农林院校必修课
考试辅导丛书

高等数学

（含线性代数）

王来生　主编

- 紧扣教学大纲
- 梳理知识体系
- 解读重点难点
- 网罗名校真题
- 精讲单项考点
- 引导复习路径

科学技术文献出版社

《农林院校必修课考试辅导》丛书

高等数学

（含线性代数）

主　编　王来生
副主编　（按姓氏笔画为序）
王玉华　李铁存　周志坚
钟　萍　甄　苓

科学技术文献出版社
Scientific and Technical Documents Publishing House
北　京

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/王来生主编.-北京:科学技术文献出版社,2004.4(重印)

(农林院校必修课考试辅导丛书)

ISBN 7-5023-4370-9

Ⅰ.高… Ⅱ.王… Ⅲ.高等数学-高等学校-自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 059657 号

出版者 科学技术文献出版社
地址 北京市复兴路 15 号(中央电视台西侧)/100038
图书编务部电话 (010)68514027,(010)68537104(传真)
图书发行部电话 (010)68514035(传真),(010)68514009
邮购部电话 (010)68515381,(010)58882952
网址 http://www.stdph.com
E-mail: stdph@istic.ac.cn
策划编辑 袁其兴
责任编辑 袁其兴
责任校对 唐炜
责任出版 王芳妮
发行者 科学技术文献出版社发行 全国各地新华书店经销
印刷者 北京金鼎彩色印刷有限公司
版(印)次 2004 年 4 月第 1 版第 2 次印刷
开本 850×1168 32 开
字数 421 千
印张 14
印数 6001~11000 册
定价 20.00 元

(京)新登字 130 号

内 容 简 介

本书为农林院校基础课《高等数学》和《线性代数》复习参考教材，通过大量的典型例题帮助读者掌握基本知识点和提高综合解题能力，许多典型例题选自考研真题。

全书分“高等数学”和“线性代数”两篇，内容分别为函数、极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数、微分方程、行列式、矩阵及其运算、向量组的线性相关性与矩阵的秩、线性方程组、相似矩阵及二次型、近几年考研试题。旨在帮助学生正确理解和掌握基本的数学概念、理论和方法，培养学生综合分析和解决问题的能力。

本书可供理、工、农、林等非数学专业的大学生及从事高等数学和线性代数教学的教师使用，也可作为考研数学的复习参考书。

科学技术文献出版社是国家科学技术部系统惟一一家中央级综合性科技出版机构，我们所有的努力都是为了使您增长知识和才干。

前　言

本书为《农林院校必修课考试辅导》丛书中的一个分册，读者对象为农林院校的本科生。《高等数学》、《线性代数》是本科生最重要的基础课，农林院校的理、工专业对数学的要求不比其他院校的工科专业低，而经管类和农学类专业对数学的要求也越来越高，本书兼顾了各个专业的需求，因此可供理、工、农、林等非数学专业的大学生及从事《高等数学》和《线性代数》教学的教师使用，也可作为考研数学的复习参考书。

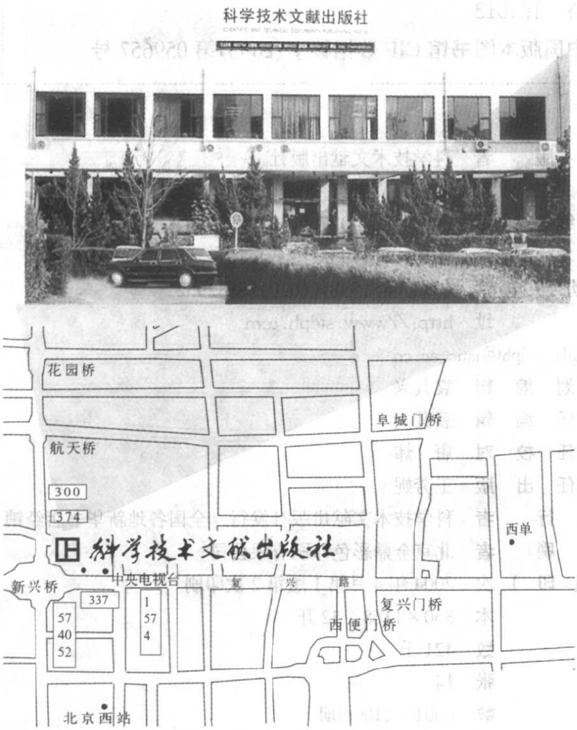
本书的主要特点是：依据教学大纲和研究生考试大纲的基本要求，研究了大量的考试试题，精选出具有启发性、典型性和针对性的题目，许多典型例题选自考研真题，通过对这些题目的分析解答，帮助读者掌握基本知识点和提高综合解题能力。

