城市控制測量平差法

下 册

曾广梁 沈祖礽 著

黄世綸 校訂

中国工业出版社

城市控制測量平差法

下　册

曾广梁　沈祖礽　著
黄世綸　校訂

中国工业出版社

本书介紹城市控制测量平差計算所依据的原理及常用的方法。所有例題及計算表式大部分是目前我国城市測量工作实踐中所采用的。为了簡化測量工作，作者結合了国内外的測量平差的經驗，提出了一些簡化平差計算方法。

为便于讀者的需要，本书分上下两册出版。上册包括1～6章；下册包括7～11章。上册为理論部分；下册为实用部分。

本书可供城市測量工作者参考，亦可作为高等学校及中等技术学校測量专业的教学参考用书。

本书由曾广梁、沈祖砺两同志編写，黄世綸同志校訂，蔡儒祖、曾昭萱两位同志也参加了校訂工作。

城市控制測量平差法
下　册
曾广梁　沈祖砺著
黄世綸校訂
*
中国工业出版社建筑图书編輯室編輯（北京佟麟閣路丙10号）
中国工业出版社出版（北京佟麟閣路丙10号）
（北京市书刊出版事业許可証出字第110号）
中国工业出版社第一印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行・各地新华书店經售
*
开本850×1168 1/32・印張9 1/2・插頁3・字数250,000
1962年10月北京第一版・1962年10月北京第一次印刷
印数001—620・定价（10-7）1.75元
*
統一书号：15165・1950（建工-246）

目　录

第七章 城市三角测量测站平差

§46 概 論

根据我国城市测量规范之规定，城市Ⅰ級三角網的水平角观測系用全周方向观測法或史賴伯全組合測角法，Ⅱ、Ⅲ級三角網和Ⅰ級小三角測量系用全周方向观測法，Ⅱ級小三角測量系用方向观測法。为了便于本章的討論，現在对这三种水平角观測方法作一概略的叙述。

在一个測站上观測A、B、C、D四个目标之間的角度，在观測的半个測回內，照准部順时針方向旋轉，依次照准A、B、C、D四个目标，每次讀数；然后縱轉望远鏡，照准部逆时針方向旋轉，按相反次序照准D、C、B、A四个目标，每次讀数。这种观測方法称为方向观測法。

如果我們在上述方向观測法的前半个測回中依次观測了A、B、C、D四个目标之后，再照准一次起始方向A，并讀数；同样在后半測回中开始照准目标D以前先照准一次起始方向A；于是在每半个測回中仪器就要旋轉一个圓周，或者說，在每半个測回中都“閉合”到起始方向。这种观測方法称为全周方向观測法。

如上所述，方向观測法与全周方向观測法的区别仅在于后者必須在每半个測回中閉合到起始方向，其目的显然是为了檢查在半測回观測过程中仪器基座有沒有变化。由这两种方法所測得的角度都是任意一个目标与起始方向相夹的角度，所以这两种方法基本上可以算为一种方法。

不論用方向观測法或全周方向观測法，当我們在一个三角点

上将所要观测的目标毫无遺漏地包括在一个测回內观测，这就叫做完全方向测回；如果有某些目标在个别测回內放棄未观测，就叫做不完全方向测回。

所謂史賴伯全組合测角法，不是观测方向，而是观测在一个测站上全部方向所組合的一切角度，該項角度称为組合角，同时每个組合角均用相同的测回数目加以观测。例如图46.1的测站O上共有四个目标：P_1、P_2、P_3、P_4；任意两个目标組成一个組合角，則全部組合角如下：

$$
\begin{array}{ccc}
(1\cdot2) & (1\cdot3) & (1\cdot4) \\
 & (2\cdot3) & (2\cdot4) \\
 & & (3\cdot4)
\end{array}
$$

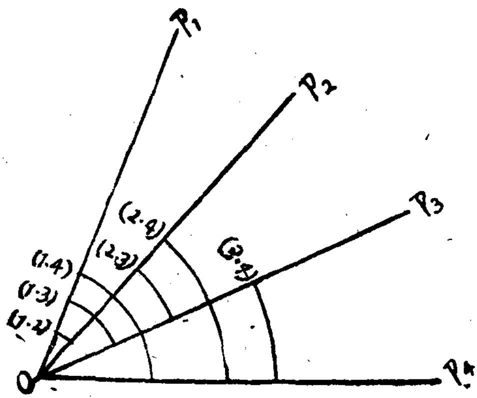

图 46.1

一般情况，如果在一个测站上包括有n个方向时，則全部組合角的数目为$\frac{1}{2}n(n-1)$个。

在一个测站上不論采用那一种方法作水平角观测，为了增加观测的精度起見，一般都要进行多余观测。严格地說，在每一个测站上所作的多余观测应当与整个三角網中的几何条件一起进行平差。例如在一个测站上有n个方向，就只有$(n-1)$个独立的角度是为未知数。当测站上所观测的角度多于$(n-1)$个时，可以选擇$(n-1)$个独立角度作为未知数，而按間接观测平差法列出所有观测角度的誤差方程式。但是在整个三角網內还存在着必須滿足的几何条件（比如§38內所列举的三角形內角閉合条件就是几何条件的一种），它們也可以用各测站上的独立角度来列出。如果是严密平

