\sqrt{a^2-4}}{a+2+\sqrt{a^2-4}}$ $(a\geqslant 2)$.

提示：一般方法是先进行分母有理化，这样作比较麻烦。

若能发现原式中的两个分式互为倒数，在这种情况下，利用合分比定理，则可得到巧妙而简捷的解法。

一般方法：

$$\text{原式}=\frac{(a+2+\sqrt{a^2-4})^2+(a+2-\sqrt{a^2-4})^2}{(a+2-\sqrt{a^2-4})(a+2+\sqrt{a^2-4})},$$

$$=\frac{(a+2)^2+2(a+2)\sqrt{a^2-4}+(\sqrt{a^2-4})^2}{(a+2)^2-(\sqrt{a^2-4})^2}$$

$$+\frac{(a+2)^2-2(a+2)\sqrt{a^2-4}+(\sqrt{a^2-4})^2}{(a+2)^2-(\sqrt{a^2-4})^2}$$

$$=\frac{2(a+2)^2+2(\sqrt{a^2-4})^2}{a^2+4a+4-a^2+4},$$

$$=\frac{2a^2+8a+8+2a^2-8}{4a+8},$$

$$=\frac{4a^2+8a}{4a+8},$$

$$=\frac{4a(a+2)}{4(a+2)},$$

$$=a,$$

巧　法：

设　$m=\dfrac{a+2+\sqrt{a^2-4}}{a+2-\sqrt{a^2-4}}$，　　　　(1)

则　原式 $=m+\dfrac{1}{m}$。

对（1）使用合分比定理得：　$\dfrac{m+1}{m-1}=\dfrac{a+2}{\sqrt{a^2-4}}$

$$=\frac{\sqrt{a+2}}{\sqrt{a-2}},\qquad (2)$$

（2）两边平方得：　$\dfrac{m^2+2m+1}{m^2-2m+1}=\dfrac{a+2}{a-2}$，　（3）

对（3）使用合分比定理得：　$\dfrac{m^2+1}{m}=a$，

即　$m+\dfrac{1}{m}=a$，

故原式 $=a$。

2. 分解因式：$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$。

提示：一般方法是将此式展开，再重新进行分组分解。这样，项数较多，较难发现规律。

如果观察到 $(b-c)+(c-a)+(a-b)=0$，即 $a-b=-[(b-c)+(c-a)]$，则分解就较易进行。

一般方法：

原式 $=a^2b-a^2c+b^2c-b^2a+c^2a-c^2b$，

$=(a^2b-b^2a)-(a^2c-b^2c)+(c^2a-c^2b)$，

$= ab(a-b) - c(a^2-b^2) + c^2(a-b)$,

$= ab(a-b) - c(a+b)(a-b) + c^2(a-b)$,

$= (a-b)[ab - c(a+b) + c^2]$,

$= (a-b)(ab - ac - bc + c^2)$,

$= (a-b)[a(b-c) - c(b-c)]$,

$= (a-b)(b-c)(a-c)$。

巧　法：

$\because$　$(b-c)+(c-a)+(a-b)=0$，

$\therefore$　$a-b=-[(b-c)+(c-a)]$,

$\therefore$　原式 $= a^2(b-c) + b^2(c-a) - c^2[(b-c) + (c-a)]$,

$= [a^2(b-c) - c^2(b-c)] + [b^2(c-a) - c^2(c-a)]$

$= (b-c)(a^2-c^2) + (c-a)(b^2-c^2)$，

$= (b-c)(a+c)(a-c) + (c-a)(b+c)(b-c)$,

$= (b-c)[(a+c)(a-c) - (a-c)(b+c)]$,

$= (b-c)(a-c)[(a+c)-(b+c)]$,

$= (b-c)(a-c)(a-b)$。

3. 分解因式：$x^5+x^4+x^3+x^2+x+1$。

提示：一般方法是将此式进行分组分解，但出现 x^4+x^2+1 时，就较难找出继续分解的方法。

如果能观察到这是一个等比数列的和，用等比数列求和公式，则可迎刃而解。

一般方法：

原式 $= (x^5+x^4) + (x^3+x^2) + (x+1)$,

$= x^4(x+1) + x^2(x+1) + (x+1)$,

$=(x+1)(x^4+x^2+1)$,

$=(x+1)(x^4+2x^2+1-x^2)$,

$=(x+1)[(x^2+1)^2-x^2]$,

$=(x+1)(x^2+1+x)(x^2+1-x)$.

