



平面几何复习总表

自 强 编

上海科学技术出版社

平面几何复习总表

黄自强 编

上海科学技术出版社出版

(上海瑞金二路 450 号)

总发行所上海发行所发行 松江科技印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张 1. 字数 22,000

1985 年 7 月第 1 版 1985 年 7 月第 1 次印刷

印数: 1—407,000

统一书号: 13110·1231 定价: 0.21 元

出版说明

供中学生高中毕业总复习时参考的一套“中学数理化生复习一览图(对开)”出版后受到中学师生欢迎。为了便于读者个人携带和阅读,我们在“一览图”出版的基础上重新组织编写了这套“中学数理化生复习总表(小32开本)”,共九册(每册32页),书名如下。我们希望这套“复习总表”能在读者复习迎考中起穿针引线、提纲挈领的作用。

代数复习总表

平面几何复习总表

平面三角复习总表

立体几何复习总表

平面解析几何复习总表

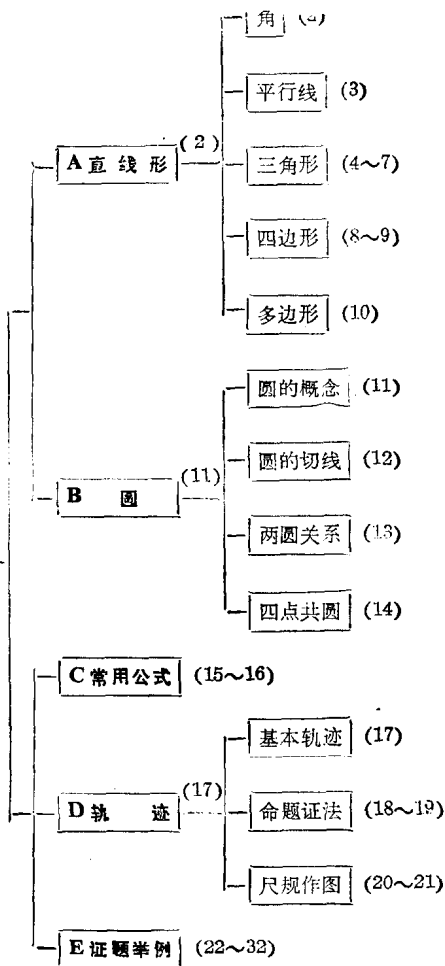
物理复习总表

化学复习总表

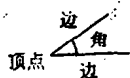
生物复习总表

生理卫生复习总表

平面几何



A. 直线形



定义：从一点引出两条射线所组成的图形



直角



平角



周角



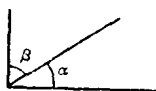
锐角



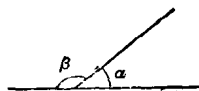
钝角

二角的和为定值：互余和互补

互余 $\alpha + \beta = 90^\circ$

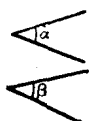


互补 $\alpha + \beta = 180^\circ$

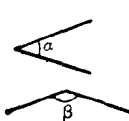


二角的边相互平行或垂直

平 行

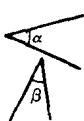


$$\alpha = \beta$$

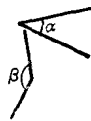


$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

垂 直

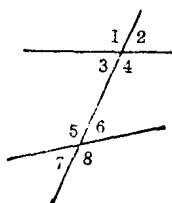


$$\alpha = \beta$$



$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

三线八角



同 位 角 如 $\angle 1, \angle 5$

同 旁 内 角 如 $\angle 4, \angle 6$

同 旁 外 角 如 $\angle 2, \angle 8$

内 错 角 如 $\angle 3, \angle 6$

外 错 角 如 $\angle 1, \angle 8$

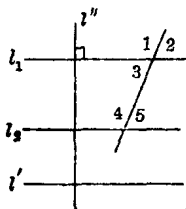
对 顶 角 如 $\angle 1, \angle 4$

平 行 线



定义：在同一平面内，两条不相交的直线

判定定理和性质定理



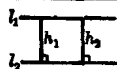
$\angle 1 = \angle 4$
 或 $\angle 3 = \angle 5$
 或 $\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$

