帮你学奥数

小学奥数与华杯赛通用

xiaoxueaoshuchaojijiaocheng xiaoxueaoshuchaojijiaocheng

小学奥数超级教程

朱华伟 编著

CHAOJIJIAOCHENG

小学提高册

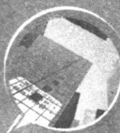
开明出版社

帮你学奥数

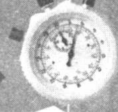
小学奥数与华杯赛通用

xiaoxueaoshuchaojijiaocheng xiaoxueaoshuchaojijiaocheng

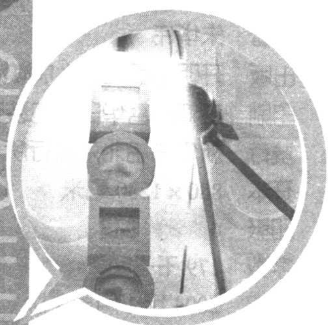
xiaoxueaoshuchaojijiaocheng



小学奥数超级教程



朱华伟 编著



CHAOJIJIAOCHENG

小学提高册

开明出版社

图书在版编目（CIP）数据

"帮你学奥数" 小学奥数超级教程．小学提高卷/朱华伟编著．—北京：开明出版社，2004.1

ISBN 7-80133-765-4

Ⅰ.帮... Ⅱ.朱... Ⅲ.数学课—小学—教学参考资料 Ⅳ.G624.503

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 107641 号

策　　划　焦向英

项目执行　柴　星　赵　菲

责任编辑　林水平　赵　菲

帮你学奥数

小学奥数超级教程——小学提高卷

编著　朱华伟

出版　开明出版社（北京海淀区西三环北路 19 号）

印刷　三河市富华印刷包装有限公司

发行　新华书店北京发行所

开本　880×1230 毫米　1/32 开

印张　6

字数　179 千

版次　2004 年 1 月第 1 版　2004 年 1 月第 1 次印刷

书号　ISBN 7-80133-765-4/G·687

印数　00 001～20000 册

定价　7.50 元

前　　言

数学被誉为科学的皇后。在人类文明的历史长河中，中华民族对数学的发展曾作出卓越的贡献。勾股定理、祖冲之圆周率、九章算术等丰硕成果无不闪射出其耀眼的光芒。新中国成立以来，中国的现代数学有了长足的发展，先后涌现出华罗庚、陈景润等一批著名数学家。数学大师陈省身教授曾预言："21世纪，中国必将成为数学大国。"中国中学生近年来在国际数学奥林匹克中的出色成绩，使人们相信陈省身教授的这一"猜想"将在本世纪得到证明。

由于计算机的出现，数学已不仅是一门科学，还是一种普适性的技术。从航空到家庭，从宇宙到原子，从大型工程到工商管理，无一不受惠于数学科学技术。高科学技术本质上是一种数学技术。美国科学院院士格里姆（J. Glimm）说："数学对经济竞争力至为重要，数学是一种关键的普遍使用的，并授予人能力的技术。"时至今日，数学已兼有科学与技术两种品质，这是其他学科少有的。数学对国家的贡献不仅在于富国，而且还在于强民。数学给予人们的不仅是知识，更重要的是能力，这种能力包括观察实验、收集信息、归纳类比、直觉判断、逻辑推理、建立模型和精确计算。这些能力的培养，将使人终身受益。这些能力的培养，必须从小抓起，从青少年抓起。而数学奥林匹克活动，则是培养这些能力的良好载体。

基于这样的想法，笔者以国内外小学数学奥林匹克为背景，以《全日制义务教育数学课程标准》的新理念新要求为准绳，根据多年培训数学奥林匹克选手的经验和体会，编写了这套奥数教程，既为学有余力且对数学感兴趣的小朋友提供了一个施展才华和提高数学解题能力的指导，也为参加数学竞赛的小朋友提供了一套科学实用

的培训教程。本丛书的读者对象范围很广，适用于备战各种小学数学竞赛的小朋友和老师。

本丛书分"教程"和"测试"两个系列，每个系列包括三年级卷、四年级卷、五年级卷、六年级卷、提高卷共五册，全套书共十册。

"教程"系列每册都以专题的形式编写，每章的主要栏目有：赛点突破、范例解密、超级训练。三至六年级卷的"超级训练"栏目中，题目根据难易程度分为A组、B组，A组较易，B组较难，供学生、老师和家长选择使用。全书后附有"超级训练"题目的详解。

