



$\sin \omega t$

$r=1 f(a)$

$3x+2y=-12$

$y=\sin x \quad y=\cos x$

$\sin 2x$

$y=\frac{1}{2}x \quad y=x$

$y=\arcsin x$

$\varphi(x) \quad F(x) \quad f(x)$

$y=\frac{1}{x}$

$r, y) \quad \lambda$

$y=\sqrt{2px}$

$\lg 12$

$+5$

$+5y-7=0$

$=0$

$\operatorname{reccos} x$

$y=\arcsin x$

$) (\quad y=2^x$

$y=\sqrt[3]{x}$

$f(x, y) \quad y=f(x)$

$\lg 3$

$3x+2y=-12$

$Ax+By=C$



$y=ax^2+bx+c$

$y=\sqrt{x}$

$y=\cos x$

$y=ax^2 \quad y=x^2$

$y=\log_{\frac{1}{2}} x$

$M: a+bi \quad P(z=x+yi)$



$10^x y=e^{-\frac{1}{2}x^2}$



$y=A \sin(\omega t + \varphi)$

$3x+2y+12=0$

$y=-kx+b \quad y=\frac{1}{2}x+3$

$y=\ln x \quad y=\operatorname{ch} x$

管梅谷

$y=\operatorname{tg} x$

$y=\frac{k}{x}$

$y=\sqrt{x}$



$y=2x+5$

$y=F(x)$

$x+B_1y=C_2$



$y=$

$y=f(x)$

$y=e^x$

$y=\operatorname{tg} x \quad y=\operatorname{ctg} x$



$\beta=c+di \quad \lg x \quad \lg a \quad \lg b$

$x-2y$

$y=ax^2+bx+c=0$

$\operatorname{arctg} \frac{4}{3} \quad P(\rho, \theta)$

上海教育出版社

$y=\arccos x$

$\log_2 x$

$x+5y-7=0$



$A_1x+B_1y=C_1$

$y=10^x$

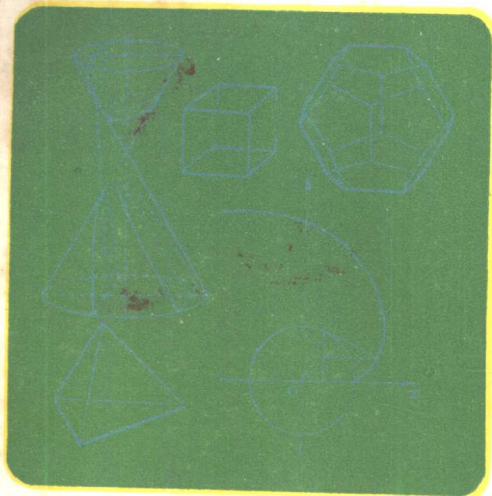
$y=(x+2)^3$

$\lg 2$

$y=\operatorname{arccotg} x$



$x-2y=6$



图上作业法

法 业 作 上 图

管 梅 谷

上海教育出版社

王 作 业 法

梅 谷

上海教育出版社出版

(上海永福路 123 号)

福建人民出版社重印

福建省新华书店发行 福建新华印刷厂印刷

开本787×1092 1/32 印张2.125 字数43,000

1965年10月第1版 1978年10月福建第1次印刷

印数：1—200,000册

统一书号：7150·1681 定价：0.16元

目 录

前言	1
一 什么是綫性图	2
二 什么是物資調运問題	3
三 流向、流向图、最优流向图	6
四 怎样做第一个流向图	10
五 檢查	15
六 調整	17
七 怎样調度車輛	24
八 怎样找最好的設場地点	28
九 奇点和偶点、一笔画問題	35
十 奇偶点图上作业法	41
十一 合并調整步驟	46
十二 基本流向图	51
十三 改进的图上作业法	56
結束語	63

