

变梁常数的表 通用計标表

1962.11.查

蔡方蔭編

科学出版社

86.21074

內 容 簡 介

本書所列的變梁常數表，係根據宋啓根同志所建議的 I_0/l 餘圖法及近似方法所算得的一套 K 值表。採用此項 K 值，即可用簡單計算求得表示變梁常數的角變係數，所得結果比精確值的差誤一般不超過 1%。此項 K 值表可通用於任何截面和任何形式的加腋梁或減腋梁，不像現有的任何變梁常數表只可用於矩形截面的某幾種形式的加腋梁。這一套 K 值表雖只包括四種基本荷載，但其他直線的分佈荷載的各項 K 值都不難由這四種基本荷載的推導而得。故這一套 K 值表不但比現有任何變梁常數表計算得較為詳細，而且它們的應用範圍更為廣泛。本書可供結構設計工程師的採用和高等院校結構專業教學及研究的參考。

編 者 蔡 方 蔭

出版者 科 學 出 版 社

北京朝陽門大街 117 號

北京市書刊出版業營業許可證出字第 061 號

印刷者 中 國 科 學 院 印 刷 廠

總經售 新 華 書 店

1958 年 10 月 第 一 版

書號：1412 印張：4 1/2

1958 年 10 月 第 一 次 印 刷

開本：787×1092 1/16

(京) 0001—2,650

字數：75,000

定價：(10) 0.75 元

序

現在我們所有的變梁常數表¹⁾都只限於矩形截面的加腋梁,而加腋又只限於直線、拋物綫和銳曲綫三種形式,以及只一端或兩端對稱的。只有一種表²⁾包括兩端加腋的長短和大小都不同的變梁,但兩端加腋仍限於同是直綫或拋物綫兩種形式。至於荷載情況,一般只限變梁任一截面有單一集中荷載和變梁全長有勻佈荷載;只有一種表³⁾包括變梁全長有三角形的勻增分佈荷載。所以現在我們所有變梁常數表的應用範圍有種種的局限性。

本書所列出的一套變梁常數表係根據宋啓根同志⁴⁾所建議的 I_0/I 餘圖法及近似方法而算出,其目的即在彌補現有變梁常數表的上述種種局限性的缺點。

本表係以變梁兩端簡支時兩端的角變常數的係數(簡稱為“角變係數”)為變梁常數,因為這種角變常數或其係數是變梁的基本常數,分析變截面剛構時所需的任何他種變梁常數均極易由這種角變係數換算而得,其優點編者前此已說明了⁵⁾。

這一套變梁常數表共計 14 個表,包括計算任何變梁的形角變係數及載角變係數所需的各項 K 值。無論變梁的截面為任何形狀及其一端或兩端的梁腋為任何形式、大小或長短均可採用。不但可用於一端或兩端加腋的變梁,並可用於一端或兩端減腋的變梁(即梁的截面中間大而一端或兩端小的變梁)。

載角變係數包括四種基本荷載:即(I)變梁的任一截面有單一集中荷載;(II)變梁的任一端有一段勻佈荷載;(III)變梁的任一端有一段勻增荷載;及(IV)變梁的任一截面有一力矩荷載。由這四種基本荷載的各項 K 值任何直線分佈荷載的各項 K 值均不難推導而得⁶⁾。這一套計算變梁角變係數的 K 值表頗為詳細。當表示加腋長度的 a 或 b 值小於 0.5 時,其值係每隔 0.05 列出;當 a 或 b 大於 0.5 時,其值則每隔 0.10 列出。表示荷載位置或長度的 k 值則一律每隔 0.05 列出。現有的任何變梁常數表尙未有這樣詳細的。因此,這一套常數表實係現下應用範圍最廣而又最詳細的“通用”表。

I_0/I 餘圖法的主要特點,是將變梁的角變係數先分開為等截面梁及兩端梁腋(加腋

1) 蔡方蔭,變截面剛構分析,第二次印刷本,上海科學技術出版社出版,附錄 I, II 及 III。

2) 同 1), 附錄 III。

3) 同 1), 附錄 II。

4) “用 I_0/I 餘圖法簡化變梁常數的計算”,土木工程學報,第 3 卷第 3 期,科學出版社 1956 年出版,303—344 頁。

5) 同 1), 4 頁。

6) 同 1), 表 (2-2), 46—48 頁。

或減腋)的三部分計算,而後疊加以求得變梁的角變係數。所以這一套表所列出的數字並不是變梁的角變係數,都只是計算梁腋的角變係數的各項 K 值。求變梁的角變係數時尚需經過一個極簡單的計算(簡單的乘法和加減法),故這一套表名為“計算表”。

當宋啓根同志和編者的論文¹⁾刊出時,編者的一位朋友認為這個計算方法還是有許多周折,不如現有的變梁常數表可以直接檢得變梁常數。這位朋友顯然忘記了現有變梁常數表的局限性和不了解這一套表的通用性,實乃不折不扣的片面看問題。古人云:“兩害相權取其輕,兩利相權取其重”。“簡單計算”的害當然比“局限性”的害輕,而“通用性”的利也當然比“不需計算”的利重。因此,這一套 K 值表比現有常數表的優越性是顯而易見,而且是無容爭辯的。

這一套 K 值表雖係用近似方法算得,但其近似程度甚高,與精確方法比較的差誤一般不超過百分之一,故在實用上毫無問題。這一套 K 值表的計算遠較現有任何常數表為簡單,因此才能包括幾種現有表迄未包括的荷載,而且計算得還更詳細。若是任何現有表要包括這幾種荷載而又要算得同樣地詳細,所需計算工作的繁重是難以估計的。因為這一套 K 值表的計算比較簡單,讀者不難採用同一計算方法來校核這一套表中的任何 K 值,這一優點也是現有任何常數表所沒有的。

這本書第一部的說明是由宋同志和編者的論文²⁾改寫而成。“緒論”和“形角變常數”兩節絲毫未改,等於轉載,而“載角變係數”一節幾乎完全重寫了。在這一節中,不但計算載角變係數的公式大大地減少了,並且舉出例子來說明由四種基本荷載的各項 K 值推導他種荷載的各項 K 值的方法。