巧　法：

$$原式=\frac{1-x^6}{1-x}=\frac{1-(x^3)^2}{1-x}=\frac{(1+x^3)(1-x^3)}{1-x},$$

$$=\frac{(1+x)(1-x+x^2)(1-x)(1+x+x^2)}{1-x}$$

$=(1+x)(1-x+x^2)(1+x+x^2)$.

4. 求作一个二次方程，使其根为方程$x^2-5x+6=0$根的立方。

提示：一般方法是利用韦达定理求出原方程的两根和与积，再利用韦达定理导出所求作方程的系数和常数项。

如果利用两方程根的关系式，可直接代入原方程，化简，则可解决。

一般方法：

设　$x^2-5x+6=0$的两根为x_1、x_2，

则　$x_1+x_2=5$，$x_1x_2=6$.

设所求作的方程是：$x^2+px+q=0$，

则其根是：${x_1}^3$、${x_2}^3$.

$\therefore\ p=-({x_1}^3+{x_2}^3)=-(x_1+x_2)({x_1}^2+{x_2}^2-x_1x_2)$,

$=-(x_1+x_2)[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2]$,

$=-5\cdot(5^2-3\cdot6)$,

$=-35$,

$$q = x_1{}^3 x_2{}^3 = (x_1x_2)^3 = 6^3 = 216.$$

故所求作的方程是$x^2 - 35x + 216 = 0$。

巧　法：

设m是所求作的方程的根，则根据题意有：$m = x^3$，

$\therefore$　$x = \sqrt[3]{m}$，代入$x^2 - 5x + 6 = 0$得：

$$\sqrt[3]{m^2} - 5\sqrt[3]{m} + 6 = 0,$$

即　$\sqrt[3]{m^2} - 5\sqrt[3]{m} = -6$。

上式两端立方得：

$$m^2 - 15m\left(\sqrt[3]{m^2} - 5\sqrt[3]{m}\right) - 125m = -216,$$

$\therefore$　$m^2 - 15m(-6) - 125m + 216 = 0$，

故所求作的方程是$m^2 - 35m + 216 = 0$。

5.　求方程$(\sqrt{x} - 2)^4 + (\sqrt{x} - 3)^4 = 1$的实数解。

提示：一般方法是先令$\sqrt{x} - 2 = y$代入原方程，然后再展开分解。这样，步骤繁杂，分解不易。

如果采取降次的方法，则可避免高次展开与分解的麻烦。

一般方法：

原方程可化为$(\sqrt{x} - 2)^4 + [(\sqrt{x} - 2) - 1]^4 = 1$，

令　$\sqrt{x} - 2 = y$，

则原方程可化为$y^4 + (y-1)^4 = 1$，

即　$y^4 + (y^4 - 4y^3 + 6y^2 - 4y + 1) = 1$，

整理得　$2y^4 - 4y^3 + 6y^2 - 4y = 0$，

即　$y^4 - 2y^3 + 3y^2 - 2y = 0$。

$\therefore$　$y\cdot(y^3 - 2y^2 + 3y - 2) = 0$，

即　$y\cdot[(y^3 - y^2) - (y^2 - 3y + 2)] = 0$，

$\therefore\quad y\cdot[y^2(y-1)-(y-1)(y-2)]=0,$

$\therefore\quad y(y-1)(y^2-y+2)=0.$

则 $\quad y=0;$

$\quad y-1=0;$

$\quad y^2-y+2=0$ （无实数解）。

即 $\quad \sqrt{x}-2=0,\qquad \therefore\quad x=4;$

$\quad \sqrt{x}-3=0,\qquad \therefore\quad x=9.$

故方程的实数解为 4 或 9 。

巧　法：

$$\because\quad (\sqrt{x}-2)^4+(\sqrt{x}-3)^4=(x-4\sqrt{x}+4)^2+(x-6\sqrt{x}+9)^2,$$