前 言

大家从小就学画图。进了中学，在几何課里又学会了画几何图形，同时知道了不少关于几何图形的性质；也知道了图这样东西在生产中是很有用处的，无论是机器或者是桥梁、房屋等工程，都要按照設計图来制造或者建筑。

但是，图的妙用还远远不止这些呢！

图还能够帮助人們解决不少数学問題。在这本书里，我們就要向大家介紹怎样利用图来解决某些数学問題的方法。这种方法涉及的数学知識不多，但要学会它，却也不很容易。因此，建議大家认真地閱讀，要一边讀一边想，一边再算算画画。习题里的題目也希望都仔細地做一做。这样，才有可能理解并运用这种方法。

一 什么是綫性图

这本书里我們要用到的图只是由一些綫段（不一定是直的）和点組成的，这种图叫做綫性图。例如，图 1 里表示的就是一些綫性图。

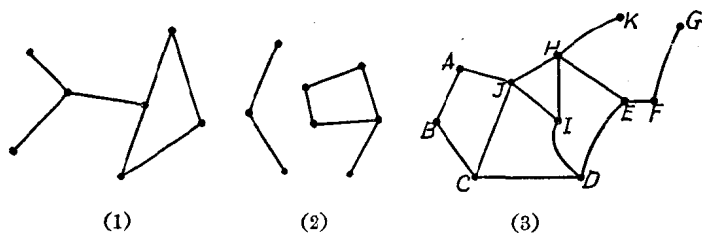


图 1

为了下面讲起来方便，这里先介紹几个常用的名詞：綫性图里每一条綫段（不論是直的还是弯的）都叫做弧，例如图1(3)里的 AB 、 HK 、 CD 等都是弧；由几条弧順次首尾相接組成的，并且自身不相交的封閉路綫叫做一个圈，例如图 1(3)里的 $A-J-C-B-A$ 、 $J-H-E-D-I-J$ 就都是圈，而 $A-J-I-H-J-C-B-A$ 就不是圈，因为它是自身相交的。

看一下图 1 里的三个綫性图，就会发现它們之間还有一些差别，(1)和(3)两个图都是連成一片的，而(2)这个图却是断成两片的。象图 1 里的(1)、(3)那样連成一片的綫性图就叫做連通的；而象图 1(2) 那样断成两片(或者几片)的綫性图

就叫做不連通的。

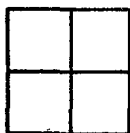
关于綫性图，現在先只介紹这一些。下面讓我們来談談在生产中經常会遇到的一类数学問題——物資調运問題，以及利用綫性图来解决这类問題的方法。

习 題

1. 下面的綫性图里包含几个圈？为什么？



2. 数数看，三个綫性图里各包含几个圈。



二 什么是物資調运問題

在生产和生活中随时都需要許多物資。但是，有些物資在生产的地方用不完，而在要用的地方却又不生产，因此必須把这些物資从产地运到銷地去。这样就产生了一个問題：怎样調运才能使費用最省？这类問題就叫做物資調运問題。

我們来看下面这个例子：假設济南、天津、郑州一带化肥的产地、銷地以及一年的产銷量如下表所示：

产 地	产 量 (单位:万吨)	销 地	销 量 (单位:万吨)
天 津	6	石 家 庄	3
丰 台	5	德 州	5
郑 州	8	邯 鄲	5
徐 州	2	济 南	3
		青 島	5

表 1

这里,总产量和总销量相等,都是 21 万吨. 现在要问:应该怎样调运,才能使运输的吨公里^①数最小?