在宋同志和編者的論文³⁾中,編者曾算出一小部分計算梁腋角變係數的 K 值表。這一套 K 值表是編者那一小部分表的擴充,以滿足實際工作中應用的需要。所有計算都是建築工程部的建築科學研究院幾位同人在編者指導下完成的。陳伏、李雪岩二同志和吳興岐在陳府群同志主持下基本上担負全部計算,而庾洪明、李增芳和楊肇平三同志也不時協助,本書的校對工作由張維嶽同志担任,編者均藉此表示感謝。

這一套 K 值表的計算工作,仍是相當周折而且繁重的。雖然每一個 K 值都經過了覆算校核,但訛誤之處恐仍難免,讀者如發現任何 K 值有訛誤或有疑問時,望不吝隨時指正,編者當不勝感幸!

蔡 方 隆

(1957年6月18日於北京建築工程部的建築科學研究院)

1) “用 I_0/I 餘圖法簡化變梁常數的計算”,土木工程學報,第3卷第3期,科學出版社1956年出版,303—344頁。

2) 同1)。

3) 同1)。

目 錄

序.....	i
第一部 本計算表的說明	
甲. I_0/I 餘圖法.....	1
一. 緒論	1
二. 形角變係數	4
三. 載角變係數	7
四. 利用現有加腋梁常數表以計算不對稱的兩端加腋梁的常數	17
五. I_0/I 餘圖法與 I_0/I 圖法之關係	21
乙. 變梁常數通用表的計算及應用	22
一. I_0/I 餘圖的各項積分 F 之近似值	22
二. 變梁有突變處的處理	24
三. 變梁角變係數的通用計算表	25
四. 應用舉例	30
參考文獻.....	38
第二部 計算表	
表 1. 計算變梁某端由於任一端梁腋的形角變係數 ϕ_a^* , ϕ_b^* 及 ϕ_{ab}^* (或 ϕ_b^* , ϕ_a^* 及 ϕ_{ba}^*) 時所用 K_0 , K_3 及 K_7 值表.....	40
表 2. 等截面梁載角變係數 $\bar{\phi}_a^*$ 及 $\bar{\phi}_b^*$ 值表(包括四種基本荷載).....	41
表 3-a. (I) 單一集中荷載 計算變梁某端由於同一端梁腋的載角變係數 ϕ_a^* (或 ϕ_b^*) 時所用 K_0 , K_3 及 K_7 值表	42
表 3-b. (I) 單一集中荷載 計算變梁某端由於另一端梁腋的載角變係數 ϕ_b^* (或 ϕ_a^*) 時所用 K_0 , K_3 及 K_7 值表	44
表 4-a. (II) 自梁腋的同一端起有一段勻佈荷載 計算變梁某端由於同一端梁腋的載角變係數 ϕ_a^* (或 ϕ_b^*) 時所用 K_0 , K_3 及 K_7 值表	46
表 4-b. (II) 自梁腋的同一端起有一段勻佈荷載 計算變梁某端由於另一端梁腋的載角變係數 ϕ_b^* (或 ϕ_a^*) 時所用 K_0 , K_3 及 K_7 值表	48
表 5-a. (II-A) 自梁腋的另一端起有一段勻佈荷載 計算變梁某端由於同一端梁腋的載角變係數 ϕ_a^* (或 ϕ_b^*) 時所用 K_0 , K_3 及 K_7 值表	50

表 5-b.	(II-A) 自梁腋的另一端起有一段勻佈荷載 計算變梁某端由於另一端梁腋的載角變係數 ϕ_a^* (或 ϕ_b^*) 時所用 K_0 , K_3 及 K_7 值表	52
表 6-a.	(III) 自梁腋的同一起端有一段勻增荷載 計算變梁某端由於同一端梁腋的載角變係數 ϕ_a^* (或 ϕ_b^*) 時所用 K_0 , K_3 及 K_7 值表	54
表 6-b.	(III) 自梁腋的同一起端有一段勻增荷載 計算變梁某端由於另一端梁腋的載角變係數 ϕ_a^* (或 ϕ_b^*) 時所用 K_0 , K_3 及 K_7 值表	56
表 7-a.	(III-A) 自梁腋的另一端起有一段勻增荷載 計算變梁某端由於同一端梁腋的載角變係數 ϕ_a^* (或 ϕ_b^*) 時所用 K_0 , K_3 及 K_7 值表	58
表 7-b.	(III-A) 自梁腋的另一端起有一段勻增荷載 計算變梁某端由於另一端梁腋的載角變係數 ϕ_a^* (或 ϕ_b^*) 時所用 K_0 , K_3 及 K_7 值表	60
表 8-a.	(IV) 單一力矩荷載 計算變梁某端由於同一端梁腋的載角變係數 ϕ_a^* (或 ϕ_b^*) 時所用 K_0 , K_3 及 K_7 值表	62
表 8-b.	(IV) 單一力矩荷載 計算變梁某端由於另一端梁腋的載角變係數 ϕ_a^* (或 ϕ_b^*) 時所用 K_0 , K_3 及 K_7 值表	64

第一部 本計算表的說明

甲. I_0/I 餘圖法

一. 緒 論

變梁常數的計算是相當繁冗的，過去若干著者或書刊^[1-15] 曾努力使它簡化。編者曾於 1947 年發表 I_0/I 圖矩面積法（以下簡稱 I_0/I 圖法）^[9-11]，使圖 1(a) 中任一變梁的三個形角變常數 α_a 、 α_b 與 β [見圖 1(b) 與 (c)] 及兩個載角變常數 α_a° 與 α_b° [見圖 1(d)] 都可用變梁的 I_0/I 圖的各次矩圖面積來計算，不像撓矩面積法或其他方法，必須為每一種荷載作一 M/EI 或 M/I 圖 (M 與 I 分別為變梁任一截面的撓矩與截面慣矩， E 為材料的彈性模量) 來計算它的各項角變常數。因此 I_0/I 圖法將變梁常數的繁冗計算簡化為各項面積的簡單計算，並且很容易得到精確的結果。 I_0/I 餘圖 (complementary I_0/I -diagram) 法，係宋啓根同志所建議，使編者所建議的 I_0/I 圖法得到進一步的改善。