"测试"系列中三至六年级测试卷每册分为两部分：第一部分为同步测试，是与"教程"中的专题对应设置的测试卷；第二部分为全真测试，精选了国内外最新小学数学奥林匹克试卷若干套。小学提高卷分两部分：第一部分为模拟测试，是作者自拟的40套试卷，并根据难易程度分为A组、B组，A组较易，B组较难；第二部分精选了难度较高的国内外最新小学数学奥林匹克试卷若干套。每套试卷都给出了详解。

问题是数学的心脏，数学奥林匹克是解题的竞赛。要提高解题能力，必须进行大量的训练。本丛书精选了具有代表性的经典例题，配备了足够的训练题和测试题。在这些题目中既有传统的名题，又有国内外近几年涌现的佳题，还有作者根据自己的教学实践编撰的新题。设置这些题目时，作者专门针对学生学习的实际，突出知识的重点、难点，以期达到提高的目的。

本丛书注重数学基础知识的巩固提高和数学思想方法的渗透，凸现科学精神和人文精神的融合，加强对学生学习兴趣、创新精神、实践能力、应用意识和分析、解决问题能力的培养。

数学大师陈省身教授为2002年8月在北京举行的第24届国际数学家大会题词："数学好玩"。我们深信本丛书能让你品味到数学的无穷乐趣。著名数学家陈景润说得好："数学的世界是变幻无穷的世界，其中的乐趣只有那些坚持不懈的人才能体会得到！"

朱华伟

2003年12月

朱华伟 广州大学教育软件研究所副研究员，特级教师，中国数学奥林匹克高级教练，博士研究生，享受国务院政府特殊津贴的专家。连续四届担任全国华罗庚金杯赛武汉队主教练，取得团体冠军，共辅导12名选手取得金牌，荣获“华罗庚金杯赛金牌教练奖”和“伯乐奖”。多次担任国际数学奥林匹克(IMO)中国队教练，作为96汉城国际数学竞赛中国队主教练，率队取得团体冠军和两枚金牌、一枚银牌、一枚铜牌的佳绩。在国内外共发表论文40余篇，翻译、编著图书60余册。

目　录

第 1 章

枚举法

赛点突破

枚举法起源于原始的计数方法，即数数. 关于这方面的例子，我们在“计数问题”中已介绍过，现在我们从另一角度来利用枚举法解题. 当我们面临的问题存在大量的可能的答案(或中间过程)，而暂时又无法用逻辑方法排除这些可能答案中的大部分时，就不得不采用逐一检验这些答案的策略，这就是利用枚举法来解题.

采用枚举法解题时，重要的是应做到既不重复又不遗漏，这就好比工厂里的质量检验员的责任是把不合格产品挑出来，不让它出厂，于是要对所有的产品逐一检验，不能漏掉.

范例解密

例 1 埃拉托色尼(Eratosthens)的“筛子”，是公元前 3 世纪古希腊数学家兼哲学家埃拉托色尼为了研究质数在自然数列中的分布而造出的世界上第一张质数表.

埃拉托色尼为了求出 100 以内的质数用的是枚举法，先把 100 个数全部列出，然后再进行考察. 他把一大张纸蒙在一个框架上，从 1 到 100 按序把 100 个自然数固定上去，再将合数挖掉，这样就像“筛子”一样把合数筛掉了，结果剩下来的就是质数，见下表(第 2 页).

例 2 小华和小伟玩掷骰子的游戏，共有两枚骰子，一起掷出. 若两枚骰子的点数和为 7，则小华胜；若点数和为 8，则小伟胜. 试判断他们两人谁获胜的可能性大.

分析与解 将两枚骰子的点数和分别为 7 与 8 的各种情况都

	2	3		5		7			
11		13				17	19		
		23						29	
31						37			
41		43				47			
		53						59	
61						67			
71		73						79	
		83						89	
						97			

列举出来，就可得到问题的结论. 用 $a+b$ 表示第一枚骰子的点数为 a，第二枚骰子的点数是 b 的情况.