为了使所研究的问题能一目了然,我们可以画一张交通图,在图上画出有关的产地和销地,以后把它们分别叫做发点和收点. 并且画出这些地点之间的交通路线,在发点和收点

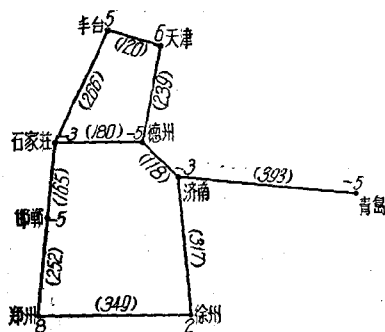


图 2

旁边注上它们的产量和销量,以后把它们分别叫做发量和收量. 这里发量用正数表示,收量用负数表示. 另外,在每段路线旁边注上这段路线的长度. 例如,图 2 就是表 1 里那个物资调运问题的交通图.

^① 吨公里是计算运输量的单位,1 吨物资运输 1 公里就叫做一个吨公里. 例如 5 吨物资运输 10 公里所花费的运输量就是 50 吨公里.

根据上一节里所說的可以看出，交通图恰好是一个連通的綫性图。

不难想象，对于某一个物资調运問題，把发点的物资运到收点去的办法是很多的。拿上面这个例子來說，我們可以按照下面的办法来調运物资：

发 点	收 点	运 量 (单位: 吨)	运输距离 (单位: 公里)	运 輸 量 (单位: 吨公里)
丰 台	石 家 庄	3 万	266	798 万
丰 台	邯 鄲	2 万	431	862 万
天 津	德 州	5 万	239	1195 万
天 津	济 南	1 万	357	357 万
郑 州	邯 鄲	3 万	252	756 万
郑 州	青 島	5 万	1059	5295 万
徐 州	济 南	2 万	317	634 万
总 計				9897 万

表 2

当然，我們还可以用其他的办法来調运。每一个这样的运输办法就叫做一个調运方案（表 2 里在虚綫的左边部分就是一个調运方案）。不同的調运方案所花費的吨公里数一般說来是不一样的，而我們的目的就是要从所有不同的方案中，找出一个花費吨公里数最少的方案来。这样的方案叫做最优方案。

要想从許多个不同的方案中找出一个最优方案，不是一件容易的事情。从 1941 年开始，国外就有人研究解决这个問

題的方法。雖然他們找到了一些方法，但是這些方法都比較難學，計算起來也比較費時間（這些方法都和數學里的一門新的分支“綫性規劃”有關係）。1958年，我國搞物資調運工作的一些同志，特別是糧食部門的同志在大量實踐的基礎上創造了一種新的方法，就是**图上作业法**。它比國外用的一些方法都簡單，運用這種方法，只要在交通圖上進行一些運算，就可以把最優方案找出來。

習 題

給表1里的那個物資調運問題做兩個和表2所示的方案不同的調運方案，並且算出所花費的噸公里數。

三 流向、流向圖、最優流向圖

要用图上作业法來求最優方案，首先應該學會怎樣把一個調運方案在圖上表示出來。

先看一個最簡單的情況，例如A是一個發點，B是一個收點，收發量都是10噸。要表示把A點的10噸物資運到B點去，只要從A點出發向B點畫一個箭頭，並且在它的旁邊注上10就可以了，如圖3所示。箭頭所指的方向表示物資運輸的方向，我們把這樣的箭頭叫做**流向**，箭頭

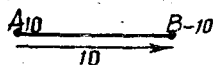


圖 3

旁邊的數字表示運輸物資的重量，叫做**流量**。

對於流向的画法，我們作以下幾點規定：

(1) 流向必須畫在前進方向路綫的右側，例如图4(1)里

的画法都是正确的, 而图 4(2) 里的画法是不正确的。

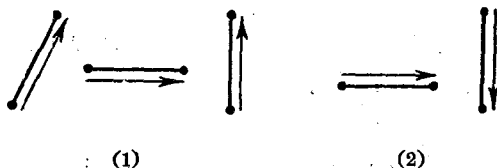


图 4

(2) 流向不能通过路线上的收发点和交叉点。例如如图 5(1) 里从 A 点向 B 点所画的流向是不对的, 这种情况应该画两个流向, 一个从 A 点到 C 点, 一个从 C 点到 B 点, 如图 5(2) 所示。