在敘述 I_0/I 餘圖法以前，須先簡要地說明：(一) I_0/I 圖法中的各次矩圖面積；(二) I_0/I 餘圖的各次矩圖面積及 (三) 各項角變常數的係數的意義如下：

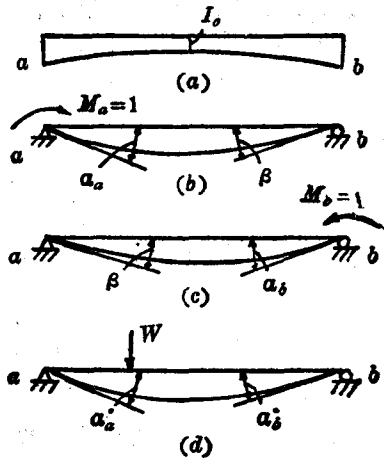


圖 1.

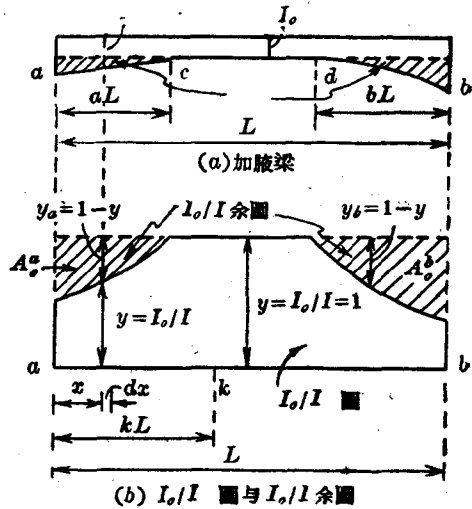


圖 2.

(一) I_0/I 圖的各次矩圖面積 圖 2(a) 示一根最普通的兩端加腋的變梁。它的

任一截面慣矩為 I ；它的左右兩端的加腋長度分別為 aL 與 bL 。若以梁中段等截面梁的慣矩 I_0 為計算的標準，用各截面的慣矩 I 去除 I_0 ，即得這根變梁的 I_0/I 圖如圖 2(b) 的實線部分，它的任一截面的豎距 y 之值顯然為

$$y = \frac{I_0}{I}. \quad (1)$$

由圖 2(b) 可知：就物理意義來說，下列各項積分值就是 I_0/I 圖對於梁左端 a （即 $x = 0$ 之端）的 $0, 1, 2, \dots$ 各次矩圖的面積 $A_0^{(1)}, A_1, A_2, \dots$ 等，即

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \int_0^L y \, dx, \\ A_1 &= \int_0^L (yx) \, dx, \\ A_2 &= \int_0^L (yx^2) \, dx, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

於上列各式中， $y, yx, yx^2, \dots$ 等分別為 $0, 1, 2, \dots$ 等各次矩圖中任一截面的豎距。 I_0/I 圖法的優點主要是在用 $A_0, A_1, A_2, \dots$ 等各項面積和它們的一部分面積來計算任一變梁的各項角變常數。

(二) I_0/I 餘圖的各次矩圖面積 於圖 2(b) 中，這變梁的 I_0/I 圖可視作等截面梁（梁全長的各截面慣矩均為 I_0 ）的矩形 I_0/I 圖（豎距 $y = 1$ ）減去左右 a 與 b 兩端梁腋的 I_0/I 餘圖 A_0^a 與 A_0^b 。它們的任一截面的豎距分別為

$$y_a = 1 - y, \quad y_b = 1 - y. \quad (3)$$

故任一變梁的 I_0/I 餘圖就是等截面梁的 $I_0/I = 1$ 圖減去這變梁的 I_0/I 圖以後所剩餘的兩端梁腋的 I_0/I 圖。因此，上列式 (2) 中在一變梁的 I_0/I 圖的各次矩圖面積 $A_0, A_1, A_2, \dots$ 等，都可由它的兩端梁腋的 I_0/I 餘圖的各次矩圖面積 $A_0^a, A_1^a, A_2^a, \dots$ 及 $A_0^b, A_1^b, A_2^b, \dots$ 等來計算，即

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \int_0^L y \, dx = \int_0^L dx - \int_0^{aL} y_a \, dx - \int_{(1-b)L}^L y_b \, dx = L - A_0^a - A_0^b, \\ A_1 &= \int_0^L (yx) \, dx = \int_0^L x \, dx - \int_0^{aL} (y_a x) \, dx - \int_{(1-b)L}^L (y_b x) \, dx = \frac{L^2}{2} - A_1^a - A_1^b, \\ A_2 &= \int_0^L (yx^2) \, dx = \int_0^L x^2 \, dx - \int_0^{aL} (y_a x^2) \, dx - \int_{(1-b)L}^L (y_b x^2) \, dx = \frac{L^3}{3} - A_2^a - A_2^b, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

顯然，上式中 $L, L^2/2, L^3/3, \dots$ 等分別是等截面梁 $I_0/I = 1$ 圖的各次矩圖面積 $A_0, A_1, A_2, \dots$ 等之值。當然，任一變梁的 I_0/I 圖的各次矩圖的部分面積也可仿照上列式 (4) 由它兩端梁腋的 I_0/I 餘圖來計算。

1) 於 [12] 中， A_0 寫作 A 。

(三) 用 I_0/I 餘圖計算變梁的各項角變係數 變梁的各項角變常數既可用它的 I_0/I 圖的各次矩圖面積來計算; 根據上列的式 (4), 後者又可由它的兩端梁腋的 I_0/I 餘圖的各次矩圖面積來計算; 故下列計算變梁角變常數的公式至為顯然:

$$\text{變梁的角變常數} = \text{等截面梁的角變常數} - \text{兩端梁腋的角變常數}. \quad (5)$$

前此史氏 (A. Strassner) (見 [1], 86—90 頁) 及編者 (見 [12], 141—144 頁) 所得計算加腋梁角變常數的公式, 都顯出了上式所示的關係, 但未明確指出, 更未列出根據式 (5) 的計算方法。

