# 实变函数论及其习题与解答

M.R.SPIEGEL 著

湖南益阳师范专科学校数学科

[美]M.R.施皮格尔著

# 实变函数论及其习题与解答

本书系根据美国麦格劳－希尔图书公司(*McGRAW－HILL BOOK COMPANY*)出版的*M*.*R*.施皮格尔(*M*.*R*.*SPIEGEL*)所著“实变函数论及其习题与解答”(*THEORY AND PROBLEMS OF REAL VARIABLES*)译出。本书可作数学系实变函数论课程的教学参考书。

**实变函数论及其习题与解答**

〔美〕 *M*.*R*.施皮格尔著

徐千里译　蔡海涛校

湖南省益阳地区湘中印刷厂印装

开本：787×1092　1/16　印张：14.25　字数：329,000

1983年7月印刷　　印数：1—3000

# 序　言

对现代数学分析的一个最重要的贡献就是*Henri Lebesgue*在20世纪初提出的测度论与积分论。*Lebesgue*测度与*Lebesgue*积分，不但从理论的观点，而且从应用的观点，都比通常的*Riemann*积分有许多优点。它是各个领域，例如概率论，统计学和*Fourier*级数的不可或缺的基础部分。

近年来，*Lebesgue*理论业已成为实变函数论（为了简便起见，也叫做实变理论或实分析）这一传统教程的基本部分。本书的目的是介绍*Lebesgue*测度和*Lebesgue*积分的基础以及为了通晓这个基础所必需的实变理论的那些重要方面。

本书是作为实变理论的正式教程用的课本或者是作为这方面所有流行的标准课本的补充而编写的。这对需要了解*Lebesgue*理论的其他数学课程也许是会有益的。此外，对于那些想要了解这门重要理论的科技与数学方面的读者，本书亦颇有价值。

每章的开头都对有关的定义，法则和定理作了清晰的叙述，并伴以解说性和其他描述性的材料。接着就是分好了组的一套题解和一套补充题。题解的作用是阐述和充实理论，使之重点突出，要是学生没有搞明白这些问题，他们就会觉得自己的基础不牢靠；同时重复一些重要的基本原理。许多定理的证明与基本结果的推导都包含在题解之中，而大量的补充题则可供作复习和拓广每章材料之用。

本书所涉及的论题包括*Lebesgue*测度论，可测函数，*Lebesgue*积分及其性质，微分和积分。有关平均收敛和对*Fourier*级数的应用包括重要的*Riesz－Fischer*定理的两章以及有关*Riemann*积分，*Fourier*级数的可和性，*Lebesgue*重积分和*Fubini*定理的三个附录，这是本书的另外两个特点。第一章给出了实变理论的基本概念，包括集，函数，连续性等。根据学生的背景知识，第一章可以在初学时读，也可以在需要时查阅。

包含在本书的材料比大多数教程所涉及的材料可能要多得多。这就使得本书更加灵活，从而提供了一本更加有用的参考书，故能进一步激发读者对所研究的问题的兴趣。

我想借此机会感谢*Daniel Schaum*，*Nicola Monti*和*Henry Hayden*的极好的编辑合作。

M.R.施皮格尔

1969年10月于伦塞利尔工学院

# 目　录

# 第1章　基本概念

**集**

集是数学中的一个基本概念，我们可以把集看做是一些对象的总体，这些对象就叫做集的元或元素。除非另有规定，我们通常用大写字母例如$A$，$B$，$X$，$S$等表示集，而用小写字母例如$a$，$b$，$x$等表示元素。如果元素$a$属于集$S$，我们就记为$a \in S$。如果$a$不属于$S$，我们就记为$a \notin S$。如果$a$和$b$都属于$S$，我们记为$a, b \in S$。类，集合和集体均为集的同义语。

集可以通过把它的元素放在一对大括号里用逗号分开而实际列出的方法加以描述，或者，如果这种方法不可能，就可以通过描述所有元素都成立的某个特性来加以描述。第一种方法有时叫做罗列法，而第二种方法则叫做描述法。

例1　英文字母中所有元音字母所成的集可以用罗列法描述为$\{a, e, i\ o, u\}$或由描述法描述为$\{x: x$是 元音字母$\}$，它可以读作："由所有如下元素$x$所组成的集，其中$x$是元音字母"。注意冒号：读作"其中"。