$\left. \begin{array}{l} \text{判定定理} \\ \text{性质定理} \end{array} \right\} l_1 \parallel l_2$

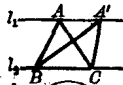
$\left. \begin{array}{l} l_1 \parallel l', l_2 \parallel l' \\ \text{或 } l_1 \perp l', l_2 \perp l' \end{array} \right\} \Rightarrow l_1 \parallel l_2$

常用性质

1. 平行线之间的距离处处相等

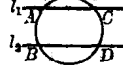


2. 构成等积三角形

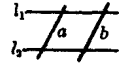


$l_1 \parallel l_2 \Rightarrow \begin{cases} h_1 = h_2 \\ S_{\triangle ABC} = S_{\triangle A'B'C'} \\ \widehat{AB} = \widehat{CD} \end{cases}$

3. 两平行线间所夹弧相等

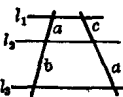


4. 夹在平行线间的平行线段相等



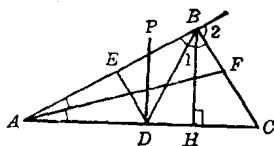
$\left. \begin{array}{l} l_1 \parallel l_2 \\ a \parallel b \end{array} \right\} \Rightarrow a = b$

5. 两直线被三平行线截得的线段对应成比例



$l_1 \parallel l_2 \parallel l_3 \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

三 角 形



$AD = DC$, $AE = BE$

$BH \perp AC$, $\angle BAF = \angle FAC$

内角: 如 $\angle 1$, 外角: 如 $\angle 2$

内角平分线: 如 AF

高: 如 BH , 中线: 如 BD

中位线如 ED , 中垂线如 PD

类型



锐角 $\triangle$



直角 $\triangle$



钝角 $\triangle$



等腰 $\triangle$



等边 $\triangle$

内角、外角平分线和中位线

1. 三内角之和等于 180°

2. $\angle CBF = \angle A + \angle ACB$

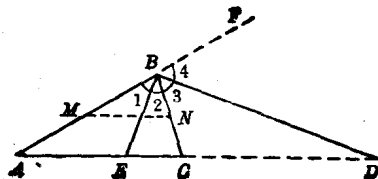
3. 设 M, N 为 AB, BC 中点, 则 $MN \parallel AC$, $MN = \frac{1}{2}AC$

4. $\angle ACB \geq \angle A \iff AB \geq BC$

5. 设 BE 是内角

$\angle ABC$ 的平分线, BD 是外角平分线, 则

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DC}$$



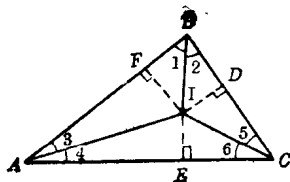
四 心

1. 内心

$\triangle$ 的三条内角平分线交于一点 I ，它是内切圆圆心； I 到三边的距离相等，它一定在形内。

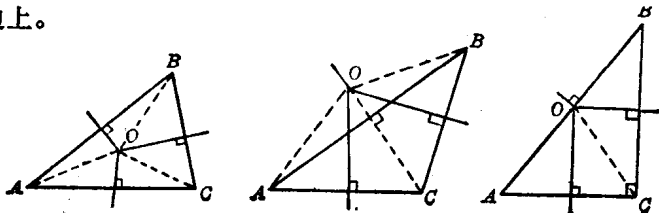
$$\angle 1 = \angle 2, \angle 3 = \angle 4, \angle 5 = \angle 6$$