出现 7 的情况共有 6 种，它们是：

$1+6$，$2+5$，$3+4$，$4+3$，$5+2$，$6+1$.

出现 8 的情况共有 5 种，它们是：

$2+6$，$3+5$，$4+4$，$5+3$，$6+2$.

所以，小华获胜的可能性大.

评　注　本题中若认为出现 7 的情况有 $1+6$，$2+5$，$3+4$ 三种，出现 8 的情况有 $2+6$，$3+5$，$4+4$ 也是三种，从而得"两人获胜的可能性一样大"那就错了.

例 3　今有 101 枚币面值一样的硬币，其中有 100 枚是真币，有 1 枚是伪币，伪币与真币的重量不同，现需弄清楚伪币究竟比真币轻，还是比真币重，但只有一架没有砝码的天平. 试问，怎样利用这架天平称两次，来达到目的？

解　在天平两端各放 50 枚硬币，如果天平平衡，则所剩一枚为伪币，于是再称一次即可判明真币与伪币谁轻谁重. 如果天平不平衡，则取下重端的 50 枚硬币，并将轻端的 50 枚硬币分放两端各 25 枚，如果此时天平平衡，则说明伪币在取下的 50 枚硬币中，即伪币比真币重；如果此时天平仍不平衡，则说明伪币在较轻的 50 枚硬币中，即伪币比真币轻.

评 注 在上述解答过程中，我们面临着“平衡”或“不平衡”两种可能的状态，对这两种状态逐一检验，即得到问题的结论.

例4 一个小于400的三位数，它是完全平方数；它的前两个数字组成的两位数也是完全平方数；其个位数还是一个完全平方数，那么这个三位数是____________.

解 这道题共提出三个条件：

(1) 一个小于400的三位数是完全平方数；

(2) 这个三位数的前两位数字组成的两位数也是完全平方数；

(3) 这个三位数的个位数还是一个完全平方数.

我们先找出满足第一个条件的三位数：

100，121，144，169，196，225，256，289，324，361.

再考虑第二个条件，从中选出符合条件者：

169，256，361.

最后考虑第三个条件，排除不合格的256，于是找到答案是169和361.

评 注 这里我们采用了枚举与筛选并用的策略，即依据题中限定的条件，面对枚举出的情况逐步排除不符合条件的三位数，确定满足条件的三位数，从而找到问题的答案.

例5 哥德巴赫猜想是说：每个大于2的偶数都可以表示为两个质数之和. 问：168是哪两个两位数的质数之和，并且其中一个的个位数是1?

解 设此两个质数分别为 x 和 y，且 $x\leqslant y$，即有

$$168=x+y\text{，若 }x=y\text{，则 }x=y=\frac{168}{2}=84.$$

因为84不是质数，所以 $x\neq y$，则 $x<y$，但 x 和 y 都是两位数，所以 $68<x<y<100$.

因而得到以下的限制条件：

$68<x<84,84<y<100$.

由题设，若 x 的个位数是1，则 x 只能是71和81，但81不是质

数，所以 $x=71$.

此时 $y=168-71=97$ 也是质数.

若 y 的个位数是 1，则只能 $y=91$，但此时 $x=168-91=77$，不是质数.

所以 $x=71$，$y=97$ 是惟一解.

评 注 解此题要求同学们记住 100 以内的质数. 如果去掉题目中"其中一个的个位数只能是 1"的条件，则上述答案不变，仍是惟一的解答.

因为质数的个位数只能是 1，3，7. 于是满足上述条件的 x 还可能有 73，83，87 三种可能，但此时对应的 y 是 97，85，81，它们都不是质数. 于是仍只有 $168=71+97$.

如果取消 x,y 是两位数的限制，则显然还有

$$168=5+163,\ 168=11+157,\ 168=17+151,\ \cdots$$

哥德巴赫猜想是 1742 年提出来的，至今已有二百五十多年的历史了，它是数论中最有名的问题，中外许多著名的数学家都研究过，其中包括著名数学家华罗庚、陈景润等.