例2　集$\{x: x$是 平面内的三角形$\}$是平面内一切三角形所成的集。注意此处不能利用罗列法。

**子集**

若集$A$的每一元素也属于集$B$，我们就把$A$叫做$B$的子集。记为$A \subset B$或$B \supset A$，分别读作"$A$含于$B$"或"$B$包含$A$"。如果$A \subset B$和$B \subset A$，我们就认为$A$和$B$相等，记为$A = B$。

若$A$和$B$不相等，则我们记为$A \neq B$。

若$A \subset B$但$A \neq B$，我们便把$A$叫做$B$的真子集。

显然，我们对所有集$A$，都有$A \subset A$。

例3　$\{a, i, u\}$是$\{a, e, i, o, u\}$的真子集。

例4　$\{i, o, a, e, u\}$是$\{a, e, i, o, u\}$的子集但不是它的真子集，事实上两个集相等。注意仅是元素的重排并不能变动集。

下述定理对任意集$A$，$B$，$C$都成立。

**定理1-1**　若$A \subset B$且$B \subset C$，则$A \subset C$。

**全集和空集**

在许多实际场合，我们限于讨论某一特殊集的子集，这个特殊集叫做论域，全集或空间，用$U$表示。空间的元素常叫做空间的点。

考虑一个根本没有元素的集也是有用的。这种集叫做空集且用$\varnothing$表示。它是任何集的子集。

## 实数

实数集$R$为本书的一个最重要的集。假定学生从微积分学中就已经熟悉了实数的许多性质。实数的几何直觉经常利用如下事实来提供：每个实数可以表示为一条称为实直线的直线上的点，反之亦然[见图1-1]。这就使我们有可能谈点集而不谈实数集，反之亦然。

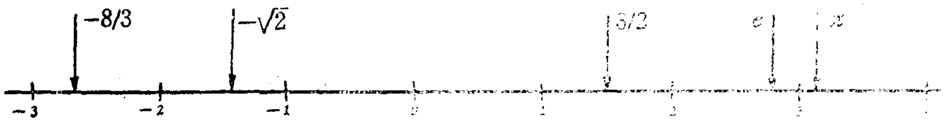


图 1-1

例如$\{x: a<x<b\}$是$R$内的开区间且经常简记为$a<x<b$或$(a,b)$；$\{x: a\leqslant x\leqslant b\}$是$R$内的闭区间且简记为$a\leqslant x\leqslant b$或$[a,b]$；$\{x: a<x\leqslant b\}$或$\{x: a\leqslant x<b\}$是$R$内的半开[或半闭]区间。

我们发现扩张实数集以包括$-\infty$和$+\infty$即$\infty$经常是很方便的。因此$R$是$\{x: -\infty<x<\infty\}$，可简记为$-\infty<x<\infty$或$(-\infty,\infty)$。

学生熟悉的$R$的几个重要的子集如下。

1. **自然数集**$\{1,2,3,\cdots\}$. 这个集常叫做正整数集，它用于计数，记为$N$。
2. **整数集**. 这个集包括元素$0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\cdots$,记为$Z$。因此它由正整数$\{1,2,3,\cdots\}$,负整数$\{-1,-2,-3,\cdots\}$和零$\{0\}$组成。注意到$N\subset Z$。
3. **有理数集**. 这个集包括的元素为整数$p$和$q$的商$p/q$,只要不除以零,如例$2/3,-5/2$等，它记为$Q$。我们注意到$Z\subset Q$.
4. **无理数集**. 这个集为实数集中除开有理数以外的全体实数，例如$\sqrt{2}$，$\pi$，$\sqrt[3]{5}$，$e$等皆为无理数。

尽管几何直观是一种说明实直线上点集概念的方法，但是正如我们将看到的，这种直观不可能总是靠得住的。

## 完全性公理或上确界公理

实数$u$叫做实数集$S$的上界,若对所有$x\in S$我们都有$x\leqq u$.若能找得到一个上界$p$,使对所有上界$u$,我们都有$p\leqq u$.则$p$叫做$S$的最小上界或上确界,简记为l.u.b.$S$或$\sup S$.

