现代数学基础丛书 87

椭圆与抛物型方程引论

伍卓群 尹景学 王春朋 著

科学出版社
www.sciencep.com

现代数学基础丛书　87

椭圆与抛物型方程引论

伍卓群　尹景学　王春朋　著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书将椭圆型方程与抛物型方程这两个偏微分方程领域的重要分支融为一体，涵盖了这两类方程有关的基本理论和基本方法，既突出了两者的共性，又揭示了其各自的特性，使读者在联系和对比当中能更有效地同时掌握这两类方程的有关知识。

本书可供从事偏微分方程领域研究的学者和工作者参考研究，也可作为本专业研究生教材和参考书.

图书在版编目（CIP）数据

椭圆与抛物型方程引论／伍卓群，尹景学，王春朋著．北京：科学出版社，2003
(现代数学基础丛书；87)
ISBN 7-03-011435-3

Ⅰ．椭… Ⅱ．①伍… ②尹… ③王… Ⅲ．①椭圆型方程 ②抛物型方程 Ⅳ．O175.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 029568 号

策划编辑：吕 虹 陈玉琢 ／文案编辑：邱 璐 贾瑞娜
责任校对：刘小梅 ／责任印制：钱玉芬 ／封面设计：黄华斌

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂 印刷
科学出版社编务公司编辑制作
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2003 年 9 月第 一 版　开本：B5(720×1000)
2003 年 9 月第一次印刷　印张：17 3/4
印数：1—3 000　字数：320 000

定价：35.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈环伟〉）

《现代数学基础丛书》编委会

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓著的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20世纪70年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了十余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是50年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中尤以《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约40卷，后者则逾80卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高作出贡献．

杨　乐

2003年8月

前　言

椭圆型方程与抛物型方程是偏微分方程领域内的两个重要分支。在许多实际应用中，这两类方程往往同时出现。历史上这两类方程的理论几乎是平行发展的.迄今分别论述这两类方程的著作已经很多，熟知的有 O. A. Ladyženskaja, H. H. Ural'ceva[1] 和 D. Gilbarg, N. S. Trudinger[2] 关于椭圆型方程的著作，以及 O. A. Ladyženskaja, V. A. Solonnikov, H. H. Ural'ceva[3], A. Friedman[4] 和 G. M. Lieberman[5] 关于抛物型方程的著作，国内则有陈亚浙、吴兰成 [6] 和辜联昆 [7] 等人的著作。然而，将两类方程融合在一起的著作则很少见。 O. A. Oleĭnik 和 E. V. Radkevič[8] 关于具非负特征形式的二阶微分方程的著作虽然既涵盖了椭圆型方程，又涵盖了抛物型方程，甚至涵盖了退化抛物型方程，但那是把空间变量 x 和时间变量 t 平等对待，视抛物型方程为退化的椭圆型方程，而着眼于它们的共性。由于涵盖面越宽，共性的部分就必然越少，书中不可能涉及两类方程各自的理论和方法。我们从自己的教学和科研实践中感到很有必要编纂一本融两类方程于一体，涵盖有关的基本理论和基本方法的书籍。本书就是按照这种想法作出的一种尝试，它是根据作者在吉林大学为偏微分方程方向的研究生所开课程的讲义整理而成的。我们的设想是，这样一本书将既有利于突出两类方程的共性，又有利于揭示各自的特性，使读者在联系和对比当中更有效地同时掌握这两类方程的有关知识。

我们把这本书定位于供研究生和青年学者踏进偏微分方程研究领域的入门书，因而不打算对这两类方程的理论做全面而完整的介绍。篇幅过大显然不是我们的初衷，篇幅过小又难以反映所论领域的基本面貌。我们采取以典型方程为主的叙述方式，首先详细讨论典型方程，然后简要地讨论一般方程，有时对一般方程甚至只是简单地提一下。这样做是想避免由于方程的形式过于一般而带来的复杂运算掩盖和模糊了推理的精神实质。

作为一本入门书，理应在理论和方法两方面都为研究生和青年学者提供必要的准备。因此我们始终不忘介绍关于两类方程的基本理论结果 (虽然有时不给出详细证明)。在注意介绍这些理论结果的同时，我们力求使读者掌握更多的方法和技巧，而不满足于用一种方法得到所希望的结果。我们认为掌握更多的方法比了解更多的理论结果来得重要。