例 6 有 30 个贰分硬币和 8 个伍分硬币，用这些硬币不能构成的 1 分到 1 元之间的币值有多少种？

解 注意到所有 38 枚硬币的总币值恰好是 100 分(即 1 元)，于是除了 50 分和 100 分外，其他 98 种币值就可以两两配对了，即

$$(1,99);\ (2,98);\ (3,97);\ \cdots;\ (49,51).$$

每一对币值中有一个可用若干个贰分和伍分硬币构成，则另一个也可以，显然 50 分和 100 分的币值是可以构成的，因此只需要讨论币值为 1 分，2 分，3 分，…，48 分和 49 分这 49 种情况.

1 分和 3 分的币值显然不能构成.

2 分、4 分、6 分、…、46 分和 48 分等 24 种偶数币值都可以用若干个贰分硬币构成，因为贰分硬币的总数为 30 个.

5 分、7 分、9 分、…、47 分和 49 分等 23 种奇数币值只需分别在 4 分、6 分、8 分、…46 分、48 分币值的构成方法上，用一枚伍分硬币换

去两枚贰分硬币即可，比如 37 分币值的，由于 36 分币值可用 18 枚贰分硬币构成，用一枚伍分硬币换下两枚贰分硬币，所得的币值即为 37 分. 综合以上分析，不能用若干个贰分和伍分硬币构成的 1 分到 1 元之间的币值只有四种，即 1 分，3 分，97 分，99 分.

例 7 写出 13 个都是合数的连续自然数.

分 析 在寻找质数的过程中，我们可以看出 100 以内最多可以写出七个连续的合数:90，91，92，93，94，96. 我们把筛法继续运用下去，把考查的范围扩大一些就行了.

解 用筛法可以求得在 113 与 127 之间共有 13 个都是合数的连续自然数：

114，115，116，117，118，119，120，121，122，123，124，125，126.

评 注 运用枚举法有时要进行恰当的分类，即把讨论的对象分成若干种情况(分类)，然后对各种情况逐一讨论，最终解决整个问题.

分类的原则是要求不重不漏的. 正确的分类有助于暴露问题的本质，降低问题的难度.

例 8 求这样的三位数，它除以 11 所得的余数等于它的三个数字的平方和.

分析与解 三位数只有 900 个，可用枚举法解决，枚举时可先估计有关量的范围，以缩小讨论范围，减少计算量.

设这三位数的百位、十位、个位数字分别为 x,y,z，则由于任何数除以 11 所得余数$\leqslant 10$，

所以，$x^2+y^2+z^2\leqslant 10$，

从而 $1\leqslant x\leqslant 3, 0\leqslant y\leqslant 3, 0\leqslant z\leqslant 3$，

于是所求三位数必在以下数中：

100，101，102，103，110，111，112，120，121，122，130，200，201，202，211，212，220，221，300，301，310.

不难验证只有 100，101 两个数符合要求.

例 9 将自然数 N 接写在任意一个自然数的右面(例如，将 2 接写在 35 的右面得 352)，如果得到的新数都能被 N 整除，那么 N 称为魔术数，今问小于 1996 的自然数中有多少个魔术数?

解 设 P 为任意一个自然数，将魔术数 $N(N<1996)$ 接后得 $\overline{PN}$，下面对 N 为一位数、两位数、三位数、四位数分别讨论：

(1) 当 N 为一位数时，$\overline{PN}=10P+N$，依题意 $N|\overline{PN}$，则 $N|10P$，由于需对任意数 P 成立，故 $N|10$，所以 $N=1, 2, 5$；

(2) 当 N 为两位数时，$\overline{PN}=100P+N$，依题意 $N|\overline{PN}$，则 $N|100P$，故 $N|100$，所以 $N=10, 20, 25, 50$；

(3) 当 N 为三位数时，$\overline{PN}=1000P+N$，依题意 $N|\overline{PN}$，则 $N|1000P$，故 $N|1000$，所以 $N=100, 125, 200, 250, 500$；

(4) 当 N 为四位数且 $N<1996$ 时，同理可得 $N=1000, 1250$.

综上所述，小于 1996 的自然数中有 14 个魔术数.

评 注 (1)我们可以证明：k 位魔术数一定是 10^k 的约数，反之亦然.

(2)这里将问题分成几种情况去讨论，对每一种情况都增加了一个前提条件，从而降低了问题的难度，使问题容易解决.