下述公理把实数集和它的任何真子集[例如有理数集]区别开了。

完全性公理或上确界公理　若非空实数集有上界，它就有上确界。

我们可以用类似的方式定义$S$的下界和最大下界即下确界，它略写为g.l.b.$S$或$\inf S$，并且可以证明若非空实数集有下界，它就有下确界。

若一个集既有上界又有下界，我们就说它是有界集。

**VENN图**

在几何上，全域$U$可以用矩形内部的点集来表示。在这种情况下，$U$的子集[例如图1－2中阴影所示的$A$和$B$]可以由圆内部的点集来表示。这种图叫做$VENN$图，经常用来提供有关两个集间的各种可能关系的几何直观。

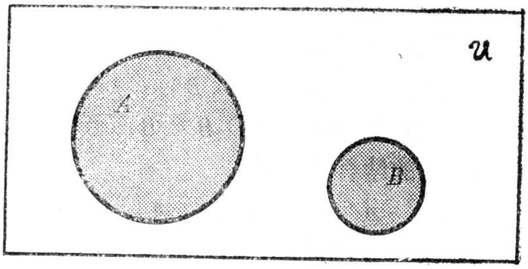

图 1－2

**集运算**

**1．并**　所有不是属于$A$就是属于$B$或者既属于$A$又属于$B$的元素[或者点]所成的集叫做$A$和$B$的并，且用$A\cup B$表示[如图1－3中的阴影部分]。

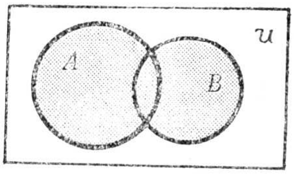

图 1－3

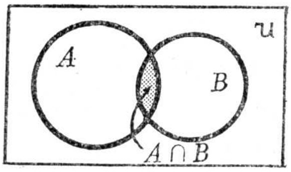

图 1－4

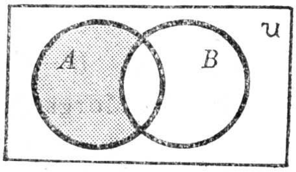

图 1－5

**2．交**　所有既属于$A$又属于$B$的元素所成的集叫做$A$和$B$的交且用$A\cap B$表示[如图1－4中的阴影部分]。

满足$A\cap B=\varnothing$，即没有公共元素的两个集$A$和$B$，叫做不相交的集。图1－2中，$A$和$B$就是不相交的集。

**3．差**　由$A$中不属于$B$的所有元素所组成的集叫做$A$和$B$的差，且用$A-B$表示[如图1－5中的阴影部分]。

**4．补**　若$B\subset A$，则$A-B$叫做$B$关于$A$的补，且用$B_A^c$表示[如图1－6中的阴影部分]。若$A=U$是全集，我们就把$U-B$简称为$B$的补，且用$B^c$表示[如图1－7中的阴影部分]。

$A\cup B$的补记为$(A\cup B)^c$　.

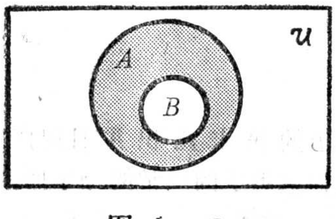

图 1－6

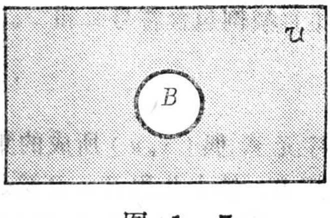

图 1－7

**有关集的定理**

**定理1－2.** 并的交换律 $A\cup B=B\cup A$

**定理1－3.** 并的结合律 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C=A\cup B\cup C$

**定理1－4.** 交的交换律 $A\cap B=B\cap A$

**定理1－5.** 交的结合律

$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C=A\cap B\cap C$$

**定理1－6.** 第一分配律

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

**定理1－7.** 第二分配律

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

**定理1－8.** $A-B=A\cap B^c$

**定理1－9.** 若$A\subset B$，则$A^c\supset B^c$或$B^c\subset A^c$

**定理1－10.** $A\cup\varnothing=A$，$A\cap\varnothing=\varnothing$

**定理1－11.** $A\cup U=U$，$A\cap U=A$

**定理1－12a.** De Morgan第一定律

$$(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$$

**定理1－12b.** De Morgan第二定律

$$(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$$

**定理1－13.** 对任意集$A$和$B$，有

$$A=(A\cap B)\cup(A\cap B^c)$$

定理1－12$a$，1－12$b$和1－13可以推广［见习题1.71和1.76］。

有趣的是注意到，若用记号$A+B$代替$A\cup B$，用$AB$代替$A\cap B$，上述集代数的许多结果就会使人想起实数的普通代数．例如，定理1－3和定理1－6就分别变成$A+(B+C)=(A+B)+C$和$A(B+C)=AB+AC$．然而，类似并非总是可靠的．例如，定理1－7就成为$A+BC=(A+B)(A+C)$。