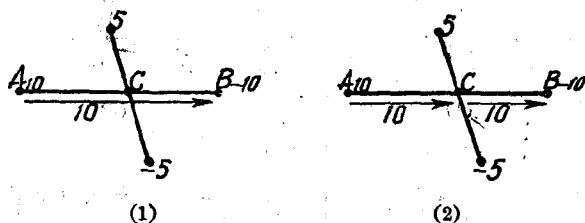


图 5

(3) 在一段路线上假使有几个同方向的流向, 应该把它们合并。例如, 图 6(1) 里 CB 上的两个流向应该合并, 画成象图 6(2) 那样。

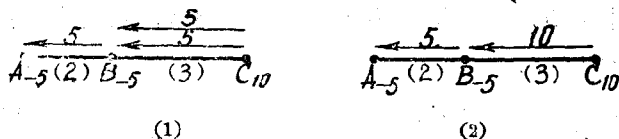


图 6

利用流向，就很容易把一个调运方案在图上表示出来。例如要把表 2 这个调运方案表示出来，就只要先把表 2 里所列的七个运输任务分别用流向画出① [图 7(1)]，然后再合并流向就可以了 [图 7(2)]。

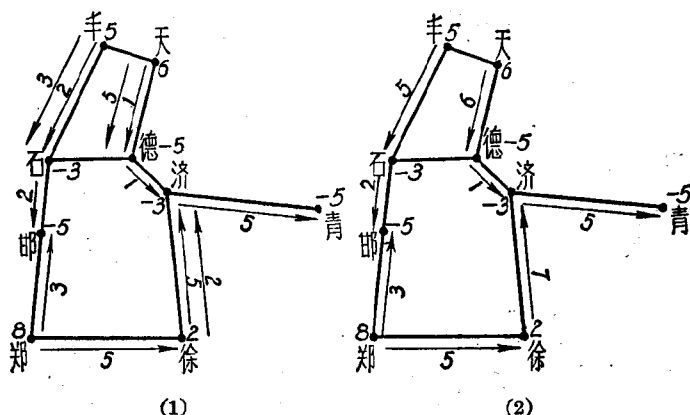


图 7

象图 7(2) 那样用一些流向来表示一个调运方案的图，叫做流向图。

应该注意，流向图上的收点不一定是只运进而不运出物资的，例如图 7(2) 里济南这个收点就向青岛运出了 5 万吨物资。同样，发点也可能运进物资。但是在一个流向图里，收点的运进量一定比它的运出量多，而且多的数量恰好等于它的收量；发点的运出量也一定比它的运进量多，多的数量恰好等于它的发量。

① 从郑州到青岛有两条路可走，一条经过石家庄，一条经过徐州，在画流向时，当然把它画在路程较短的一条路线上，即画在经过徐州的路线上，其余情况类地处理。

在画出了一个調运方案的流向图后，要知道这个調运方案所花費的吨公里数，就可以直接在流向图上来計算，只要把流向图上每一个流向的长度和它的流量相乘，然后再相加就可以了。

只会把一个調运方案表示成一个流向图还不够，我們还应该会把一个流向图还原成調运方案。这一点一般來說并不难，只要把这一节后面的习题做一下就会掌握的。但是，同一个流向图常常可以还原成几个不同的調运方案。拿图 7(2) 所示的流向图來說，它当然可以还原成表 2 所示的方案，但是它也可以还原成另一个方案，这个方案比表 2 所示的方案多一个运输任务，其中第 1 到第 5 个运输任务和表 2 里的完全相同，其余三个任务分别是：