差，就必須将測站上的誤差方程式与三角網的几何条件一起平差，但是这种解算工作是非常复杂的。

在实际工作中，我們是将測站上的誤差方程式先独立地进行平差，称为測站平差。为此，我們采用完全方向測回或史賴伯全組合測角法进行观測，經过測站平差以后，就得到了等权的完全方向組。由于組內所有方向的权都相等，所以由任意两个方向所組合的角度的权也是相等的。我們再将这些等权的方向平差值或角度平差值作为独立的观測值来进行三角網的平差。最后就获得严密的結果。

基于以上原因，在水平角观測完毕后就进行測站平差，从而編制观測方向表，以便进行三角網的平差。

§47 完全方向測回之測站平差

設在一个測站上用方向观測法或全周方向观測法将所有的 n 个方向观測 m 个測回；現在研究，如何由这些观測的結果中求出每个方向的最或是值，并确定观測值和最或是值的中誤差。

表 54

測回	目标 P_1	目标 P_2	目标 P_3	目标 P_4	每測回观測方向值的总和
Ⅰ	l_1'	l_2'	l_3'	l_4'	$[l']$
Ⅱ	l_1''	l_2''	l_3''	l_4''	$[l'']$
Ⅲ	l_1'''	l_2'''	l_3'''	l_4'''	$[l''']$
和	$[l_1]$	$[l_2]$	$[l_3]$	$[l_4]$	$[l]$

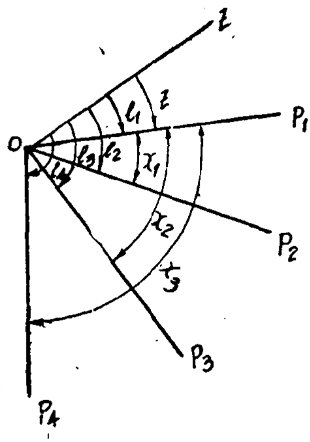

图 47.1

如图47.1所示，在测站O上观测P_1、P_2、P_3、P_4四个目标共三个测回（$m=3$），在每测回中所得到的观测值如表54所示。

在4个方向中有3个独立的角度未知数，令它們的最或是值为：

$$\angle P_1OP_2=x_1,\ \angle P_1OP_3=x_2,\ \angle P_1OP_4=x_3 \cdots\cdots\cdots\cdots(47.1)$$

此外，对于每一个测回还要取一个定向角，即起始方向的水平度盘讀数与水平度盘0分划綫所构成的角度；用z'、z''、z'''表示各测回的定向未知数。当我們将3个测回中的起始方向的观测值l_1'、l_1''、l_1'''都化为零时，則定向角实际上就是这三个测回的起始方向的观测誤差。

現在用：v_1'、v_2'、v_3'、v_4'表示测回Ⅰ各方向观测值的誤差，

v_1''、v_2''、v_3''、v_4''表示测回Ⅱ各方向观测值的誤差，

v_1'''、v_2'''、v_3'''、v_4'''表示测回Ⅲ各方向观测值的誤差。

并写出各测回的誤差方程式及其和数$[v']$、$[v'']$、$[v''']$如下：

$$\left.\begin{array}{llllll}
\text{测回Ⅰ：} & v_1'= & & & & +z'-l_1' \\
 & v_2'= & x_1 & & & +z'-l_2' \quad \text{此处} l_1'=0\text{及}\ v_1'=+z' \\
 & v_3'= & & x_2 & & +z'-l_3' \\
 & v_4'= & & & x_3 & +z'-l_4' \\
\hline
 & \multicolumn{5}{l}{[v']=0=x_1+x_2+x_3+4z'-[l']} \\
\text{测回Ⅱ：} & v_1''= & & & & +z''-l_1'' \\
 & v_2''= & x_1 & & & +z''-l_2'' \quad \text{此处} l_1''=0\text{及}\ v_1''=+z'' \\
 & v_3''= & & x_2 & & +z''-l_3'' \\
 & v_4''= & & & x_3 & +z''-l_4'' \\
\hline
 & \multicolumn{5}{l}{[v'']=0=x_1+x_2+x_3+4z''-[l'']} \\
\text{测回Ⅲ：} & v_1'''= & & & & +z'''-l_1''' \\
 & v_2'''= & x_1 & & & +z'''-l_2''' \quad \text{此处} l_1'''=0\text{及}\ v_1'''=+z''' \\
 & v_3'''= & & x_2 & & +z'''-l_3''' \\
 & v_4'''= & & & x_3 & +z'''-l_4'''
\end{array}\right\}(47.2)$$

$$\left.\begin{array}{l}[v'''] = 0 = x_1 + x_2 + x_3 + 4z''' - [l'''] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad [l_1] = 0 \text{及} [v_1] = +[z]\end{array}\right\}$$