**对偶原理**

与集有关的任何正确的结果也是正确的，若我们用交代替并，用并代替交，用集的补代替这个集且颠倒包含符号$\subset$和$\supset$。

**笛卡儿积**

所有有序元素偶$(x,y)$所成的集叫做$A$和$B$的笛卡儿积并且记作$A\times B$，这里$x\in A$，$y\in B$．笛卡儿积$R\times R$就是从解析几何熟悉了的通常的$xy$平面．通常，$A\times B\neq B\times A$．类似地，所有有序三元组$(x,y,z)$，这里$x\in A$，$y\in B$，$z\in C$所成的集叫做$A$，$B$，$C$的笛卡儿积，记作$A\times B\times C$。

**函数**

从集$X$到集$Y$的函数或者映射，经常记作$f:X\to Y$，它是一个法则，这个法则对每个$x\in X$都指定一个唯一的元素$y\in Y$。元素$y$叫做$x$在$f$下的象且记作$f(x)$。若$A\subset X$、则$f(A)$是所有元素$f(x)$，这里$x\in A$，所成的集，叫做$A$在$f$下的象。符号$x,y$常叫做实变量。

集$X$叫做$f$的定义域，而$f(X)$叫做$f$的值域。若$Y=f(X)$，就说$f$是从$X$映到$Y$上的，而把$f$叫做映到上的函数。

若元素$a\in A\subset X$映射成元素$b\in B\subset Y$，则$a$叫做$b$在$f$下的原象而记作$f^{-1}(b)$。所有合于$f(x)\in B$的$x\in X$所成的集叫做$B$在$f$下的原象，而记为$f^{-1}(B)$。

若$X$是集所成的类[即，其元素是集的集]，则函数$f:X\to Y$叫做集函数。

若$X$和$Y$都是实数集，则$f$或$f(x)$常叫做实函数。

函数$f:X\to Y$也可以定义为具有如下性质的笛卡儿积$X\times Y$的一个子集.即若$(x_1,y_1)$，$(x_2,y_2)$都属于这个子集而$x_1=x_2$，则$y_1=y_2$。

**1－1函数　1－1对应**

若仅当$a_1=a_2$时$f(a_1)=f(a_2)$，就说$f$是一对一的函数，即1－1函数。

若存在一个从集$X$到集$Y$的既是1－1的又是映到上的函数，就说$X$和$Y$之间有一个1－1对应。

若函数$f:X\to Y$是1－1的和映到上的，那么给定任意元素$y\in Y$，则在$X$中仅有一个元素$f^{-1}(y)$。在这种情况下，$f^{-1}$就定义了一个从$Y$到$X$的称为反函数的函数。

**可数性**

两个集$A$和$B$叫做等势集，我们写成$A\sim B$，若在$A$和$B$之间存在一个1－1对应。

例5　集$A=\{1,2,3,\}$和$B=\{2,4,6\}$由于如下所示的1－1对应

$$
\begin{array}{cccc}
A: & 1 & 2 & 3 \\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\
B: & 2 & 4 & 6
\end{array}
$$

是等势的。

若$A\sim B$，则$B\sim A$。又若$A\sim B$且$B\sim C$，则$A\sim C$。

对某个自然数$n$，与集$\{1,2,3,\cdots,n\}$等势的集叫做有限集，否则叫做无限集。

与自然数集等势的无限集叫做可列集；否则便叫做不可列集。

不是空集，有限集就是可列集的集叫做可数集；否则便叫做不可数集。

例6　有理数集$Q$可数[参看习题1.16和1.18]。

例7　0与1之间的实数集[从而集$R$]不可数或不可列[参看习题1.20]。

下述定理是重要的。

**定理1－14.** 可数个可数集的并可数。

**定理1－15[Schroeder—Bernstein].** 若$A\subset B\subset C$且$A\sim C$，则$A\sim B$。

## 基数

集$\{1,2,3,\cdots,n\}$以及与它等势的任意集的基数定义为$n$。任意可列集的基数定义为$a$。$R$，常叫做实连续统，或任意与$R$等势的集的基数定义为$c$。空集$\varnothing$的基数定义为0。

无限基数的运算，有时叫做超限数的运算也可以定义[参看习题1.94－1.97]。

连续统假设，它猜测在$a$和$c$之间没有超限数[基数]，从未加以证明，也从未加以推翻。

## Cantor集

考察闭区间[0,1]。在点1/3，2/3处把这个区间分成三等分而去掉居中的三分之一的开区间(1/3,2/3)。于是我们得到了集$K_1=[0,1/3]\cup[2/3,1]$。把区间[0,1/3]和[2/3,1]各三等分，又去掉居中的三分之一的开区间，我们得到$K_2=[0,1/9]\cup[2/9,1/3]\cup[2/3,7/9]\cup[8/9,1]$。我们按照这种方式继续做下去就得到了集$K_1$，$K_2\cdots$。用$K$表示的*Cantor*集是$K_1$，$K_2\cdots$的交。