我們計算的變梁角變常數無論是形角變或載角變, 只要計算它們的係數, 簡稱為“角變係數”。此項角變係數可用 ϕ 來表示, 就是當變梁跨長 L , 用作計算標準的截面慣矩 I_0 , 材料的彈性模量 E , 以及所受荷載的數量或密度都是單位 1 時的角變常數。根據式 (5) 可寫出下列的總公式:

$$\phi = \bar{\phi} - \phi^a - \phi^b. \quad (6)$$

於上式中, $\bar{\phi}$ 為等截面梁 (截面慣矩為 I_0) 的角變係數, 其值可用 $y=1$ 的 I_0/I 圖求得; ϕ^a 與 ϕ^b 分別為左右兩端梁腋的角變係數, 其值可由各該端的 I_0/I 餘圖計算。

上式 (6) 亦可用於圖 3(a) 所示的“減腋梁”, 但如圖 3(b) 所示, 減腋梁兩端梁腋處的 $y = I_0/I$ 大於 1, 則根據式 (3), 兩端梁腋的 I_0/I 餘圖的豎距 y_a 與 y_b 均為負號。因此, ϕ^a 與 ϕ^b 的值也都是負號。若變梁的左端 a 或右端 b 並無加減腋, 則該端梁腋的角變係數 ϕ^a 或 ϕ^b 當然為零。

任何形式的變梁, 都可視作系一端或兩端加腋或減腋的梁。無論梁的截面為矩形、T 字形、I 字形或綴合式, 其截面慣矩 I 均可算得。故 I_0/I 餘圖法的應用, 與 I_0/I 圖法的相同, 並不受任何限制, 但與 I_0/I 圖法比較, 顯然具有下列幾項主要優點。

(1) 等截面梁的角變係數 $\bar{\phi}$ 常系已知或極易算得。任一變梁兩端梁腋的角變係數 ϕ^a 與 ϕ^b 可由 I_0/I 餘圖算得, 比 I_0/I 圖法須由變梁全長的 I_0/I 圖計算, 顯然要簡單些, 而在只一端有梁腋或兩端梁腋較短的變梁, 則更為簡單。但於截面慣矩 I 只有突變而無漸變的簡單變梁如階形梁, 則 I_0/I 餘圖法並不比 I_0/I 圖法為簡單。

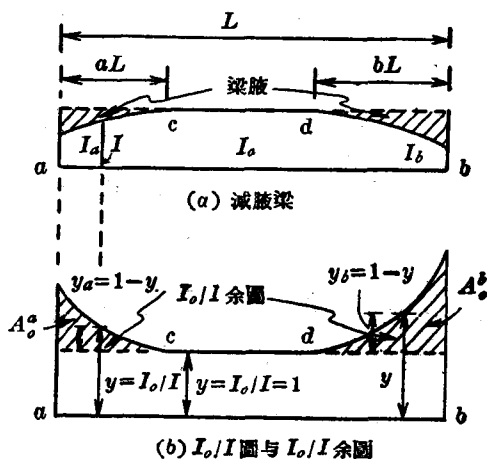


圖 3.

(2) 若矩形截面變梁的加腋為某一標準形式(直綫、拋物綫或銳曲綫),但兩端的梁腋的形式或長度並不相同,可採用總公式(6),並利用現有變梁常數表格(例如[12],附錄 I, II 及 III 的表格)中一端加腋梁的常數以計算它們的常數。

(3) ϕ^a 與 ϕ^b 的值均可用近似程度極高的近似法計算。即用一根三次拋物綫以代替每一端 I_0/I 餘圖的曲綫,再用積分法求得其各次矩圖面積,使 ϕ^a 與 ϕ^b 值的計算更為簡化而且所得近似結果的差誤常不超過1%¹⁾。

(4) 根據上述(3)條的近似法,可將計算形角變係數與載角變係數所需的 ϕ^a 與 ϕ^b 之值算成表格,這一套表格可用於各種不同形式與不同截面的加腋或減腋梁,不像現下的任一變梁常數表格,其應用只限於某一標準形式的矩形截面變梁。

關於以上(3)與(4)兩項優點,以後將在本書第二部分中舉出應用算例詳細說明。

二. 形 角 變 係 數

圖 1(a) 中任一變梁的三個形角變常數 α_a , α_b 及 β [見圖 1(b) 與 (c)] 可用虛功法求得如下:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_a &= \int_0^L \left(\frac{L-x}{L} \right)^2 \frac{dx}{EI} = \frac{1}{EI_0} \int_0^L \frac{I_0}{I} \left(\frac{L-x}{L} \right)^2 dx, \\ \alpha_b &= \int_0^L \left(\frac{x}{L} \right)^2 \frac{dx}{EI} = \frac{1}{EI_0} \int_0^L \frac{I_0}{I} \left(\frac{x}{L} \right)^2 dx, \\ \beta &= \int_0^L \left(\frac{Lx-x^2}{L^2} \right) \frac{dx}{EI} = \frac{1}{EI_0} \int_0^L \frac{I_0}{I} \left(\frac{Lx-x^2}{L^2} \right) dx. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

其中 x 係量自梁的左端 a , 採用式(1)的關係,並命

$$x = uL; \quad dx = Ldu; \quad u' = 1-u; \quad du' = -du. \quad (8)$$

$$\phi_a = \alpha_a \frac{EI_0}{L}; \quad \phi_b = \alpha_b \frac{EI_0}{L}; \quad \phi_{ab} = \beta \frac{EI_0}{L}. \quad (9)$$