全书分《高等数学》和《线性代数》两篇，内容分别为函数、极限与连续、一元函数微分学、一元函数积分学、空间解析几何与向量代数、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数、微分方程、行列式、矩阵及其运算、向量组的线性相关性与矩阵的秩、线性方程组、相似矩阵及二次型、近几年考研试题。每

一章由教学大纲基本要求、知识要点、重点与难点、典型例题解析、自测题和自测题答案六部分组成。在知识要点部分，给出了基本概念、定义、重要定理与常用公式，便于学生的复习。所选的典型例题大部分综合性较强并具有一定的深度。对于典型例题中难度较大的题，先给出解题思路分析，然后给出正式解答，有的题最后还加以评注。目的是帮助学生正确理解和掌握基本的数学概念、理论和方法，开拓思维模式，培养学生综合分析和解决问题的能力。本书对于学生的平时学习及考研复习都是很有帮助的。

本书的编写分工如下：王来生，第一章、第五章；王玉华，第三章、第十二章、第十三章；李铁存，第六章、附录；周志坚，第二章、第八章；钟萍，第四章、第九章、第十章；甄苓，第七章、第十一章。

由于作者水平所限，书中缺点和错误在所难免，敬请读者批评指正。



科学技术文献出版社方位示意图

目　录

第一篇　高等数学

第二篇　线性代数

第一篇　高等数学

第一章

函数、极限与连续

一、教学大纲基本要求

(1) 理解函数的概念，掌握函数的表示方法；

(2) 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性；

(3) 理解复合函数的概念，了解反函数及隐函数的概念；

(4) 掌握基本初等函数的性质及其图形；

(5) 会建立简单应用问题中的函数关系式；

(6) 理解极限的概念，理解函数左、右极限的概念以及极限存在与左、右极限之间的关系；

(7) 掌握极限的性质及四则运算法则；

(8) 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法；

(9) 理解无穷小、无穷大以及无穷小的阶的概念，会用等价无穷小求极限；

(10) 理解函数连续性的概念，会判别函数间断点的类型；

(11) 了解初等函数的连续性和闭区间上连续函数的性质(最大值、最小值定理；介值定理)，并会应用这些性质。

二、本章知识要点

1. 函数概念

如果变量 x 在数集 D 中任取一个值，变量 y 按某个对应法则 f 总有惟一确定的值与它对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y = f(x), x \in D$. 其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域，集合 $W = \{y \mid y = f(x), x \in D\}$ 称为函数 $y = f(x)$ 的值域.

2. 函数的特性

(1) 函数的有界性：若存在常数 $M > 0$，使得 $|f(x)| \leqslant M$ 对于任一 $x \in D$ 都成立，则称 $f(x)$ 在 D 上有界，亦称 $f(x)$ 是 D 上的有界函数，否则称为无界.

(2) 函数的单调性：设 $y = f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，x_1, x_2 为 (a,b) 内任意两点，当 $x_1 < x_2$ 时，总有 $f(x_1) < f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内为单调增加的函数；当 $x_1 < x_2$ 时，总有 $f(x_1) > f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内为单调减少的函数. 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

(3) 函数的奇偶性：设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于任一 $x \in D$，有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 是偶函数；若 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 是奇函数. 偶函数的图形关于 y 轴对称；奇函数的图形关于坐标原点对称.

(4) 函数的周期性：若存在一个非零常数 T，使得函数 $y = f(x)$ 在其

定义域内有 $f(x+T)=f(x)$ 成立,则称函数 $y=f(x)$ 为周期函数,T 称为 $f(x)$ 的周期.

3. 复合函数与初等函数

(1) 反函数:设函数 $y=f(x),x\in D$ 的值域为 W,且 x 与 y 是一一对应的,对任何 $y\in W$,按照对应法则 f^{-1} 总有惟一确定的 x 与之对应,称函数 $x=f^{-1}(y)$ 为 $y=f(x)$ 的反函数,$y=f(x)$ 又称为直接函数. 习惯上用 y 表示函数,所以反函数可写成 $y=f^{-1}(x),x\in W$. 它们的图形关于 $y=x$ 对称.