好象集$K$几乎什么元素也没有剩下来。然而，结果是[参看习题1.22]，这个集的基数是$c$，即它与[0,1]等势。它也有许多其他值得注意的性质[例如参看习题1.109]

## n维EUCLID空间

由笛卡儿积$R^n=\overbrace{R\times R\times\cdots\times R}^{n\text{个}}$确定的空间叫做$n$维*Euclid*空间，而这个空间的点就是有序$n$实数组$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$。若$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$y=(y_1,y_2,\cdots y_n)$，则$x$和$y$之间的*Euclid*距离定义为

$$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$

当$n=1$时，$d(x,y)=|x-y|$，这里$|a|$指的是$a$的绝对值[若$a\geqq 0$，则$|a|$等于$a$，若$a<0$，则$|a|$等于$-a$]。

点集$\{x：d(x,y)<r\}$叫做半径为$r$中心在$y$的开球，而有时候又叫做$y$的球形邻域。若我们用$\leqq$代替$<$，这个点集叫做半径为$r$中心在$y$的闭球。当$n=1$时，开球或者闭球就分别化为开区间或者闭区间。

## 度量空间

度量空间是*Euclid*空间的一种推广，在度量空间里对其中的任意两个元素[用$x,y,z$,表示]都定义有距离函数$d(x,y)$，它满足下述性质。

1．非负性　$d(x,y)\geqq 0$

2．对称性　$d(x,y)=d(y,x)$

3．恒等性　$d(x,y)=0$当且仅当$x=y$。

4．三角不等式　$d(x,z)\leqq d(x,y)+d(y,z)$

**有关点集的几个重要定义**

本书主要论及一维*Euclid*空间 $R$ 中的集，即主要论及实数集。然而，尽管我们采用的语言[例如，$x$ 和 $y$ 之间的距离是 $|x-y|$ 等]只是适合于 $R$ 的，但应当强调指出，有许多概念[例如利用开球或者闭球来代替区间]易于推广到 $R^n$ 或别的度量空间。

1. **邻域**　点 $a$ 的 $\delta$ 邻域是所有合于 $|x-a|<\delta$ 的点 $x$ 的集，这里 $\delta$ 是任意给定的正数。$a$ 的去心 $\delta$ 邻域是所有合于 $0<|x-a|<\delta$，即 $a$ 本身除外的点 $x$ 的集。

   用开区间[或高维空间中的开球]代替邻域，以尽量避免邻域的概念。
2. **内点**　点 $a\in S$ 叫做 $S$ 的内点，如果存在 $a$ 的一个 $\delta$ 邻域，使得这个邻域的全部点都属于 $S$。换句话说，$a$ 是 $S$ 的内点，若存在一个开区间 $I\subset S$，使得 $a\in I$。

   $S$ 的内点所成的集叫做 $S$ 的内部。
3. **开集**　说一个集是开的，若它的每一个点都是内点。
4. **外点和边界点**　若 $a$ 的每一个 $\delta$ 邻域只含有属于 $S^c$ 的点，则 $a$ 叫做外点。如果 $a$ 的每个 $\delta$ 邻域含有的点既有属于 $S$ 的，又有属于 $S^c$ 的，则 $a$ 叫做边界点。

   $S$ 的外点所成的集叫做 $S$ 的外部，而 $S$ 的边界点的集叫做 $S$ 的边界。

   显然，一个集的任意点或是内点，外点，或是边界点。
5. **聚点或极限点**　点 $a\in S$ 叫做 $S$ 的聚点或极限点，若 $a$ 的每个去心 $\delta$ 邻域都含有 $S$ 的点。
6. **导集**　集 $S$ 的一切聚点或极限点的集叫做导集，记为 $S'$。
7. **集的闭包**　由 $S$ 以及它的极限点组成的集，即，$S\cup S'$，叫做 $S$ 的闭包，记作 $\overline{S}$。
8. **闭集**　一个集叫做闭的，若它包含它所有的极限点。
9. **集的开覆盖**　开区间所成的类 $C$ 叫做集 $S$ 的开覆盖，若 $S$ 的每个点都属于 $C$ 的某个元。若集 $J\subset C$ 是集 $S$ 的一个开覆盖，则 $J$ 叫做 $S$ 的一个开子覆盖。