例 10 一个 n 位($n\geqslant 2$)自然数 N 中的相邻的一个，两个，…，$(n-1)$个数码组成的自然数叫做 N 的“片断数”(顺序不变，如 186 的“片断数”有 1，8，6，18，86 五个)，分别求出满足下列条件的几位自然数.

(1) 它是一个完全平方数，且它的“片断数”都是完全平方数；

(2) 它是一个质数，且它的“片断数”都是质数.

解 (1) 根据题意，N 的一位“片断数”可能取 0，1，4，9，但是在 N 中不出现 0，否则出现 10，40，90 不是完全平方数的两位“片断数”. 在 N 中也不能出现 1，否则出现 14，19，41 或 91 等不是完全平方数的两位“片断数”.

由 4，9 组成的自然数中 44，94，99 不是完全平方数，故 49 是惟一所求的自然数.

(2) 根据题意，N 的一位"片断数"只可能取2，3，5，7，同样，可以分以下几种情况讨论.

在两位数中，易知，23，37，53，73 为所求.

在三位数中，若用2，则2只能在百位数上，否则会出现两位的"片断数"不是质数，且不能再用5，否则会出现25，35，75等两位"片断数"为合数，而2，3，7三位之和是3的倍数，故此时无所求的自然数，注意到3，7，在十位、个位上不能连续出现，否则又会产生两位的"片断数"不是质数.

若用5，则5只能在百位，同上类似讨论，又5，3，7之和是3的倍数，故此时无所求的自然数.

N 只能由3，7组成，但任何一个都不能连续使用，因为737是11的倍数，而检验可知373是所求的三位"片断数".

故所求的自然数共有5个，即23，37，53，73，373.

例11 有8个物品，质量各不相同，都以1克为单位，每个物品的质量都不超过15克. 小平想用最少的次数，用天平称出其中质量最大的物品. 他用了如下的测定法：

(1) 把8个物品分成两组，每组4个，比较这两组质量的大小；

(2) 把以上两组中质量较大的4个再分成两组，每组两个，再比较它们的大小；

(3) 把以上两组中较大的两个分成两组，每组各1个，取出较大的1个.

小平称了3次，天平都没有平衡，最后便得到了一个物品.

可是实际上他得到的这个是8个当中质量从大到小排在第五的物品.

问:小平找出的这个物品的质量有多少？并求出其中质量为第二小的物品多少克？

解 设这8个物品按质量从大到小依次排列为：

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8.$$

根据题意：

$$15 \geqslant a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > a_6 > a_7 > a_8 \geqslant 1.$$

小平找出的物品按质量应是 a_5，第二小的物品质量应是 a_7.

由于 a_5 加上一个质量比它小的物品不可能大于两个比 a_5 大的物品质量之和，因而第一次必须筛去 3 个质量比 a_5 大的物品.

这样可以得到下面 4 种可能：

第一种，即

$$a_4+a_5+a_6+a_7>a_1+a_2+a_3+a_8, \quad ①$$

$$a_5+a_6>a_4+a_7, \quad ②$$

$$a_5>a_6. \quad ③$$

第二种，即

$$a_3+a_5+a_6+a_7>a_1+a_2+a_4+a_8, \quad ①$$

$$a_5+a_6>a_3+a_7, \quad ②$$

$$a_5>a_6. \quad ③$$

第三种，即

$$a_2+a_5+a_6+a_7>a_1+a_3+a_4+a_8, \quad ①$$

$$a_5+a_6>a_2+a_7, \quad ②$$

$$a_5>a_6. \quad ③$$

第四种，即

$$a_1+a_5+a_6+a_7>a_2+a_3+a_4+a_8, \quad ①$$

$$a_5+a_6>a_1+a_7, \quad ②$$

$$a_5>a_6. \quad ③$$

先考虑第一种情况. 根据①式，a_4 比 a_1 至少少 3 克；a_5 比 a_2，a_6 比 a_3 也都至少少 3 克，则 a_7 比 a_8 至少多 10 克. 根据②式，a_5 比 a_4 至少少 1 克；则 a_6 比 a_7 至少多 2 克. 这样 a_1 至少为 18 克. 与已知相矛盾，第一种情况不可能出现.