郑州→济南	2 万
郑州→青島	3 万
徐州→青島	2 万

不过，由同一个流向图还原出来的不同的調运方案，所花費的吨公里数却一定是相同的。想一想：这是为什么？

因此，要找最优方案，只要先找出一个最优流向图（就是花費吨公里数最小的流向图），然后再把这个流向图还原成調运方案就可以了。

那末，怎样才能找到最优流向图呢？

我們可以先設法作一个流向图，然后来檢查它是不是最优的，如果是的話，問題就解决了；如果不是，就把这个流向图稍微变化一下，这样的变化称为調整。調整后的新流向图所花費的吨公里数比原来流向图的要少一些。然后再檢查新流向图是不是最优的，如果仍旧不是，就再进行調整，一直到找

到最优流向图为止。

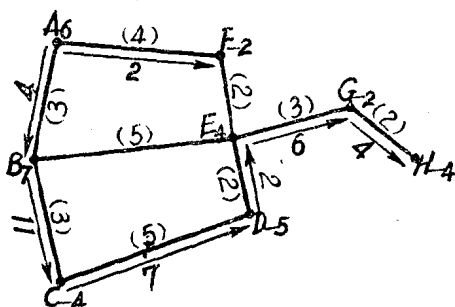
因此,要用图上作业法来找最优流向图,应该学会解决下面三个问题:

- (1) 怎样做第一个流向图;
- (2) 怎样检查一个流向图是不是最优的;
- (3) 如果一个流向图不是最优的,怎样把它调整成一个较好的新流向图。

我们将在下面几节里谈谈解决这三个问题的方法。

习 题

1. 画出上节习题里所做的调运方案的流向图。
2. (1) 把下面图里的流向图还原成两个不同的调运方案。



- (2) 在流向图上计算调运方案所花费的吨公里数,并找出另一个流向图,使它所花费的吨公里数更少些。

四 怎样做第一个流向图

对于一个物资调运问题,要任意给它做一个流向图并不

困难。因為我們很容易給一個物資調運問題任意做一個調運方案，而有了調運方案，就可以按照上一節里所講的方法畫出這個方案的流向圖。

但是，任意做出來的第一個流向圖往往花費的噸公里數比較多，從這樣的流向圖出發，進行檢查、調整，常常要經過很多次才能得到一個最優流向圖。因此，為了節約時間、人力，在做第一個流向圖時就要動些腦筋，使它所花費的噸公里數盡量少一些。

在做第一個流向圖時，首先應該注意**避免對流**。所謂對流，就是在同一段路線上相對運輸的現象，如圖 8 所示。這種

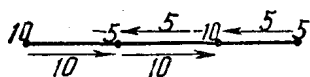


圖 8

現象顯然是很不合理的。而用下面的方法做出來的流向圖里一定不會有對流。

先考慮交通圖上沒有圈的情況。這時，我們有一句口訣：**取一端，它的供需歸鄰站**。讓我們舉例來說明這一句口訣的意思。例如图 9 是一個物資調運問題的交通圖。從圖里的 A、F、G、E 等點出發的弧都只有一條，這樣的點就叫做**端點**。與一個端點相鄰的那個點叫做這個端點的**鄰站**。例如端點 A 的

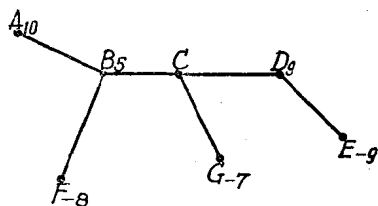


圖 9

鄰站是 B，端點 G 的鄰站是 C。按照上面的口訣來做第一個流向圖時，可以先任意取一個端點，如果這個端點是發點，就把它要運出的物資全部運給它的鄰站；如果這個端點是收點，就由它的鄰站來供應它的全部需要。拿圖 9 所示的交通

图来说,如果取端点 A , 就应该把 A 点要运出的 10 吨物资全部运给它的邻站 B (图 10)。这样, A 点和弧 AB 就可以不必再考虑了。而这时 B 点除了原有的 5 吨物资