注意: 式(9)中所採用的形角變係數 ϕ_a , ϕ_b 及 ϕ_{ab} 與史氏常數表(見[12]的附錄 I)中的係數 ϕ_{a_s} , ϕ_{b_s} 及 ϕ_{β} 各不相同。這兩種係數的關係如下:

$$\phi_a = \frac{1}{3} \phi_{a_s}, \quad \phi_b = \frac{1}{3} \phi_{b_s}, \quad \phi_{ab} = \frac{1}{6} \phi_{\beta}. \quad (10)$$

由式(9)可知,如前已指出,形角變係數,即為變梁的 E , I_0 及 L 都為 1 時的形角變常數。

1) 若圖 3(a) 所示減腋梁兩端的 I_a 或 I_b 比 I_0 為愈小,則此近似法的差誤將愈超過此數。遇有此項情況時,可將圖 7 中三次拋物綫所通過的 3 與 7 兩點酌量移動靠近梁端,或將 I_0/I 餘圖的各項積分 F 值,改用辛氏 (Simpson) 規則計算。

採用式 (1), (7) 及 (8) 的關係, 則式 (9) 可寫成如下:

$$\phi_a = \int_0^1 y(1-u)^2 du, \quad \phi_b = \int_0^1 yu^2 du, \quad \phi_{ab} = \int_0^1 y(1-u)u du. \quad (11)$$

採用變梁兩端梁肢的 I_0/I 餘圖, 並令變梁的跨長 L 為單位 1 如圖 4 所示, 則

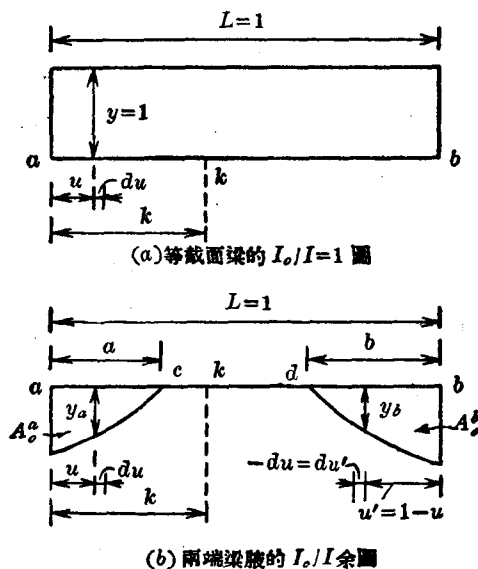


圖 4.

式 (11) 中的第一式可寫成

$$\phi_a = \int_0^1 (1-u)^2 du - \int_0^a y_a(1-u)^2 du - \int_{(1-b)}^1 y_b(1-u)^2 du, \quad (12)$$

其中

$$\int_0^1 (1-u)^2 du = \left[-\frac{(1-u)^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3} = \bar{\phi}_a. \quad (13)$$

如圖 4(b) 所示變梁 a 與 b 兩端梁肢的 I_0/I 餘圖, 令

$$F_{0a} = \int_0^a y_a du, \quad F_{1a} = \int_0^a y_a u du, \quad F_{2a} = \int_0^a y_a u^2 du, \quad (14)$$

$$F_{0b} = \int_0^b y_b du', \quad F_{1b} = \int_0^b y_b u' du', \quad F_{2b} = \int_0^b y_b (u')^2 du'. \quad (15)$$

於上列各式中, F_{0a} , F_{1a} 及 F_{2a} 分別為左端 a 梁肢的 I_0/I 餘圖對於 a 端的 0, 1 及 2 次矩圖面積係數; F_{0b} , F_{1b} 及 F_{2b} 分別為右端 b 梁肢的 I_0/I 餘圖對於 b 端的 0, 1 及 2 次矩圖面積係數。以上二者都簡稱為兩端梁肢 I_0/I 餘圖的各項積分值, 其值可用積分法、辛氏規則或以後所述的近似法求得。於式 (12) 中, 令

$$\phi_a^a = \int_0^a y_a(1-u)^2 du = F_{0a} - 2F_{1a} + F_{2a}, \quad (16)$$

$$\phi_a^b = \int_{1-b}^1 y_b(1-u)^2 du = \int_0^b y_b(u')^2 du' = F_{2b}. \quad (17)$$

以式 (13), (16) 與 (17) 之值代入式 (12) 中, 得

$$\phi_a = \bar{\phi}_a - \phi_a^a - \phi_a^b. \quad (18)$$

採用相同的計算步驟, 式 (11) 中的第二與第三兩式可分別寫成

$$\phi_b = \bar{\phi}_b - \phi_b^a - \phi_b^b, \quad (19)$$

$$\phi_{ab} = \bar{\phi}_{ab} - \phi_{ab}^a - \phi_{ab}^b. \quad (20)$$

其中 $\bar{\phi}_b = 1/3$, 與 $\bar{\phi}_a$ 相同。此外,

$$\bar{\phi}_{ab} = \frac{1}{6}; \quad (21)$$

$$\phi_b^a = F_{2a}; \quad (22)$$

$$\phi_b^b = F_{0b} - 2F_{1b} + F_{2b}; \quad (23)$$

$$\phi_{ab}^a = F_{1a} - F_{2a}; \quad (24)$$

$$\phi_{ab}^b = F_{1b} - F_{2b}. \quad (25)$$

注意: 上得式 (18) 至 (20) 都是前得總公式 (6) 用於計算形角變係數的特殊形式。

由是可知: 任一變梁的三個形角變係數 ϕ_a , ϕ_b 及 ϕ_{ab} 可由它的 a 與 b 兩端梁腋 I_0/I 餘圖的六個積分值 F_{0a} , F_{1a} , F_{2a} , F_{0b} , F_{1b} 及 F_{2b} 計算之。