$$ID = IE = IF$$



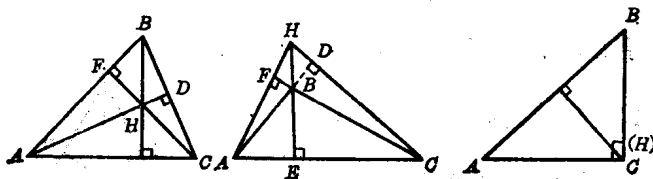
2. 外心

$\triangle$ 三边的中垂线交于一点 O ，它是外接圆圆心，到三顶点等距 ($AO = BO = CO$)，它可能在形内也可能在形外，或在一条边上。



3. 垂心

$\triangle$ 的三条高交于一点 H ，它可能在形内，也可能在形外，或一顶点上，利用它，可证明四点共圆及成比例线段等问题。

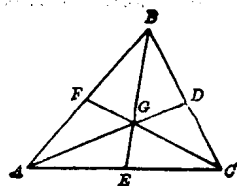


4. 重心

$\triangle$ 的三条中线交于一点 G ，它分每一中线成 $1:2$ 之比，它一定在形内。

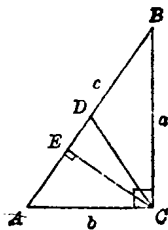
$$AG = 2GD, BG = 2GE$$

$$CG = 2GF$$



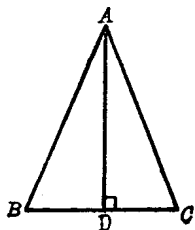
直角三角形的边角关系

1. 勾股定理 $c^2 = a^2 + b^2$ 。
2. 若 $\angle B = 30^\circ$, 则 $b = \frac{1}{2}c$ 。
3. 若 D 为 AB 的中点, 则
 $AD = BD = CD$ 。
4. 作 $CE \perp AB$, 则
 $EC^2 = AE \cdot EB$,
 $AC^2 = AE \cdot AB$,
 $BC^2 = BE \cdot AB$ 。



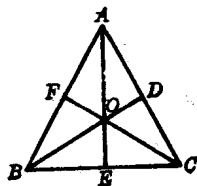
等腰三角形性质

1. $\angle B = \angle C$ 。
2. 三线(底边上高, 中线, 顶角平分线)合一。
3. “四心”共线(在对称轴上)。

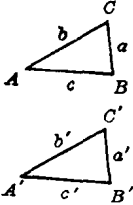
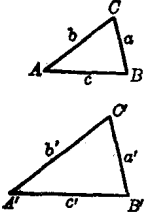


等边三角形性质

1. $\angle A = \angle B = \angle C = 60^\circ$ 。
2. “四心”重合即中心 O 。



两个三角形的关系

	判 定	性 质
全等 	1. S, A, S 2. S, S, S 3. A, S, A 4. A, A, S 其中 A 表示角, S 表示边	1. 对应角相等, 如 $\angle A = \angle A'$ 2. 一切对应线段(边、中线、高、角平分线)相等, 如 $a = a'$
相似: 	1. $\angle A = \angle A'$ 且 $b:c = b':c'$ 2. $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ 3. $\angle A = \angle A'$ 且 $\angle B = \angle B'$ 注: 对于两 $Rt\triangle$ 已有直角对应相等, 余仿此	1. 对应角相等 2. 对应线段成比例 3. $\frac{a+b+c}{a'+b'+c'} = K$ 4. $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}} = K^2$ (K 为相似系数)

例: 如图, 已知: $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AE}$.

求证: $\angle ABD = \angle ACE$.

证明: 由 $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE} = \frac{AC}{AE} \Rightarrow$

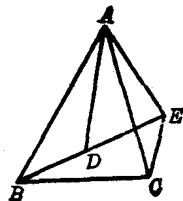
$\triangle ABC \sim \triangle ADE \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \angle BAC = \angle DAE \\ \angle DAC = \angle DAC \end{array} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BAD = \angle CAE$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AD}{AE}$$