全书共分 12 章。

在第 1 章里，我们汇总了以后各章常常要用到的一些预备知识，主要是关于

Sobolev 空间和 Hölder 空间的基础知识。

第 2 章到第 9 章讨论线性方程。第 2 章和第 3 章分别讨论线性椭圆型方程和线性抛物型方程的弱解，建立它们的 L^2 理论。第 4 章和第 5 章讨论弱解的性质。在第 4 章里，我们介绍两种重要的方法，即 De Giorgi 迭代和 Moser 迭代，但只论及典型方程，并且只用来做弱解的最大模估计。第 5 章论述 Harnack 不等式。第 6 章和第 7 章分别建立线性椭圆型方程和线性抛物型方程的 Schauder 估计。基于这种估计，我们在第 8 章中证明了两类方程古典解的存在性。Schauder 估计的证明我们采用的是 Campanato 空间的框架，它基于如下的重要事实，即 Hölder 连续函数可以用等价的积分形式来刻画。这种处理方法不仅可以简化证明，而且既适用于二阶方程，也适用于高阶方程，既可用于方程式也可用于方程组。第 9 章是关于 L^p 估计的论述。基于这种估计，我们讨论了正则性介乎弱解与古典解之间的强解的存在性。

第 10 章到第 12 章讨论拟线性方程。我们先后介绍了三种方法，即不动点方法（第 10 章），半群方法（第 11 章）和拓扑度方法（第 12 章）。和线性方程的情形一样，在这几章里，我们也都是主要针对典型方程来讨论的。

由于篇幅所限，本书完全没有关于椭圆和抛物方程组的讨论，也没有论及完全非线性方程。

限于作者的学识和经验，本书难免有错误和不妥之处。如蒙赐教，不胜感激。

作　者

2002 年夏于长春

目　录

第1章　预 备 知 识

作为全书的预备知识，本章主要介绍关于 Sobolev 空间和 Hölder 空间的基本理论. 为了紧缩篇幅，大部分结果没有给出证明，但将指出有详细证明的参考书. 为方便读者，关于某些 Sobolev 空间中函数在边界上的迹给出了比较详细的讨论. 我们假设读者了解泛函分析的基本知识; 某些需要用到的结果将在各章的适当地方加以介绍.

§1.1　常用不等式和某些基本技术

本节介绍偏微分方程理论中一些常用的不等式，以及磨光、切断、单位分解和局部拉平等基本技术.

1.1.1　几个常用不等式

Young 不等式　设 $a>0$, $b>0$, $p>1$, $q>1$, 且 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. 则有

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}.$$

特别地，当 $p=q=2$ 时，上述不等式也称为 Cauchy 不等式.

设 $\varepsilon>0$, 在上述不等式中用 $\varepsilon^{1/p}a$ 和 $\varepsilon^{-1/p}b$ 代替 a 和 b, 可得

带 ε 的 Young 不等式　设 $a>0$, $b>0$, $\varepsilon>0$, $p>1$, $q>1$, 且 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. 则有

$$ab \leqslant \frac{\varepsilon a^p}{p}+\frac{\varepsilon^{-q/p}b^q}{q} \leqslant \varepsilon a^p+\varepsilon^{-q/p}b^q.$$

特别地，当 $p=q=2$ 时，它变为

$$ab \leqslant \frac{\varepsilon}{2}a^2+\frac{1}{2\varepsilon}b^2,$$

称之为带 ε 的 Cauchy 不等式.

设 $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ 为一可测集. 下面是 L^p 空间中的几个最常用的不等式.

Hölder 不等式　设 $p>1$, $q>1$, 且 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. 若 $f\in L^p(\Omega)$, $g\in L^q(\Omega)$, 则 $f\cdot g\in L^1(\Omega)$, 且

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leqslant \|f(x)\|_{L^p(\Omega)}\cdot\|g(x)\|_{L^q(\Omega)}.$$

特别地，当 $p=q=2$ 时，它变成

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leqslant \|f\|_{L^2(\Omega)} \cdot \|g\|_{L^2(\Omega)},$$

称之为 Schwarz 不等式.

Minkowski 不等式 设 $1 \leqslant p < +\infty$, $f, g \in L^p(\Omega)$, 则 $f+g \in L^p(\Omega)$, 且

$$\|f+g\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L^p(\Omega)} + \|g\|_{L^p(\Omega)}.$$

1.1.2 L^p中的列紧性

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为一可测集.

命题 1.1.1 当 $1<p<+\infty$ 时，$L^p(\Omega)$ 中一集合为 (相对) 弱列紧 (即从其中任一序列内都能抽出弱收敛的子序列) 的充要条件是：范数有界.

命题 1.1.2 若 $1 \leqslant p < +\infty$ 时，则函数族 $X \subset L^p(\Omega)$ 为 (相对) 强列紧 (即从其中任一序列内都能抽出强收敛的子序列) 的充要条件为:

(i) $\left\{\|f\|_{L^p(\Omega)}; f \in X\right\}$ 有界;

(ii) X 同等整体连续，即对 $f \in X$ 一致地有

$$\lim_{h\to 0} \int_\Omega |f(x+h)-f(x)|^p dx = 0;$$

(iii) 对$f \in X$ 一致地有

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\{x\in\Omega; |x|\geqslant R\}} |f(x)|^p dx = 0.$$

注意：假如 Ω 有界，则条件 (iii) 天然满足.