**有关点集的几个重要定理**

**定理 1－16.** 开集的补是闭集，而闭集的补是开集。

**定理 1－17.** 任意个开集的并是开集，有限个开集的交是开集。

**定理 1－18.** 有限个闭集的并是闭集，任意个闭集的交是闭的。

**定理 1－19.** 实直线上的每个开集除了区间的顺序外，都可以唯一地表示为可数个互不相交的开区间[称为构成区间]的并。

**定理 1－20[Weierstrass—Bolzano].** $R$ 中的每个有界无限集至少有一个极限点或聚点。

**定理 1－21[Heine—Borel].** 有界闭集 $S$ 的每个开覆盖都含有一个有限的开子覆盖[即，$S$ 可由有限个开区间覆盖]。对于*Euclid*空间 $R^n$，这个定理与 *Weierstrass－Bolzano*定理[定理 1－20]等价。若集不是有界闭集，则定理不成立[参看习题1.107和1.108]。

**紧集**

集 $S$ 叫做是紧的，若 $S$ 的每个开覆盖有一个有限子覆盖。对于 $R^n$，紧集与有界闭集是等价的。

**函数的极限**

数 $l$ 叫做$f(x)$当 $x$ 趋于 $a$ 时的极限，若对每个 $\varepsilon>0$，存在一个 $\delta>0$，使得每当 $0<|x-a|<\delta$ 时总有 $|f(x)-l|<\varepsilon$。在这种情况下，记做 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=l$。

**定理 1－22.** 若一个极限存在，则它是唯一的。

**定理 1－23.** 若 $\lim\limits_{x\to a}f_1(x)=l_1$，$\lim\limits_{x\to a}f_2(x)=l_2$，则

$$(a)\lim_{x\to a}[f_1(x)+f_2(x)]=l_1+l_2$$

$$(b)\lim_{x\to a}f_1(x)f_2(x)=l_1l_2$$

$$(c)\lim_{x\to a}[f_1(x)/f_2(x)]=l_1/l_2\text{，若}l_2\neq 0$$

在极限的上述定义中，若用 $0<x-a<\delta$ 来代替 $0<|x-a|<\delta$，则 $l$ 叫做右极限，记作 $\lim\limits_{x\to a+}f(x)=l$。对左极限 $\lim\limits_{x\to a-}f(x)$，也可以给出类似的定义。一个极限存在，当且仅当左极限和右极限相等。

**连续函数**

**定义** 说函数 $f$：$R\to R$ 在点 $a$ 是连续的，若任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得每当 $|x-a|<\delta$ 时，总有 $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$。我们也可以等价地说，$f$[或$f(x)$]在 $a$ 连续，若 (1)$\lim\limits_{x\to a}f(x)$存在，(2)$f(a)$存在，(3)$\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$。

我们把 $f$ 叫做集 $S$ 上的连续函数，若 $f$ 在 $S$ 的每个点连续。

下述连续性的另一个定义[参看习题1.41]有时是有用的。

**定义：** 函数 $f$：$R\to R$ 叫做在 $a$ 连续，若任给含有$f(a)$的开集 $A$，就存在一个含有 $a$ 的开集 $B$，使得$f(B)\subset A$。

**连续函数的定理**

**定理 1－24.** 连续函数的和、差、积和商是连续的，只要不除以零。

**定理 1－25**[介值定理]. 若 $f$ 在$[a,b]$上连续，则 $f$ 就取$f(a)$和$f(b)$之间的每一个值。特别，$f$ 取它在$[a,b]$上的最大值和最小值。

**定理 1－26.** 若 $f$ 在闭集 $S$ 上连续，则 $f$ 为有界函数，即存在一个实数 $M$，使得对于所有 $x\in S$ 有 $|f(x)|<M$。

**定理 1－27.** 函数 $f$ 是连续的，当且仅当任意开集的原象也是开集。

**一致连续性**

说函数 $f$：$R\to R$ 在 $S$ 上是一致连续的，若任给 $\varepsilon>0$，存在数 $\delta>0$，使得每当

$|x-y|<\delta$时，总有$|f(x)-f(y)|<\varepsilon$，这里$x\in S$，$y\in S$。

**定理1-28.** 若$f$在有界闭集$S$上连续，则它在$S$上一致连续。

## 序列

序列是一个函数，它的定义域是自然数集。序列记为$a_1,a_2,a_3,\cdots$，或简记为$\langle a_n\rangle$。

说实数序列$\langle a_n\rangle$收敛于$a$或有极限$a$，若任给$\varepsilon>0$，便存在一个正整数$n_0$，使得每当$n>n_0$时就有$|a_n-a|<\varepsilon$。若极限存在，它便是唯一的，就说该序列收敛于这个极限，记为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$或简写为$\lim a_n=a$。