$\Rightarrow \triangle ABD \sim \triangle ACE$

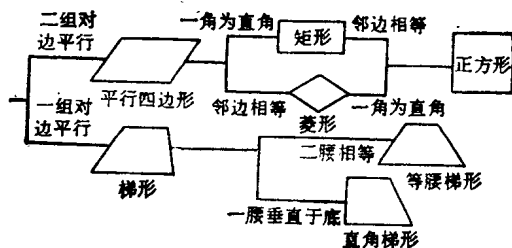
$\Rightarrow \angle ABD = \angle ACE$



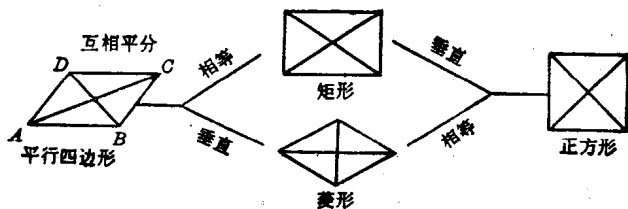
四 边 形



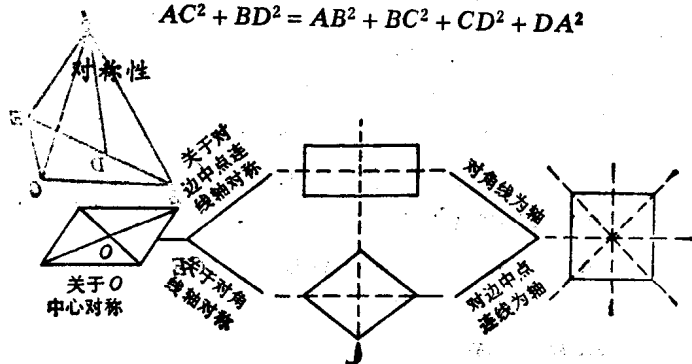
分类



对角线



$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2$$

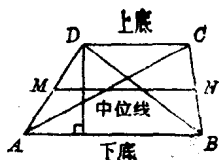


梯形性质

$$1. \text{ 中位线 } MN = \frac{1}{2}(AB + CD),$$

$$MN \parallel AB$$

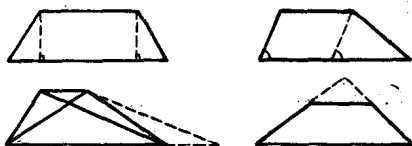
$$2. \text{ 对角线 } AC, BD \text{ 中点连线平行于 } AB, \text{ 且等于 } \frac{1}{2}(AB - CD)$$



$$3. \text{ 如 } AD = BC, \text{ 则 } AC = BD, \text{ 且}$$

$$A, B, C, D \text{ 四点共圆}$$

常见的添辅助线方法

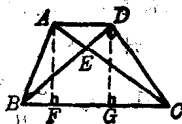


例：如图，已知梯形 $ABCD$ 中 $AD \parallel BC$ 。

对角线 AC, BD 相交于 E ，若 $BD \perp CD$ ，

$BD = CD, AC = BC$ 。求证： $AB = BE$ 。

证明：作 $AF \perp BC$ ， $DG \perp BC$ ，垂足为 F, G ，

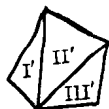


$$\left. \begin{array}{l} AD \parallel BC \\ AF \perp BC \\ DG \perp BC \\ BD \perp CD \\ BD = CD \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} AF = DG \\ DG = \frac{1}{2}BC \\ \Rightarrow AF = \frac{1}{2}AC \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \angle ACB = 30^\circ \\ AC = BC \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} \angle BAC = \angle ABC = 75^\circ \\ \angle DBC = 45^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \angle ABE = 30^\circ \\ \angle BAC = 75^\circ \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \angle AEB = 75^\circ = \angle BAC \Rightarrow AB = BE$$

多 边 形

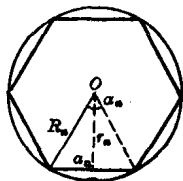


1. 任意一个多边形总可以划分成若干个三角形来处理。
2. 两个边数相同, 对应角分别相等, 对应边成比例的多边形相似。
3. 相似多边形周长的比等于相似比, 面积比等于相似比的平方。

正多边形

性质:

1. 各边相等, 各角相等。
2. 边数相同的正多边形相似。
3. 有一个外接圆和一个内切圆且同心。
4. 可作中心角 α_n 或截取边长为 a_n 来等分圆周得正多边形。



计算公式

$$1. \alpha_n = \frac{360^\circ}{n}$$

$$2. a_n = 2 R_n \sin \frac{180^\circ}{n} = 2 \sqrt{R_n^2 - r_n^2}$$

$$3. r_n = R_n \cos \frac{180^\circ}{n} = \sqrt{R_n^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2}$$

$$4. R_n = \sqrt{r_n^2 + \frac{1}{4} a_n^2}$$

$$5. P_{\text{周长}} = n a_n$$

$$6. S_{\text{面积}} = \frac{1}{2} P r_n$$

(α_n 为中心角, a_n 为边长。
 r_n 为边心距, R_n 为半径。)