$$=[(x-5\sqrt{x})+(\sqrt{x}+4)]^2+[(x-5\sqrt{x})-(\sqrt{x}-9)]^2,$$

$$=2(x-5\sqrt{x})^2+28(x-5\sqrt{x})+97,$$

$$\therefore\quad 2(x-5\sqrt{x})^2+28(x-5\sqrt{x})+97=1,$$

即 $\quad (x-5\sqrt{x})^2+14(x-5\sqrt{x})+48=0,$

则 $\quad x-5\sqrt{x}=-6$ 或 $x-5\sqrt{x}=-8$ （无实数解），

解 $\quad x-5\sqrt{x}=-6$ 得：$x=4$ 或 $x=9$ 。

故方程的实数解为 4 或 9 。

6. 已知方程 $2x^3-7x^2+10x-6=0$ 有一个根是 $1+i$，解这个方程。

提示：一般方法是由 $2x^3-7x^2+10x-6$ 除以 $[x-(1+i)]\cdot[x-(1-i)]$ 而解，作这样的除法是比较

麻烦的。

如果用韦达定理去解，则较容易。

一般方法：

∵ $1+i$是实系数方程$2x^3-7x^2+10x-6=0$的一个根，

∴ $1-i$也是这个方程的根。

把$2x^3-7x^2+10x-6$除以$[x-(1+i)]\cdot[x-(1-i)]$，也即是除以x^2-2x+2，得商$2x-3$。

由 $2x-3=0$，得

$$x=\frac{3}{2},$$

故原方程的三个根是 $1+i$，$1-i$，$\frac{3}{2}$。

巧 法：

$1+i$是实系数方程$2x^3-7x^2+10x-6=0$的一个根，那么$1-i$也是这个方程的根。

设第三个根是x_3，

根据韦达定理知：$(1+i)\cdot(1-i)\cdot x_3=\frac{6}{2}$，

$$\therefore\quad x_3=\frac{3}{2},$$

故原方程的三个根是 $1+i$，$1-i$，$\frac{3}{2}$。

7. 试求方程 $x=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{2+x}}}}}$ 的正根，并证明只有一个正根。

提示：一般方法是先用观察法得出方程的正根，再证明比此正根大或小的正数都不是方程的根。这样作步骤繁杂，极其不易。

如果原方程两端平方，得

$x^2 = 2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{2+x}}}}$，从而可得 $x^2 = 2+x$，则只需解此方程。

一般方法：

（1） 当$x=2$时，

则 $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{2+2}}}}}=2$，

$\therefore$ $x=2$是方程的正根。

（2） 当$x>2$时，

令 $x=2+a$ $(a>0)$，

$\because$ $(2+a)^2=4+4a+a^2>4+4a>4$，

$\therefore$ $x^2>2+x>4$，

$x>\sqrt{2+x}>2$，

故 $2+x$的平方根大于2而小于x。

同理只证：$\sqrt{2+x} > \sqrt{2+\sqrt{2+x}} >2$。

又 $\sqrt{2+\sqrt{2+x}} > \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}>2$，

………………………………………………

$\therefore$ $x>\sqrt{2+x}>\sqrt{2+\sqrt{2+x}}>\cdots>$

$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{2+x}}}}$，

即当$x>2$时，不可能有方程的根。

（3） 当$0<x<2$时，

令 $x=2-a$ $(2>a>0)$，

$\because \quad (2-a)^2 = 4-4a+a^2 = 4-a(4-a),$

且 $\quad 4-a>1,$

$\therefore \quad 4>4-a>4-a(4-a),$

$\quad 4>2+x>x^2,$

$\quad 2>\sqrt{2+x}>x,$

故 2＋x的平方根小于2而大于x.

同理可得：$2>\sqrt{2+\sqrt{2+x}}>\sqrt{2+x},$

又 $\quad 2>\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}>\sqrt{2+\sqrt{2+x}},$

……………………………………………

$\therefore \quad \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{2+x}}}}}>\cdots>$

$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+x}}}>\sqrt{2+\sqrt{2+x}}>$

$\sqrt{2+x}>x,$

即当$0<x<2$时，也不可能有方程的解.

因此方程仅有唯一的正根2.

巧 解：

原方程两端平方得：

$$x^2 = 2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{2+x}}}}}, \quad (1)$$

将 $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{2+x}}}}}=x$代入(1)，

得：$x^2 = 2+x$

解之得：$x=2$或$x=-1$，-1不合题意，舍去.

故方程仅有唯一的正根2.

8. 解方程组
$$\begin{cases} x+y+z=39, & (1) \\ y+z+u=45, & (2) \\ z+u+x=43, & (3) \\ u+x+y=41. & (4) \end{cases}$$

提示：一般方法是利用代入法或加减消元法。这样作，虽然难度不大，但步骤繁多。

如果能观察出各方程中未知数交替出现的规律，则四式相加得$x+y+z+u$的值，从而可以迅速找出解来。

一般方法：

(4) － (1) 得：　$u-z=2$，　(5)

(2) ＋ (3) 得：　$x+y+2z+2u=88$，　(6)

(6) － (1) 得：　$z+2u=49$，　(7)