(2) 基本初等函数:幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数统称为基本初等函数.

(3) 复合函数:设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_f, 而函数 $u=\varphi(x)$ 的值域为 Z_φ, 若 $D_f\cap Z_\varphi\neq\varnothing$, 则称函数 $y=f[\varphi(x)]$ 为 x 的复合函数.

(4) 隐函数:设二元方程为 $F(x,y)=0$,如果对任意的 $x\in D$,总有满足上述方程的 y 与之对应,则称 y 是 x(由方程 $F(x,y)=0$ 确定)的隐函数.

(5) 初等函数:由常数、基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合运算所构成的并能用一个式子表示的函数称为初等函数.

4. 数列与函数的极限

(1) 数列极限定义:如果对于任意给定的正数 ε(不论它多么小),总存在正整数 N,使得对于 $n>N$ 时的一切 x_n,不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 都成立,那么就称常数 a 是数列 x_n 的极限,或者称数列 x_n 收敛于 a,记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$,或 $x_n\to a(n\to\infty)$.

(2) 数列极限的性质

有界性:收敛的数列必定有界.

惟一性:每个收敛的数列只有一个极限.

(3) 函数的极限定义

定义 1　如果对于任意给定的正数 ε(不论它多么小),总存在着正数 X,使得对于适合不等式 $|x|>X$ 的一切 x,所对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$,那么常数 A 就叫函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限,

记作 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$ 或 $f(x) \to A(x \to \infty)$.

在上述定义中,将 $|x| > X$ 改写成 $x > X$(或 $x < -X$),便得到 $x \to +\infty$(或 $x \to -\infty$)时函数的极限.

定义 2 如果对于任意给定的正数 ε(不论它多么小),总存在正数 δ,使得对于适合不等式 $0 < |x - x_0| < \delta$ 的一切 x,对应的函数值 $f(x)$ 都满足不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$,那么常数 A 就叫函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限,记作 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 或 $f(x) \to A(x \to x_0)$.

在上述定义中,将 $0 < |x - x_0| < \delta$ 改写成 $0 < x_0 - x < \delta$(或 $0 < x - x_0 < \delta$),便得到 $x \to x_0$ 时的左、右极限的定义.

左极限记为: $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0 - 0)$;

右极限记为: $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0 + 0)$.

(4) 函数极限的性质

① 函数 $f(x)$ 极限存在的充分必要条件是 $f(x)$ 的左右极限均存在并且相等.

② 若函数 $f(x)$ 极限存在,则极限值是惟一的.

③ 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$,且 $A > 0$(或 $A < 0$),则存在 $\delta > 0$,当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时,恒有 $f(x) > 0$(或 $f(x) < 0$).

(5) 无穷小与无穷大

无穷小定义: 如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$ 或($\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$),则称函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$)时为无穷小.

无穷大定义:如果 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$ 或($\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$),则称函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$)时为无穷大.

(6) 无穷小与函数极限的关系

定理 1: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$,其中 $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

(7) 无穷小与无穷大的关系

在同一过程中,无穷大的倒数为无穷小;恒不为零的无穷小的倒数为无穷大.

(8) 无穷小的运算性质

定理 2:在同一过程中,有限个无穷小的代数和仍是无穷小.

定理 3:有界函数与无穷小的乘积是无穷小.

推论 1:在同一过程中,有极限的变量与无穷小的乘积是无穷小.

推论 2:常数与无穷小的乘积是无穷小.

推论 3:有限个无穷小的乘积也是无穷小.

(9) 无穷小的比较

设 α,β 是同一个极限过程中的两个无穷小,且 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\rho$.若 $\rho=0$,则称在此极限过程中 β 是比 α 高阶的无穷小,记作 $\beta=o(\alpha)$.若 $\rho=c$(c 为非零常数),则称在此极限过程中 β 与 α 是同阶的无穷小.特别地,当 $c=1$ 时,称在此极限过程中 β 与 α 是等价无穷小,记作 $\beta\sim\alpha$.

若 $\rho=\infty$,则称在此极限过程中 β 是比 α 低阶的无穷小.若 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha^k}=c$,($c\neq0,k>0$),则称在此极限过程中 β 是 α 的 k 阶无穷小,若在同一极限过程中,$\beta\sim\beta'$,$\alpha\sim\alpha'$,且极限 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在或为无穷大,则有 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}=\lim\dfrac{\beta}{\alpha}$.