将(47.2)式内三个和数$[v']$、$[v'']$、$[v''']$相加后，并乘以负号，则

$$-[v'] - [v''] - [v'''] = 0 = -3x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 4[z] + [l] \quad \cdots\cdots (47.3)$$

由(47.2)式内的12个誤差方程式列出之法方程式如下:

$$\left.\begin{array}{l}
3x_1 \qquad\qquad + z' + z'' + z''' - [l_2] = 0 \\
\qquad 3x_2 \qquad + z' + z'' + z''' - [l_3] = 0 \\
\qquad\qquad 3x_3 + z' + z'' + z''' - [l_4] = 0 \\
x_1 + x_2 + x_3 + 4z' \qquad\qquad - [l'] = 0 \\
x_1 + x_2 + x_3 \qquad + 4z'' \qquad - [l''] = 0 \\
x_1 + x_2 + x_3 \qquad\qquad + 4z''' - [l'''] = 0 \\
\text{式内:} \quad [l_2] = l_2' + l_2'' + l_2''' \\
\qquad\qquad [l_3] = l_3' + l_3'' + l_3''' \\
\qquad\qquad [l_4] = l_4' + l_4'' + l_4''' \\
\qquad\qquad [l] = [l_1] + [l_2] + [l_3] + [l_4] \\
\qquad\qquad\quad = [l'] + [l''] + [l''']
\end{array}\right\} (47.4)$$

将(47.4)式的后面三个法方程式相加，則得到:

$$3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4[z] - [l] = 0$$

此即(47.3)式；然后将(47.4)式前面的三个法方程式与(47.3)式相加，即求得3个定向角未知数之和为:

$$-(z' + z'' + z''') = -[z] = -[l] + [l_2] + [l_3] + [l_4] = -[l_1] \quad \cdots\cdots (47.5)$$

l_1为各测回起始方向的观测值，已化为零，故$[l_1]=0$，由此:

$$[z] = 0 \quad \cdots\cdots (47.6)$$

由(47.4)式的前面三个法方程式就可以求得三个未知数x_1、x_2、x_3如下:

$$x_1=\frac{[l_2]}{3},\quad x_2=\frac{[l_3]}{3},\quad x_3=\frac{[l_4]}{3}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(47.7)$$

并由（47.2）式内的 $[v']$、$[v'']$、$[v''']$ 三式分别求得定向角未知数 z'、z''、z'''之值如下：

$$\left.\begin{aligned}z'&=\frac{-x_1-x_2-x_3+[l']}{4}\\ z''&=\frac{-x_1-x_2-x_3+[l'']}{4}\\ z'''&=\frac{-x_1-x_2-x_3+[l''']}{4}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(47.8)$$

实际上在平差时z'、z''、z'''之值是不需要計算的。

如果我們引用[1]、[2]、[3]、[4]代表方向P_1、P_2、P_3、P_4的最或是值，显然：

$$[1]=\frac{[l_1]}{3}=0,\ [2]=\frac{[l_2]}{3},\ [3]=\frac{[l_3]}{3},\ [4]=\frac{[l_4]}{3}\cdots\cdots(47.9)$$

由此得出結論，采用完全方向测回观測时，将各测回的起始方向观测值化为零以后，各方向的平差值（最或是值）就是該方向在各测回內观測值的平均值。

設在测站上观測的方向数目为 n 个，而测回的数目为 m个，則(47.7)式的一般形式为：

$$x_1=\frac{[l_2]}{m},x_2=\frac{[l_3]}{m},x_3=\frac{[l_4]}{m},\cdots\cdots,x_{n-1}=\frac{[l_n]}{m}\cdots\cdots\cdots(47.10)$$

同时(47.9)式的一般形式为：

$$[1]=\frac{[l_1]}{m}=0,[2]=\frac{[l_2]}{m},[3]=\frac{[l_3]}{m},\cdots,[n]=\frac{[l_n]}{m}\cdots\cdots(47.11)$$

为了計算 v 和 $[vv]$，我們首先将测回 I 的誤差方 程 式及其和数 $[v']$ 改写为下列形式，并以 d_i' 表示各方向平差值与观測值之差数，則：

$$\left.\begin{aligned}
v_1'&=(0-l_1')+z'=d_1'+z' \qquad \text{此处} d_1'=0\\
v_2'&=(x_1-l_2')+z'=d_2'+z'\\
v_3'&=(x_2-l_3')+z'=d_3'+z'\\
v_4'&=(x_3-l_4')+z'=d_4'+z'\\
\hline
[v']&=0=[(x-l')]+4z'=[d']+4z' \text{或} z'=-\frac{[d']}{4}
\end{aligned}\right\}\quad(47.12)$$