**定理1-29.** 若$\lim a_n=a$，$\lim b_n=b$，则$\lim(a_n+b_n)=a+b$，$\lim a_nb_n=ab$，$\lim a_n/b_n=a/b$，只要$b\neq 0$。

**定理1-30.** 若$\langle a_n\rangle$为有界序列[即，有常数$M$适合$|a_n|\leqq M$]，又若$\langle a_n\rangle$单调递增或单调递减[即，$a_{n+1}\geqq a_n$，或$a_{n+1}\leqq a_n$]，则$\langle a_n\rangle$收敛。

**定理1-31.** 收敛序列是有界序列

若一个序列不收敛，则它叫做是发散的。

## 上极限和下极限

数$\bar{l}$叫做是序列$\langle a_n\rangle$的上极限，最大极限或上限，若对于任意的$\varepsilon>0$，序列有无限多项大于$\bar{l}-\varepsilon$而只有有限项大于$\bar{l}+\varepsilon$。我们用$\limsup a_n$或$\overline{\lim}\,a_n$表示$a_n$的上极限。

数$\underline{l}$叫做序列$\langle a_n\rangle$的下极限，最小极限或下限，若对于任意$\varepsilon>0$，序列有无限多项小于$\underline{l}+\varepsilon$，而只有有限项小于$\underline{l}-\varepsilon$。我们用$\liminf a_n$或者$\underline{\lim}\,a_n$表示$\langle a_n\rangle$的下极限。

若$\langle a_n\rangle$有无限多项超过任意正数$M$，我们就写成$\overline{\lim}\,a_n=\infty$。若有无限多项小于$-M$，$M$是任意正数，我们就写成$\underline{\lim}\,a_n=-\infty$。

**定理1-32.** 每个有界序列总有有限的上极限和下极限。序列收敛，只要这两个极限相等。

## 区间套

**定理1-33.** 设$I_1=[a_1,b_1]$，$I_2=[a_2,b_2]$，$\cdots$，$I_n=[a_n,b_n]$，$\cdots$是一列区间，而且$I_1\supset I_2\supset\cdots\supset I_n\supset\cdots$，又若$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=0$，则有一个且只有一个所有区间公共的点。这种情况下的这些区间叫做区间套。

## Cauchy序列

说实数序列$\langle a_n\rangle$是*Cauchy*序列，若任给$\varepsilon>0$，就存在一个正整数$n_n$，使得每当$p>n_0$，$q>n_0$时总有$|a_p-a_q|<\varepsilon$。

**定理1-34.** 每个收敛序列是*Cauchy*序列。

**完全性**

说实数集 $S$ 是完全的，若每个Cauchy序列的极限属于 $S$。

**定理 1－35.** 每个Cauchy实数序列是收敛的。

例8．有理数集 $Q$ 不是完全的，但是由定理1－35，实数集 $R$ 是完全的。

**函数序列　一致收敛性**

设 $f_1$，$f_2$，…，记作 $\langle f_n\rangle$，是一列从 $A$ 到 $B$ 的函数，这里 $A$，$B\subset R$。我们说 $\langle f_n\rangle$ 一致收敛于 $A$ 中的某个函数 $f$，若给定 $\varepsilon>0$，就存在一个正整数 $n_0$，使得对所有 $n>n_0$，所有 $x\in A$，有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$。

**定理 1－36.** 若 $\langle f_n\rangle$ 是 $A$ 上一列连续函数且在 $A$ 上一致收敛于 $f$，则 $f$ 在 $A$ 上连续。

有时我们把序列写成 $\langle f_n(x)\rangle$ 来代替 $\langle f_n\rangle$。

**级数**

设 $\langle a_n\rangle$ 是一个已知的序列，考察一个新序列 $\langle s_n\rangle$，这里

$$s_1=a_1,\quad s_2=a_1+a_2,\quad s_3=a_1+a_2+a_3,\quad \cdots$$

我们将把序列 $\langle s_n\rangle$ 叫做无穷级数，而把它记作 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=a_1+a_2+\cdots$ 或简记为 $\sum a_n$。诸和 $s_1$，$s_2$…叫做级数的部分和而 $\langle s_n\rangle$ 叫做部分和序列。

称无穷级数是收敛的或者是发散的，这取决于部分和序列是收敛的或者是发散的，若 $\langle s_n\rangle$ 收敛于 $s$，则 $s$ 叫做这个无穷级数的和。