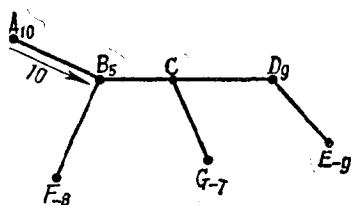


图 10

外,又加上 A 点运给它的 10 吨,它的发量就变成成为 15 吨。

然后,在图上再任意取一个端点,例如 E 点。 E 是收点,收量是 9 吨。按照“供需归邻站”的原则,应该从 E 的邻站 D 点向它运送 9 吨 (图 11),这时, E 点的需要已经满足, E 点和弧 DE 就可以不必再考虑。

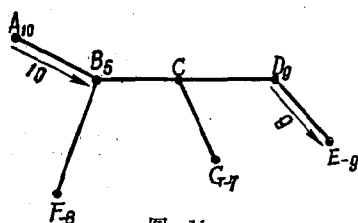


图 11

而 D 点的发量恰好是 9 吨,运出 9 吨后, D 点就既不是发点也不是收点了。它和弧 CD 事实上已不起作用,所以也可以不考虑了。再在图

上取端点 G , 并且从它的邻站 C 向它运送 7 吨 (图 12), 这样, C 点就变成成为收量是 7 吨的收点, 而 G 点和弧 CG 也可以不再考虑。最后从 B 点分别向 F 点运送 8 吨、向 C 点运送 7 吨, 就得到了一个没有对流的流向图 (图 13)。

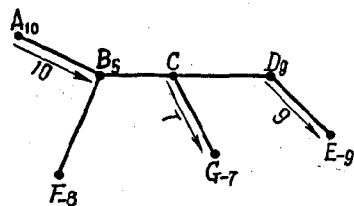


图 12

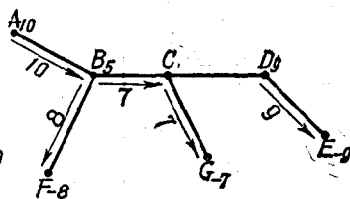


图 13

为什么按照上面的方法做出来的流向图一定不会有对流？道理很简单。从上面的例子可以看出，每一条弧，在它上面画了一个流向后就不再考虑了，所以在这条弧上不可能再出现相反方向的流向。

再来看交通图上有圈的情况。这时，我们也有几句口诀：**甩一弧，破一圈，甩了甩，破了破，化为没有圈，然后照样干。**这几句口诀的意思是：如果交通图上有圈，就任意取一个圈，然后从这个圈上划掉一条弧（即甩一弧），破掉这个圈。如果甩了一次后图上还有圈，就再取一个圈，再甩再破，一直甩到没有圈为止，那时就可以开始做流向图了。那些被划去的弧上一律不画流向，而在留下的没有圈的图上则按照“各端供需归邻站”的原则来做流向图。

现在用上面的口诀来给图 2 所示的那个交通图做一个流向图。这个图是有圈的。先取上面的小圈：丰—天—德—石—丰，在这个圈上任意甩去一条弧，例如甩去丰—天这条弧，就破了这个圈。留下的图里还有一个圈：石—德—济—徐—郑—石，在这个圈上再甩去石—德这条弧，留下的图里就没有圈了（图 14）。大家可以试试，在图 14 上，按照“供需归邻站”的原则做一个流向图，看看得到的流向图同图 7(2) 所示的是不是完全一样？

根据上面的口诀做流向图的时候，还可以找一些窍门。拿“甩一弧”来说，

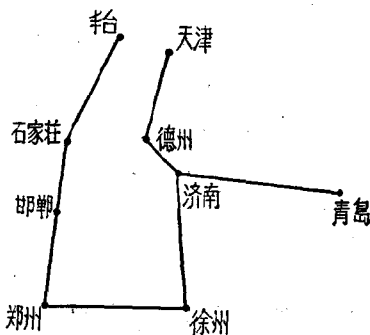


图 14