按照同样的推理方法，可以说明第二种和第三种情况也不可能出现.

最后，考虑第四种情况. a_1 比 a_2 至少多 1 克；a_5 比 a_3 至少少 2 克；a_6 比 a_4 至少少 2 克；则 a_7 比 a_8 至少多 4 克. 根据②式，a_5 比 a_1 至少少 4 克；则 a_6 比 a_7 至少多 5 克. 这样得到 8 个物品的质量分别是：

$a_1=15$ 克，$a_2=14$ 克，$a_3=13$ 克，$a_4=12$ 克，

$a_5=11$ 克，$a_6=10$ 克，$a_7=5$ 克，$a_8=1$ 克.

因此，小平找出的物品的质量为 11 克，第二少的物品质量为 5 克.

例 12 有一家工厂制造一种产品，此产品卖一个可以得利 1000 元，一共做了 11 个产品. 但是其中有一个是次品不能卖出去. 现在用一种机器来检验产品的质量. 此机器有以下的性能：

(1) 一次可以检验任何数量的产品；

(2) 每检验一次，需要花费 1000 元的手续费；

(3) 如果在检验中没有发现次品的话，每一个产品分别可以得利 1000 元；

(4) 如果在一次检验中发现次品的话，则此次检验的产品全部报废，一个也不能卖出去.

如用这种机器一次一个地检验产品，可能有下面两种情况出现：

运气最好的情况：

第一次检验产品的时候，就发现是次品. 这样剩下的 10 个产品都是正品，可以卖出去. 检验一次需要 1000 元手续费，因此可以得到的收益是 $1000\times10-1000=9000$(元).

运气最坏的情况：

检验前 10 个产品的时候，都没有发现次品(共检验 10 次). 这样，前 10 个产品可以各卖 1000 元，但检验费每次是 1000 元，则等于没有收益.

下面的问题请按运气最坏的情况考虑：

根据每次检验的个数及顺序，可以有几种检验方法. 如果在运气最坏的情况下想得到最高的收益，采用什么样的检验方法最好呢? 这时的收益是多少?

解 显然，按运气最坏的情况考虑，若这种机器每次只检验一个产品，则等于没有收益. 这说明每次只检验一个产品是不可取的.

(1) 如果把 11 个产品分成两批检验，那么有 9，2；2，9；8，3；3，8；7，4；4，7；6，5；5，6 共 8 种情况.

如果是 9、2，第一次就检验出次品，收益是 2000－1000＝1000(元).

如果是 2、9，第一次就检验出次品，收益是 2000－1000＝1000(元).

如果是 8、3，第一次就检验出次品，收益是 3000－1000＝2000(元).

如果是 3、8，第一次就检验出次品，收益是 3000－1000＝2000(元).

如果是 7、4，第一次就检验出次品，收益是 4000－1000＝3000(元).

如果是 4、7，第一次就检验出次品，收益是 4000－1000＝3000(元).

如果是 6、5，第一次就检验出次品，收益是 5000－1000＝4000(元).

如果是 5、6，第一次就检验出次品，收益是 5000－1000＝4000(元).

我们可以猜想到:按运气最坏的情况考虑，收益的多少一般与检验的顺序无关. 因此先考虑每批所分到的个数，再考虑检验的顺序.

(2) 如果把 11 个产品分成 3 批检验，可以有 7，2，2；6，3，2；5，4，2；5，3，3；4，4，3 共 5 种情况. 收益分别为 3000 元、4000 元、5000 元和 5000 元. 以 4，4，3 这种情况为例作进一步说明. 如果第一次就检验出次品，那么收益是 6000 元；如果第二次检验出次品，那么收益是 5000 元；如果前两次没有检验出次品，第三次就不用检验了，那么收益是 6000 元. 因此，按运气最坏的情况考虑，这次检验的收益应按 5000 元计算.

(3) 如果把 11 个产品分成 4 批检验，可以看成 5，2，2，2；4，3，2，2；3，3，3，2 共 3 种情况. 收益分别为 5000 元、6000 元和 5000 元.

(4) 如果把 11 个产品分成 5 批检验，可以有 3，2，2，2，2 一种情况. 收益是 5000 元. 当然，这时也可分成 4，3，2，1，1，它实际上