称级数 $\sum a_n$ 是绝对收敛的，若 $\sum|a_n|$ 收敛。在这个级数中各项可以重排而不改变级数的和。我们有

**定理 1－37.** 若级数绝对收敛，则它收敛。

一致收敛的函数项级数可以利用一致收敛的部分和序列来定义[参看习题1.53]。

**定理 1－38 [Weierstrass M 检验法].** 若 $|f_n(x)|\leqq M_n$，$n=1,2,3,\cdots$，此处 $M_n$ 是使得 $\sum M_n$ 收敛的正的常数，则 $\sum f_n(x)$ 一致收敛而且绝对收敛。

## 习题及其解

**集和实数**

1.1. 设 $S$ 是所有其平方等于25的实数集。说明如何利用($a$)描述法与($b$)罗列法来描述 $S$。

($a$) $S=\{x:x^2=25\}$，读作所有满足 $x^2=25$ 的元素 $x$ 的集。

($b$) 因为当 $x=5$ 和 $x=-5$ 时，$x^2=25$，故可以写成 $S=\{5,-5\}$，即通过实际上给出 $S$ 的元素的办法来描述 $S$。

1.2. 设 $A=\{x:x$ 是奇整数$\}$，$B=\{x:x^2-8x+15=0\}$。证明 $B\subset A$。

因为 $x^2-8x+15=0$ 或 $(x-3)(x-5)=0$，当且仅当 $x=3$ 或 $x=5$，

得到 $B=\{3,5\}$。此外因为元素 3 和 5 都是奇整数，故它们都属于 $A$。于是 $B$ 的每个元素都属于 $A$，因此 $B\subset A$，即 $B$ 是 $A$ 的子集。

1.3. $\{2\}=2$ 对吗？

不对，2 是一个实数，而$\{2\}$是一个由实数 2 组成的集。仅由一个元素组成的集例如$\{2\}$有时叫做单元集，我们一定要把单元集和它含有的元素加以区别。

1.4. 确定下列陈述中哪个对并且哪个错了就改正哪一个。

(a) $\{x: x\neq x\}=\{\varnothing\}$

(b) 若 $A=\{x: x^2=4, x>9\}$，$B=\{x: x\leqq 1\}$　则 $B\supset A$

(a) 陈述不真。任何特定的事物都是假定与其自身相同。从而就没有事物和自身不相同。因此$\{x: x\neq x\}=\varnothing$是空集。

错误在于写成$\{\varnothing\}$而不是写成$\varnothing$，因为$\{\varnothing\}$是一个由空集组成的非空集。

(b) 注意这要理解为 $A$ 是所有满足 $x^2=4$ 且 $x>9$ 的 $x$ 的集。

因为没有合于$x^2=4$［即 $x=2,-2$］且 $x>9$ 的数 $x$，由此可见 $A=\varnothing$。

而且因为空集是每个集的子集，由此可见 $A\subset B$ 或 $B\supset A$，故陈述正确。

1.5. 证明若 $A\subset B$ 而 $B\subset C$，则 $A\subset C$。

设 $x$ 是 $A$ 的任意元素，即 $x\in A$，于是因为 $A\subset B$，即 $A$ 的每个元素都在 $B$ 中，我们得出 $x\in B$，同样因为 $B\subset C$，我们得出 $x\in C$，从而 $A$ 的每个元素都是 $C$ 的元素，因此 $A\subset C$。

1.6. 设 $S=\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \cdots\right\}$。对 $S$ 求(a)上界，(b)上确界，(c)下界，(d)下确界。

(a) 因为 $S$ 的所有元素都小于［例如］2，故我们可以说 2 是一个上界。

实际上任意大于 2 的数同样也是上界，有几个数［例如 $1\frac{1}{2}, 1\frac{1}{4}, 1$］小于 2 也是上界

(b) 数 1 是集 $S$ 的上界而且它是所有上界中最小的。由此可见 1 是 $S$ 的最小上界(l.u.b.)即上确界(sup)。注意 1 不是 $S$ 的元素。

(c) 因为 $S$ 的所有元素都大于［例如］0，故我们可以说 0 是下界。实际上任何小于 0 的数［例如 $-1, -3$］同样也是下界，而且有几个大于 0 的数［如例 $\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$］也是下界。

(d) 数 $\frac{1}{2}$ 是集 $S$ 的下界而且它是所有下界中最大的，可见 $\frac{1}{2}$ 是 $S$ 的最大下界(g.l.b)即下确界(inf)，注意 $\frac{1}{2}$ 是 $S$ 的元素。