(见文献 [9] 第 2 章)

1.1.3 空间 $C^k(\Omega)$和 $C_0^k(\Omega)$

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为一开集，k 为非负整数或 ∞.

定义 1.1.1 $C^k(\Omega)$ 和 $C^k(\overline{\Omega})$ 分别表示 Ω 和 $\overline{\Omega}$ 上 k 次连续可微函数的全体所构成的集合. 特别地，$C^0(\Omega)$ 和 $C^0(\overline{\Omega})$ 也简记为 $C(\Omega)$ 和 $C(\overline{\Omega})$. 在 $C^k(\overline{\Omega})$ 中引进范数

$$|u|_{k;\Omega} = \sum_{|\alpha|\leqslant k} \sup_\Omega |D^\alpha u|,$$

其中 $\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$ 称为多重指标，$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$ 为非负整数，$|\alpha|=\alpha_1+\cdots+\alpha_n$,

$$D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

不难验证, 按照上面定义的范数, $C^k(\overline{\Omega})$ 是一完备的线性赋范空间, 即 Banach 空间 (见文献 [6, 9]).

定义 1.1.2 设 $u(x)$ 为定义在 Ω 上的函数, 我们记

$$\text{supp}u = \overline{\{x \in \Omega; u(x) \neq 0\}},$$

称之为 $u(x)$ 的支集.

定义 1.1.3 $C_0^k(\Omega)$ 表示 $C^k(\Omega)$ 中支集为 Ω 的紧子集的函数全体所构成的集合. 特别地, 将 $C_0^0(\Omega)$ 简记为 $C_0(\Omega)$.

1.1.4 磨光算子

用光滑函数去逼近一给定的函数, 是偏微分方程研究中常用的一种基本技术. 构造光滑逼近函数的途径很多, 下面介绍今后常用的一种, 称为磨光法.

设 $j(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 为一非负函数, 在单位球 $B_1(0) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < 1\}$ 以外的地方为零, 且满足 $\int_{\mathbb{R}^n} j(x)dx = 1$. 这种函数的典型例子是

$$j(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{A}\mathrm{e}^{1/(|x|^2-1)}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geqslant 1, \end{cases}$$

其中

$$A = \int_{B_1(0)} \mathrm{e}^{1/(|x|^2-1)}dx.$$

对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 记

$$j_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} j\left(\frac{x}{\varepsilon}\right),$$

则 $j_\varepsilon(x)$ 在球 $B_\varepsilon(0) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| < \varepsilon\}$ 以外的地方为零, 且 $\int_{\mathbb{R}^n} j_\varepsilon(x)dx = 1$.

定义 1.1.4 对函数 $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$, 令

$$J_\varepsilon u(x) = (j_\varepsilon * u)(x) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} j_\varepsilon(x-y)u(y)dy.$$

而称 J_ε 为磨光算子, $J_\varepsilon u(x)$ 为 $u(x)$ 的磨光, $j_\varepsilon(x)$ 为磨光核. 这里和以后我们用 $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中全体局部可积函数所构成的集合.

命题 1.1.3 设 u 为定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数, 在有界区域 Ω 外为零.

(i) 若$u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, 则 $J_\varepsilon u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

(ii) 若$\text{supp}u \subset \Omega$, 又 $\text{dist}(\text{supp}u, \partial\Omega) > \varepsilon$, 则 $J_\varepsilon u \in C_0^\infty(\Omega)$.

(iii) 若$u \in L^p(\Omega)(1 \leqslant p < +\infty)$, 则 $J_\varepsilon u \in L^p(\Omega)$, 且

$$\|J_\varepsilon u\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \|u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \lim_{\varepsilon \to 0^+} \|J_\varepsilon u - u\|_{L^p(\Omega)} = 0.$$

(iv) 若 $u \in C(\Omega)$, $\overline{G} \subset \Omega$, 则在 G 上一致地有

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} J_\varepsilon u(x) = u(x).$$

(v) 若 $u \in C(\overline{\Omega})$, 则在 Ω 上一致地有

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} J_\varepsilon u(x) = u(x).$$

推论 1.1.1 设 $p \geqslant 1$, Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 中的开集, 则 $C_0^\infty(\Omega)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中稠密.

命题 1.1.3 和推论 1.1.1 的证明可参看文献 [9] 第 2 章.