為便於參考起見, 茲將等截面梁及兩端梁腋的形角變係數 $\bar{\phi}$, ϕ^a 及 ϕ^b 值列成表 A。

表 A. 等截面梁及兩端梁腋的形角變係數 $\bar{\phi}$, ϕ^a 及 ϕ^b 值表

變梁的形角變係數	等截面梁的 $\bar{\phi}$	左端 a 梁腋的 ϕ^a	右端 b 梁腋的 ϕ^b
$\phi_a = \alpha_a \frac{EI_0}{L}$	$\frac{1}{3}$ (13)	$F_{0a} - 2F_{1a} + F_{2a}$ (16)	F_{2b} (17)
$\phi_b = \alpha_b \frac{EI_0}{L}$		F_{2a} (22)	$F_{0b} - 2F_{1b} + F_{2b}$ (23)
$\phi_{ab} = \beta \frac{EI_0}{L}$	$\frac{1}{6}$ (21)	$F_{1a} - F_{2a}$ (24)	$F_{1b} - F_{2b}$ (25)

三. 載角變係數

在各種荷載情況下, 變梁的兩個載角變係數 ϕ_a 與 ϕ_b 的公式可依照總公式 (6) 寫出如下:

$$\phi_{(a^*+b^*)} = \bar{\phi}_{(a^*+b^*)} - \phi_{(a^*+b^*)}^a - \phi_{(a^*+b^*)}^b, \quad (26)$$

$$\phi_{b^*} = \bar{\phi}_{b^*} - \phi_{b^*}^a - \phi_{b^*}^b. \quad (27)$$

於任一荷載情況下, 只須分別求得式 (26) 與 (27) 中 $\bar{\phi}$, ϕ^a 及 ϕ^b 的兩項值, 即可求得載角變係數 $\phi_{(a^*+b^*)}$ 及 ϕ_{b^*} 兩項值。以下採用虛功法求 $\bar{\phi}$, ϕ^a 及 ϕ^b 的兩項值時, 仍分別根據等截面梁 $I_0/I = 1$ 圖及兩端梁腋的 I_0/I 餘圖。所考慮的荷載以四種基本荷載為限, 即 (I) 任一截面有一單一集中荷載; (II) 左端 a 有一段勻佈荷載; (III) 左端 a 有一段勻增荷載 (左端 a 的荷載為零); 及 (IV) 任一截面有一單一力矩荷載。其他直線的分佈荷載的 $\bar{\phi}$, ϕ^a 及 ϕ^b 值, 可用相同方法求得, 或由此四種基本荷載的推導而得¹⁾。

因為在任何荷載情況下, 如公式 (26) 與 (27) 所示, 由於左端 a 梁腋的 $\phi_{(a^*+b^*)}^a$ 與 $\phi_{b^*}^a$ 二值可與由於右端 b 梁腋的 $\phi_{(a^*+b^*)}^b$ 與 $\phi_{b^*}^b$ 二值分開計算, 為精簡起見, 以下在各種荷載情況下, 只求出由於左端 a 梁腋的 $\phi_{(a^*+b^*)}^a$ 與 $\phi_{b^*}^a$ 的計算公式; 其由於右端 b 梁腋的 $\phi_{(a^*+b^*)}^b$ 與 $\phi_{b^*}^b$ 二值, 可將變梁及其荷載圖左右位置轉換 (即相當於將表示左右兩端的 a 與 b 兩字互換) 後, 或採用其他折算方法後, 仍用計算 $\phi_{(a^*+b^*)}^a$ 與 $\phi_{b^*}^a$ 的公式計算之。

(I) 變梁任一截面有一集中荷載 圖 5(a) 示只左端 a 有梁腋的變梁, 其任一截面 k (距梁左端 a 的距離為 kL) 有一集中荷載 W 。用虛功法得計算其兩端載角變常數 $\alpha_a^* + \alpha_b^*$ 與 α_b^* 的兩個公式如下:

$$\alpha_a^* + \alpha_b^* = \frac{1}{EI_0} \int M_x y dx, \quad (28)$$

$$\alpha_b^* = \frac{1}{EI_0 L} \int M_x y x dx. \quad (29)$$

如圖 5(b) 所示, 令變梁跨長 $L = 1$, 則式 (28) 與 (29) 中之 x 與 dx 分別變為 u 與 du 。採用撓矩係數 $m = \frac{M_x}{WL}$, 計算載角變係數 $\phi_{(a^*+b^*)}$ 與 ϕ_{b^*} 之兩個公式分別為

$$\phi_{(a^*+b^*)} = \frac{EI_0}{WL^2} (\alpha_a^* + \alpha_b^*) = \int my du, \quad (30)$$

1) 參閱 [12], 46—48 頁之表 (2-2)。

$$\phi_{b^0} = \frac{EI_0}{WL^2} \phi_b^0 = \int myu \, du. \quad (31)$$

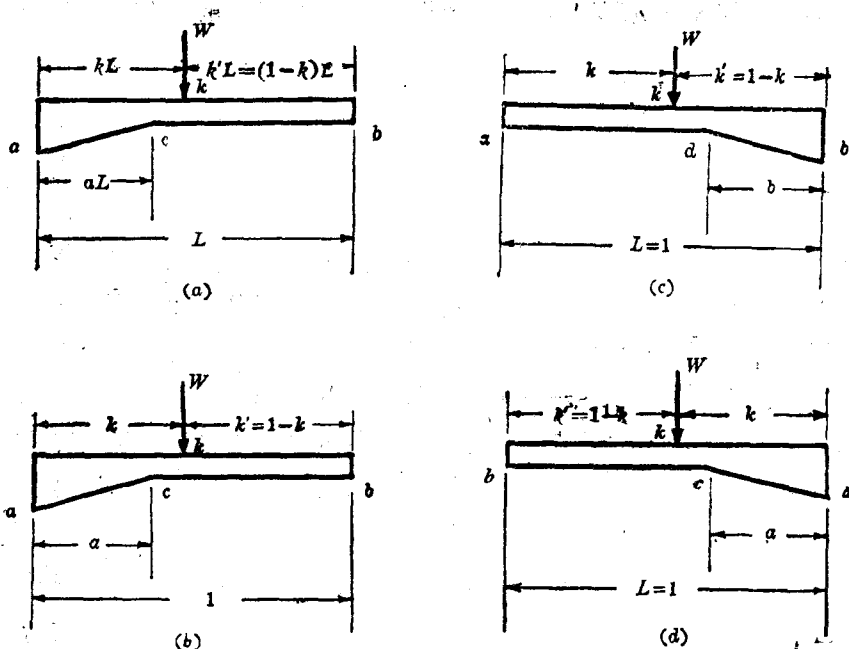


圖 5.