常用的等价无穷小:当 $x\to0$ 时

$\sin x\sim x$, $\tan x\sim x$, $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$, $\ln(1+x)\sim x$, $e^x-1\sim x$, $a^x-1\sim x\ln a$, $(1+x)^a-1\sim ax$, $\arcsin x\sim x$, $\arctan x\sim x$

(10) 极限的四则运算法则

设 $\lim f(x)=A$, $\lim g(x)=B$,则

①$\lim[f(x)\pm g(x)]=A\pm B$;

②$\lim[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$;

③$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$,其中 $B\neq0$.

(11) 极限存在准则

准则Ⅰ(夹逼准则)　如果数列 x_n, y_n 及 z_n 满足下列条件:

①$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n$　$(n=1,2,3\cdots)$

② $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=a$,

那么数列 x_n 的极限存在,且 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

在函数极限情形下,上述准则也成立.

准则 Ⅱ　单调有界数列必有极限.

(12) 两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1;\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e};$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e};\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$$

5. 函数的连续性

(1) 函数连续的概念

定义 1　设函数 $f(x)$ 在 $U_\delta(x_0)$ 内有定义,如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$,则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

定义 2　设函数 $f(x)$ 在 $U_\delta(x_0)$ 内有定义,如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续.

在区间上每一点都连续的函数,叫做在该区间上的连续函数,或者说函数在该区间上连续.

(2) 函数的间断点及其分类

使函数 $f(x)$ 不连续的点 x_0 称为 $f(x)$ 的间断点. 左右极限都存在的间断点称为第一类间断点,其中, 左右极限相等的间断点称为可去间断点;左右极限至少有一个不存在的间断点称为第二类间断点.

(3) 连续函数的运算及初等函数的连续性

连续函数的四则运算性质:设 $f(x),g(x)$ 在点 x_0 连续,则 $f(x)\pm g(x),f(x)\cdot g(x),f(x)/g(x),(g(x_0)\neq 0)$ 在点 x_0 也连续.

复合函数的连续性:若 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 连续,函数 $y=f(u)$ 在相应点 $u_0=\varphi(x_0)$ 连续,则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 连续.

基本初等函数在定义域内是连续的;一切初等函数在其定义区间内都是连续的.

(4) 闭区间上连续函数的性质

最大值和最小值定理:在闭区间上连续的函数一定有最大值和最小值.

有界性定理:在闭区间上连续的函数一定在该区间上有界.

零点定理:设函数 $f(x)$ 在闭区间$[a,b]$上连续,且 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号

(即 $f(a)\cdot f(b)<0$),则在开区间 (a,b) 内至少存在一点 $\xi(a<\xi<b)$,使 $f(\xi)=0$.

介值定理:设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且在这区间的端点取不同的函数值 $f(a)=A$ 及 $f(b)=B$,那么,对于 A 与 B 之间的任意一个数 C,在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ,使得 $f(\xi)=C.(a<\xi<b)$

推论:在闭区间上连续的函数必取得介于最大值 M 与最小值 m 之间的任何值.

三、重点与难点

求极限和给定极限值确定式中的常数;利用洛必达法则求七种未定式的极限;讨论函数的连续性,判断间断点的类型;无穷小的比较;利用极限存在准则和两个重要极限求极限;方程在给定区间内有无实根;分段函数在分界点处的极限与连续;闭区间上连续函数的性质。

四、典型例题解析

例1. 设 $f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x & x\geqslant 0\end{cases}$,$\varphi(x+1)=x^2+x+1$,试求 $f[\varphi(x)]$,$\varphi[f(x)]$.

解:已知 $\varphi(x+1)=x^2+x+1$,设 $t=x+1$,则 $x=t-1$,

因而有 $\varphi(t)=(t-1)^2+(t-1)+1=t^2-t+1$,将等式两边的 t 换成 x,得

$$\varphi(x)=x^2-x+1=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

而 $f(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ x & x\geqslant 0\end{cases}$,可知,$f[\varphi(x)]=\begin{cases}0 & \varphi(x)<0\\ \varphi(x) & \varphi(x)\geqslant 0\end{cases}$

得
$$f[\varphi(x)]=\varphi(x)=x^2-x+1,x\in(-\infty,+\infty)$$

$$\varphi[f(x)]=f^2(x)-f(x)+1=\begin{cases}1 & x<0\\ x^2-x+1 & x\geqslant 0\end{cases}$$