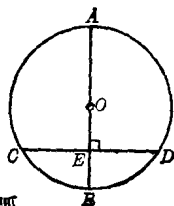
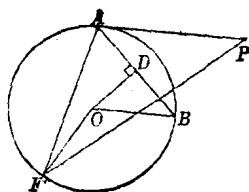
B. 圆

圆的概念

O : 圆心; OB : 半径; AB : 弦;
 OD : 弦心距; AP : 切线;
 PF : 割线; $\angle BOF$: 圆心角;
 $\angle BAF$: 圆周角; $\angle PAB$: 弦切角。

垂径定理

由直径 $AB \perp CD$
 垂足为 E

$$\Rightarrow \begin{cases} CE = DE \\ \widehat{BC} = \widehat{BD} \\ \widehat{AC} = \widehat{AD} \end{cases}$$


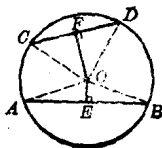
若一直线具有下列五个性质中的二个,
 则可推得其余三个:

1. 过圆心,
2. 平分弦,
3. 垂直弦,
4. 平分弦所对的劣弧,
5. 平分弦所对的优弧。

圆心角、弧、弦、弦心距关系

$$1. \angle AOB = \angle COD \iff \begin{cases} AB = CD \text{ 或 } \widehat{AB} = \widehat{CD} \\ \text{或 } OE = OF \end{cases}$$

$$2. \angle AOB > \angle COD \iff \begin{cases} AB > CD \\ \text{或 } \widehat{AB} > \widehat{CD} \\ \text{或 } OE < OF \end{cases}$$



$$3. AB \parallel CD \iff \widehat{AC} = \widehat{BD}$$

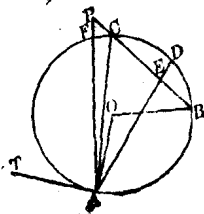
圆中角与弧的度量

圆心角 $\angle AOB \stackrel{m}{=} \widehat{AB}$, 圆周角 $\angle ACB \stackrel{m}{=} \frac{1}{2} \widehat{AB}$,

圆内角 $\angle AEB \stackrel{m}{=} \frac{1}{2} (\widehat{AB} + \widehat{CD})$,

圆外角 $\angle APB \stackrel{m}{=} \frac{1}{2} (\widehat{AB} - \widehat{FC})$,

弦切角 $\angle TAC \stackrel{m}{=} \frac{1}{2} \widehat{AFC}$.



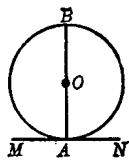
圆的切线

判定

OA 是 $\odot O$ 半径
 $MN \perp OA$ 且 MN 过 A } $\Rightarrow MN$ 是 $\odot O$ 的切线

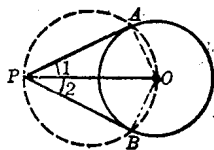
性质

1. MN 切 $\odot O$ 于 $A \Rightarrow MN \perp OA$
2. MN 切 $\odot O$ 于 A 且 $AB \perp MN \Rightarrow AB$ 过 O
3. MN 切 $\odot O$ 于 A 且 $BA \perp MN \Rightarrow BO$ 过 A

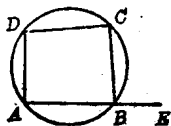


切线长定理

过 P 作 $\odot O$ 的
 两条切线 } $\Rightarrow \begin{cases} PA = PB \\ \angle 1 = \angle 2 \end{cases}$
 A, B 为切点

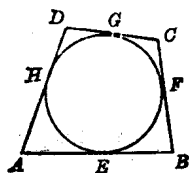


圆内接、外切四边形



$$\angle A + \angle C = 180^\circ$$

$$\angle EBC = \angle D$$



$$AB + CD = AD + BC$$

$$AE = AH, BE = BF$$

$$CF = CG, DG = DH$$

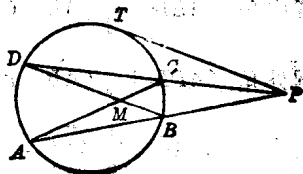
圆幂定理

$$1. AM \cdot MC = BM \cdot MD$$

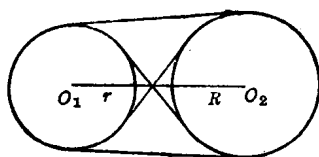
(相交弦定理)