(5) ＋ (7) 得：　$3u=51$，　$\therefore\ u=17$。

代入 (7) 得：　$z=15$，

将u、z的值代入 (2) 得：$y=13$，

将y、z的值代入 (1) 得：$x=11$，

故原方程组的解是：
$$\begin{cases} x=11, \\ y=13, \\ x=15, \\ u=17. \end{cases}$$

巧　法：

$[(1)+(2)+(3)+(4)]\div 3$得：$x+y+z+u=56$，　(8)

从(8)中分别减去 (2)、(3)、(4)、(1)得：
$$\begin{cases} x=11, \\ y=13, \\ z=15, \\ u=17. \end{cases}$$

9. 解方程组
$$\begin{cases} (y+z)(x+y+z)=4, & (1) \\ (z+x)(x+y+z)=6, & (2) \\ (x+y)(x+y+z)=8. & (3) \end{cases}$$

提示：一般方法是去括号化为三元二次方程组。这样作，很不容易达到消元和降次，因此作法非常繁难。

因为三个方程的左端都有公因式$x+y+z$，而它们的另一个因式的和又是$x+y+z$的2倍，因此把三个方程相加，就可以求出$x+y+z$，则可把原方程组变换成简单的方程组。故可得到简捷的解法。

巧　法：

(1)+(2)+(3)得：

$$2(x+y+z)^2=18,$$

$$\therefore\quad x+y+z=\pm 3. \qquad (4)$$

将(4)代入原方程组得：

$$\begin{cases} y+z=\pm\dfrac{4}{3}, & (5) \\ z+x=\pm 2 & (6) \\ x+y=\pm\dfrac{8}{3}. & (7) \end{cases}$$

从（4）分别减去（5），（6），（7）得原方程的解：

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{5}{3}, \\ y_1 = 1, \\ z_1 = \dfrac{1}{3}. \end{cases} \quad 或 \quad \begin{cases} x_2 = -\dfrac{5}{3}, \\ y_2 = -1, \\ z_3 = -\dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

10. 解方程组 $\begin{cases} x + 2y + 3z = 6, \\ x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 14, \\ x^2 + 8y^3 + 27z^3 = 36. \end{cases}$

提示： 本题是三元三次方程组，消元降次非常困难，用一般方法（代入法或加减消元法）去解极其繁难。

如果能观察出原方程组未知数项之间的规律，则可设辅助元，使之变简，再运用韦达定理去解。

巧　法：

设$x = m$，$2y = n$，$3z = p$。

则原方程组可化为：

$$\begin{cases} m + n + p = 6, & (1) \\ m^2 + n^2 + p^2 = 14, & (2) \\ m^3 + n^3 + p^3 = 36. & (3) \end{cases}$$

$(1)^2 - (2)$整理得：$mn + np + pm = 11$　　(4)

$(2) - (4)$得：$m^2 + n^2 + p^2 - mn - np - pm = 3$　(5)

$(3) - (1) \times (5)$得：$3mnp = 18$，

$\therefore \quad mnp = 6,$ （6）

$\therefore$ 原方程可化为：$\begin{cases} m+n+p=6, \\ mn+np+pm=11, \\ mnp=6. \end{cases}$

由韦达定理知m，n，p是方程

$\alpha^3 - 6\alpha^2 + 11\alpha - 6 = 0$ 的三个根。

而$\alpha^3 - 6\alpha^2 + 11\alpha - 6 = (\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)$，

$\therefore \quad \alpha_1 = 1, \ \alpha_2 = 2, \ \alpha_3 = 3.$

$$\therefore \begin{cases} m = 1, \ 3, \ 1, \ 3, \ 2, \ 2, \\ n = 2, \ 2, \ 3, \ 1, \ 1, \ 3, \\ p = 3, \ 1, \ 2, \ 2, \ 3, \ 1. \end{cases}$$

故原方程组的解是：

$$\begin{cases} x = 1, \ 3, \ 1, \ 3, \ 2, \ 2, \\ y = 1, \ 1, \ \frac{3}{2}, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{2}, \ \frac{3}{2}, \\ z = 1, \ \frac{1}{3}, \ \frac{2}{3}, \ \frac{2}{3}, \ 1, \ \frac{1}{3}. \end{cases}$$

11． 求方程组 $\begin{cases} x^{x+y} = y^{60} \\ y^{x+y} = x^{15} \end{cases}$ 的整数解。

提示： 一般方法是先对方程两边取对数，使指数不含未知数。但这样作，就需要先讨论真数的取值范围，因之解法较复杂。

如果能将此题化为同底的指数方程，则只须研究指数关