由磨光算子的定义, 我们可以看出: 磨光函数在某点的值依赖于函数本身在这点附近的值. 因此当我们考虑用光滑函数在边界附近去逼近一给定函数时, 上面引进的磨光法并不合适. 为此, 我们可以先延拓给定的函数然后磨光, 有时也可以采用下面的修正磨光法 (上面引进的磨光法也称为标准磨光法). 作为例子, 我们取区域为

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n; |x_i| < 1, i = 1, 2, \cdots, n\},$$

而考虑 Q 的顶边

$$\{x \in \mathbb{R}^n; x_n = 1, |x_i| < 1, i = 1, \cdots, n-1\}$$

和底边

$$\{x \in \mathbb{R}^n; x_n = -1, |x_i| < 1, i = 1, \cdots, n-1\}$$

附近的磨光.

定义 1.1.5 设 $u \in L^1(Q)$, 定义

$$J_\varepsilon^- u(x) = \int_Q j_\varepsilon(x_1 - y_1) \cdots j_\varepsilon(x_{n-1} - y_{n-1}) j_\varepsilon(x_n - y_n - 2\varepsilon) u(y) dy,$$

$$J_\varepsilon^+ u(x) = \int_Q j_\varepsilon(x_1 - y_1) \cdots j_\varepsilon(x_{n-1} - y_{n-1}) j_\varepsilon(x_n - y_n + 2\varepsilon) u(y) dy,$$

其中 $j_\varepsilon(\tau)$ 为一维磨光核.

容易验证, $J_\varepsilon^- u(x)$ 在 Q 的顶边上有定义, 而 $J_\varepsilon^+ u(x)$ 在 Q 的底边上有定义.

1.1.5 切断因子

设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为边界适当光滑的有界区域, $\Omega' \subset\subset \Omega$(即 Ω' 为 Ω 的子区域, 满足 $\overline{\Omega'} \subset \Omega$). 令 $d = \dfrac{1}{4}\operatorname{dist}(\Omega', \partial\Omega)$, 则 $d > 0$. 又设

$$\Omega'' = \{x \in \Omega; \operatorname{dist}(x, \Omega') < d\},$$

则 $\mathrm{dist}(\Omega'', \partial\Omega) = 3d$. 用 $\chi_{\Omega''}(x)$ 表示 Ω'' 的特征函数，并考虑 $\chi_{\Omega''}(x)$ 的磨光函数

$$\eta(x) = J_d(\chi_{\Omega''}(x)),$$

其中 d 为磨光半径. 易见 $\eta(x)$ 具有如下性质:

$$\eta \in C_0^\infty(\Omega), \quad 0 \leqslant \eta(x) \leqslant 1, \quad \eta(x) \equiv 1 \text{ 于}\Omega', \quad |\nabla\eta| \leqslant \frac{C}{d},$$

其中 C 仅依赖于 Ω. 有时我们可能还会用到 Ω 以外 η 的值，这时如无特殊说明，都认为 η 在 Ω 外取零值. 我们把具有上述性质的函数称为 Ω 上的相对于子区域 Ω' 的切断函数 (因子).

在以后的应用中，我们经常考虑球域 $B_R(x^0) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x - x^0| < R\}$ 上的切断函数. 设 $0 < \rho < R$, $\eta(x)$ 为 $B_R(x^0)$ 上按上述方式得到的相对于 $B_\rho(x^0)$ 的切断函数，则 $\eta(x)$ 除了具备上述的性质以外，还满足

$$|\nabla\eta(x)| \leqslant \frac{C}{R-\rho},$$

进一步，容易验证

$$|D^k\eta(x)| \leqslant \frac{C}{|R-\rho|^k}, \quad [D^k\eta]_\alpha \leqslant \frac{C}{|R-\rho|^{k+\alpha}},$$

其中 C 为与 R, ρ 无关的绝对常数 ($[D^k\eta]_\alpha$ 的定义见 §1.2).

在研究诸如正则性在内的解的性质时，我们经常希望在一点的局部小邻域内来考虑问题. 引进切断因子就是使问题局部化的一种重要手段. 利用切断因子既能完整地保留被切断函数的局部性质，又能有效地避免小邻域以外各种因素的影响.

1.1.6 单位分解

如上所述，引进切断因子可将问题局部化. 在偏微分方程的研究中，我们常常希望将局部化后所得结果整合而得全局性结果. 为此，需要借助另一种手段，即所谓的单位分解. 以下是关于单位分解的基本定理，其证明可参看文献 [9] 第 2 章或文献 [11] 第 1 章.

定理 1.1.1 设 K 为 $\mathbb{R}^n$ 中的紧集, $U_1, \cdots, U_N$ 为 K 的一个开覆盖. 则存在函数 $\eta_1 \in C_0^\infty(U_1), \cdots, \eta_N \in C_0^\infty(U_N)$, 使得

(i) $0 \leqslant \eta_i(x) \leqslant 1, \quad \forall x \in U_i \quad (i = 1, \cdots, N)$;

(ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^N \eta_i(x) = 1, \quad \forall x \in K$.

我们称 $\eta_1, \cdots, \eta_N$ 为从属于 $U_1, \cdots, U_N$ 的单位分解.