於上兩式中,任一截面 u 的撓矩係數 m 之值為:

$$\text{當 } 0 \leq u \leq k, \quad m = (1-k)u; \quad (32)$$

$$\text{當 } k \leq u \leq 1, \quad m = (1-u)k. \quad (33)$$

茲採用式 (30) 與 (31) 分別計算式 (26) 與 (27) 中 $\bar{\phi}$, ϕ^a 及 ϕ^b 之值如下:

(1) $\bar{\phi}_{(a^0+b^0)}$ 與 $\bar{\phi}_{b^0}$ 之值. 於式 (30) 與 (31) 中,令 $y=1$, 並採用式 (32) 與 (33) 中 m 之值,可分別求得等截面梁當任一截面 k 有一集中荷載時的兩個載角變係數 $\bar{\phi}_{(a^0+b^0)}$ 及 $\bar{\phi}_{b^0}$ 之值為

$$\bar{\phi}_{(a^0+b^0)} = \frac{k(1-k)}{2}; \quad (34)$$

$$\bar{\phi}_{b^0} = \frac{k(1-k^2)}{6}. \quad (35)$$

(2) $\phi_{(a^0+b^0)}^a$ 與 $\phi_{b^0}^a$ 之值. 當 $k \geq a$ 時: 因圖 4(b) 變梁的 I_0/I 餘圖於 cb 段中為零(即 $y=0$), 故當荷載在 cb 段中時,由 0 至 k 的積分值即等於由 0 至 a 的積分值; 由 k 至 1 的積分值為零. 於式 (30) 與 (31) 中,令 y 的值為 y_a , 並將式 (32) 中 m 的值代入,得

$$\phi_{(a^*+b^*)}^a = (1-k) \int_0^a y_a u \, du,$$

$$\phi_{b^*}^a = (1-k) \int_0^a y_a u^2 \, du.$$

採用式 (14) 中 F_{1a} 與 F_{2a} 的值, 得

$$\phi_{(a^*+b^*)}^a = (1-k) F_{1a}; \quad (36)$$

$$\phi_{b^*}^a = (1-k) F_{2a}. \quad (37)$$

當 $k \leq a$ 時: 當荷載在左端 a 梁腋之中時, ϕ^a 的值須將 a 端 I_0/I 餘圖分為 0 至 k 及 k 至 a 兩段計算, 而於該兩段中撓矩係數 m 的值亦不相同。因此須採用 a 端 I_0/I 餘圖的下列各項部分積分值:

$$F_{0a(ak)} = \int_0^k y_a \, du, \quad F_{1a(ak)} = \int_0^k y_a u \, du, \quad F_{2a(ak)} = \int_0^k y_a u^2 \, du; \quad (38)$$

$$F_{0a(kc)} = F_{0a} - F_{0a(ak)} = \int_k^a y_a \, du, \quad F_{1a(kc)} = F_{1a} - F_{1a(ak)} = \int_k^a y_a u \, du, \\ F_{2a(kc)} = F_{2a} - F_{2a(ak)} = \int_k^a y_a u^2 \, du. \quad (39)$$

於式 (30) 中, 令 y 的值為 y_a , 並採用式 (32) 與 (33) 中 m 的值, 可得

$$\begin{aligned} \phi_{(a^*+b^*)}^a &= (1-k) \int_0^k y_a u \, du + k \int_k^a y_a (1-u) \, du = \\ &= (1-k) F_{1a(ak)} + k (F_{0a(kc)} - F_{1a(kc)}) = \\ &= (1-k) F_{1a(ak)} + k [F_{0a(kc)} - (F_{1a} - F_{1a(ak)})]. \end{aligned}$$

簡化上式, 得

$$\phi_{(a^*+b^*)}^a = k (F_{0a(kc)} - F_{1a}) + F_{1a(ak)}. \quad (40)$$

同此, 由式 (31), 可得

$$\phi_{b^*}^a = k (F_{1a(kc)} - F_{2a}) + F_{2a(ak)}. \quad (41)$$

(3) $\phi_{(a^*+b^*)}^b$ 與 $\phi_{b^*}^b$ 之值. 當變梁的右端 b 有梁腋時, 如圖 5(c), 可將其兩端的 a 與 b 二字互換, 並將 d 與 k' 分別改 c 與 k 如圖 5(d), 與圖 5(b) 成對稱. 則圖 5(c) 中由於 b 端梁腋的 $\phi_{(a^*+b^*)}^b$ 與 $\phi_{b^*}^b$ 二值顯然分別等於圖 5(d) 中由於 a 端梁腋的 $\phi_{(a^*+b^*)}^a$ 與 $\phi_{b^*}^a$ 二值, 並可按照圖 5(b) 用上得的式 (36), (37), (40) 及 (41) 分別計算之.