$$2. PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

$$= PT^2 \text{ (切割线定理)}$$

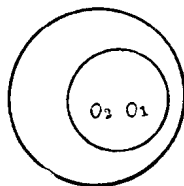


两圆的位置关系



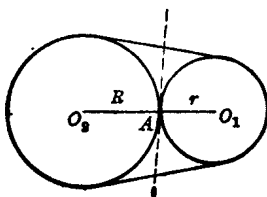
外离

1. $O_1O_2 > R + r$
2. 连心线过公切线交点
3. 外(或内)公切线等长



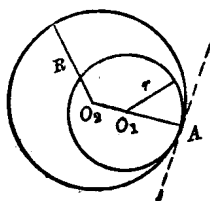
内含

$$O_1O_2 < R - r$$



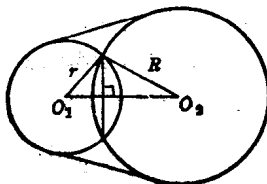
外切

1. $O_1O_2 = R + r$
2. 连心线过切点 A
3. 过切点 A 可作一公切线



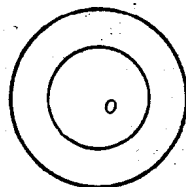
内切

1. $O_1O_2 = R - r$
2. 连心线过切点 A
3. 过切点 A 可作一公切线



相交

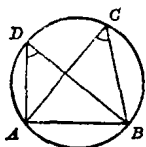
1. $R - r < O_1O_2 < R + r$
2. 连心线垂直平分公共弦
3. 公切线等长



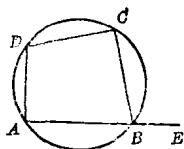
同心

圆心距为零

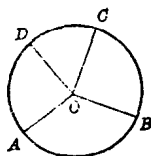
四点共圆



若 $\angle ACB = \angle ADB$
则 A, B, C, D 共圆

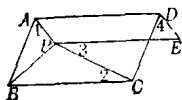


若 $\angle A + \angle C = 180^\circ$ 或
 $\angle EBC = \angle D$
则 A, B, C, D 共圆



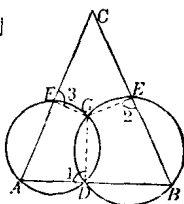
若 $OA = OB = OC = OD$
则 A, B, C, D 共圆

例



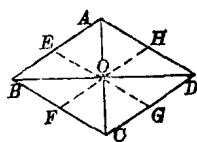
已知: P 是 $\square ABCD$
内一点, 使 $AP \parallel DE$,
 $PE \parallel BC$, $\angle 1 = \angle 2$
求证: P, C, D, E 共圆
证: $\because PE \parallel BC$
 $\therefore \angle 3 = \angle 2$,
又 $\because AB \parallel CD$,
 $AP \parallel DE$, $\therefore \angle 1 = \angle 4$
题设 $\angle 1 = \angle 2$
 $\therefore \angle 3 = \angle 4$
 $\therefore P, C, D, E$ 四点共圆

例



已知: D, E, F 为
 $\triangle ABC$ 边上的任意点
过 A, D, F 和 B, E, D
分别作圆相交于 G
求证: C, E, G, F 共圆
证: 连 GD, GE, GF
由于 A, D, G, F 共圆
 $\therefore \angle 3 = \angle 1$
又 G, D, B, E 共圆
 $\therefore \angle 1 = \angle 2$
 $\therefore \angle 2 = \angle 3$
 $\therefore C, E, G, F$ 四点共圆

例



已知: E, F, G, H 分别为
菱形 $ABCD$ 各边中点
求证: E, F, G, H 共圆
证: 连 AC, BD 相交于 O
连 OE, OF, OG, OH , 由
于 $ABCD$ 为菱形
 $\therefore AC \perp BD$
又 $\because E$ 为 AB 中点
 $\therefore OE = \frac{1}{2} AB$
同理 $OH = \frac{1}{2} AD$
 $OG = \frac{1}{2} CD, OF = \frac{1}{2} BC$
 $\therefore AB = BC = CD = DA$
 $\therefore OE = OF = OG = OH$
 $\therefore E, F, G, H$ 四点共圆