(II 與 II-A) 變梁的左端或右端有一段勻佈荷載 如圖 6(a) 所示, 只左端 a 有

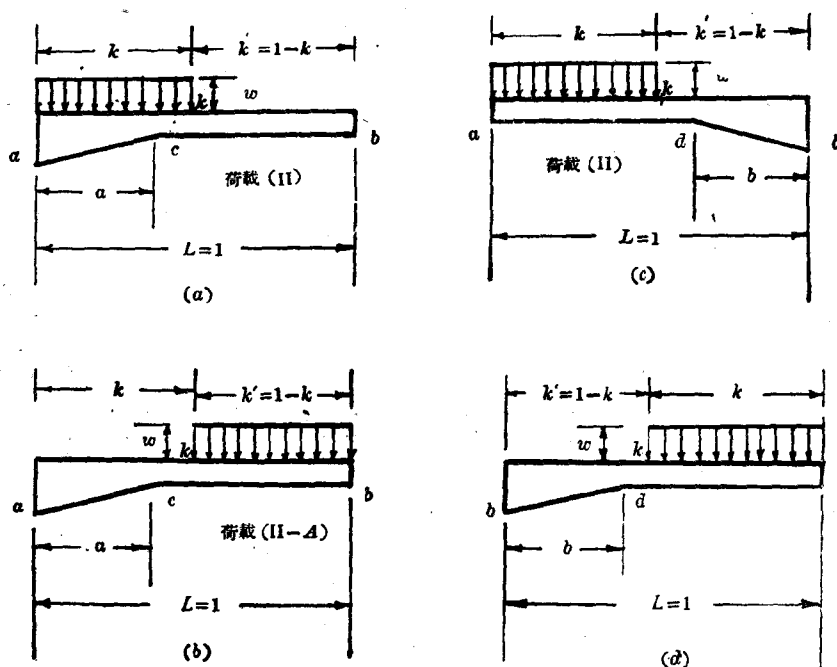


圖 6.

梁腋，令變梁跨長 $L = 1$ ；梁左端任一段 k 有一勻佈荷載，其荷載密度為 w ，稱為荷載 (II)，與 (I) 項荷載的式 (30) 及 (31) 相似，計算載角變係數 $\phi_{(a^*+b^*)}$ 與 ϕ_{b^*} 之兩個公式分別為

$$\phi_{(a^*+b^*)} = \frac{EI_0}{wL^3} (\alpha_a^* + \alpha_b^*) = \int m y du, \quad (42)$$

$$\phi_{b^*} = \frac{EI_0}{wL^3} \alpha_b^* = \int m y u du. \quad (43)$$

於上兩式中，任一截面 u 的撓矩係數 $m = \frac{M_x}{wL^2}$ 之值為：

$$\text{當 } 0 \leq u \leq k, \quad m = \frac{1}{2} [k(2-k)u - u^2]; \quad (44)$$

$$\text{當 } k \leq u \leq 1, \quad m = \frac{1}{2} k^2 (1-u). \quad (45)$$

茲採用式 (42) 與 (43) 分別計算式 (26) 與 (27) 中 $\bar{\phi}$, ϕ^a 及 ϕ^b 之值如下：

(1) $\bar{\phi}_{(a^*+b^*)}$ 與 $\bar{\phi}_{b^*}$ 之值。於式 (42) 與 (43) 中，令 $y = 1$ ，並採用式 (44) 與 (45) 中 m 之值，可分別得等截面梁左端任一段 kL 有一勻佈荷載時的兩個載角變係數 $\bar{\phi}_{(a^*+b^*)}$ 及 $\bar{\phi}_{b^*}$ 之值為

$$\bar{\phi}_{(a^{\circ}+b^{\circ})} = \frac{k^2(3-2k)}{12}; \quad (46)$$

$$\bar{\phi}_{b^{\circ}} = \frac{k^2(2-k^2)}{24}. \quad (47)$$

(2) $\phi_{(a^{\circ}+b^{\circ})}^a$ 與 $\phi_{b^{\circ}}^a$ 之值. 當 $k \geq a$ 時, 於式 (42) 與 (43) 中, 令 y 的值為 y_a , 並將式 (44) 中 m 值代入, 得

$$\phi_{(a^{\circ}+b^{\circ})}^a = \frac{1}{2} k (2-k) \int_0^a y_a u \, du - \frac{1}{2} \int_0^a y_a u^2 \, du,$$

$$\phi_{b^{\circ}}^a = \frac{1}{2} k (2-k) \int_0^a y_a u^2 \, du - \frac{1}{2} \int_0^a y_a u^3 \, du.$$

採用式 (14) 中 F_{1a} 與 F_{2a} 及下列 F_{3a} 之值:

$$F_{3a} = \int_0^a y_a u^3 \, du, \quad (48)$$

即可得

$$\phi_{(a^{\circ}+b^{\circ})}^a = \frac{1}{2} [k (2-k) F_{1a} - F_{2a}]; \quad (49)$$

$$\phi_{b^{\circ}}^a = \frac{1}{2} [k (2-k) F_{2a} - F_{3a}]. \quad (50)$$

當 $k \leq a$ 時, ϕ^a 之值須將 a 端 I_0/I 餘圖分為 0 至 k 及 k 至 a 兩段計算, 而於該兩段中撓矩係數 m 之值亦不相同. 於式 (42) 中, 令 y 的值為 y_a , 並採用式 (44) 與 (45) 中 m 之值, 可得

$$\phi_{(a^{\circ}+b^{\circ})}^a = \frac{1}{2} k (2-k) \int_0^k y_a u \, du - \frac{1}{2} \int_0^k y_a u^2 \, du + \frac{1}{2} k^2 \int_k^a y_a (1-u) \, du.$$

採用式 (38) 與 (39) 中 a 端 I_0/I 餘圖的各項部分積分值, 並注意 $F_{1a(ak)} + F_{1a(kc)} = F_{1a}$, 上式變為

$$\phi_{(a^{\circ}+b^{\circ})}^a = \frac{1}{2} [k^2 (F_{0a(kc)} - F_{1a}) + 2k F_{1a(ak)} - F_{2a(ak)}]. \quad (51)$$

同此, 由式 (43), 可得

$$\phi_{b^{\circ}}^a = \frac{1}{2} [k^2 (F_{1a(kc)} - F_{2a}) + 2k F_{2a(ak)} - F_{3a(ak)}]. \quad (52)$$

其中

$$F_{3a(ak)} = \int_0^k y_a u^3 \, du. \quad (53)$$

當變梁只左端 a 有梁腋而勻佈荷載在其右端 b 的一段時如圖 6(b), 稱為荷載 (II-A), 則兩項 ϕ^a (II-A) 之值當然等於變梁全長有勻佈荷載 (即 $k=1$) 時的兩項 ϕ^a (II, $k=1$) 之值分別減去圖 6(a) 的兩項 ϕ^a (II) 之值. 用總公式表示之, 得