这样就得到了:

$$\left.\begin{aligned}
v_1'&=d_1'-\frac{[d']}{4}\\
v_2'&=d_2'-\frac{[d']}{4}\\
v_3'&=d_3'-\frac{[d']}{4}\\
v_4'&=d_4'-\frac{[d']}{4}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(47.13)$$

将(47.13)式中的各式自乘，并总和之，则得到:

$$\begin{aligned}
v_1'^2&=d_1'^2-\frac{2d_1'[d']}{4}+\frac{[d']^2}{4^2}\\
v_2'^2&=d_2'^2-\frac{2d_2'[d']}{4}+\frac{[d']^2}{4^2}\\
v_3'^2&=d_3'^2-\frac{2d_3'[d']}{4}+\frac{[d']^2}{4^2}\\
v_4'^2&=d_4'^2-\frac{2d_4'[d']}{4}+\frac{[d']^2}{4^2}\\
\hline
[v'v']&=[d'd']-\frac{2[d'][d']}{4}+4\frac{[d']^2}{4^2}
\end{aligned}$$

或 $$[v'v']=[d'd']-\frac{1}{4}[d']^2$$

同样可以得到测回Ⅱ及测回Ⅲ的

$$\left.\begin{aligned}&[v''v'']及[v'''v''']:\\&[v''v'']=[d'd'']-\frac{1}{4}[d'']^2\\&[v'''v''']=[d''d'']-\frac{1}{4}[d'']^2\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(47.14)$$

将(47.14)式内各测回的$[v'v']$相加，则得到：

$$[vv]=[dd]-\frac{1}{4}\Sigma[d]^2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(47.15)$$

設在測站上观測方向的数目为n个，測回数目为m个，则(47.15)式的一般形式如下：

$$[vv]=[dd]-\frac{1}{n}\Sigma[d]^2 \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(47.16)$$

(47.16)式內：

$$\left.\begin{aligned}&[vv]=[v'v']+[v''v'']+[v'''v''']+\cdots\cdots+[v^{(m)}v^{(m)}]\\&[dd]=[d'd']+[d''d'']+[d'''d''']+\cdots\cdots+[d^{(m)}d^{(m)}]\\&\Sigma[d]^2=[d']^2+[d'']^2+[d''']^2+\cdots\cdots+[d^{(m)}]^2\end{aligned}\right\}$$

因为測站上观測方向的数目为n个，而測回数目为m个，观測值总数等于mn个，而未知数的数目等于$(n-1)$个独立角度加上m个定向角，故多余观測之数目为：

$$mn-(m+n-1)=(m-1)(n-1),$$

因此，根据間接观測平差法求每次观測的中誤差公式，就可以得到每个方向观測值的中誤差为：

$$\mu=\pm\sqrt{\frac{[vv]}{(m-1)(n-1)}}=\pm\sqrt{\frac{[dd]-\frac{1}{n}\Sigma[d]^2}{(m-1)(n-1)}}\quad\cdots\cdots\cdots(47.17)$$

既然各方向的平差值是由m个測回的方向观測值求得的，如(47.11)式所示，則不难想象各方向平差值的中誤差为：

$$M=\pm\frac{\mu}{\sqrt{m}}=\sqrt{\frac{[dd]-\frac{1}{n}\Sigma[d]^2}{m(m-1)(n-1)}}\quad\cdots\cdots\cdots(47.18)$$

［例47.1］完全方向測回之測站平差实例(表55)：

表 55

测站：II_{18}

测回号次	视准点												$[d']$	$[d']^2$
	II_{19}	d	d^2	II_7	d	d^2	II_{13}	d	d^2	II_9	d	d^2		
1	0°0′00″.00			27°44′26″.23	−3.64	13.25	41°59′19″.18	+0.23	0.05	121°52′24″.63	+0.41	0.17	−3.00	9.00
2	0			21 .67	+0.97	0.94	19 .82	−0.41	0.17	25 .17	−0.13	0.02	+0.43	0.19
3	0			24 .85	−2.21	4.88	18 .53	+0.68	0.74	27 .40	−2.36	5.57	−3.71	13.76
4	0			21 .42	+1.22	1.49	17 .67	+1.74	3.03	23 .67	+1.37	1.88	+4.33	18.70
5	0			23 .28	−0.64	0.41	22 .08	−2.67	7.13	27 .78	−2.74	7.51	−6.05	36.60
6	0			21 .37	+1.27	1.61	17 .87	+1.54	2.37	23 .77	+1.27	1.61	+4.08	16.65
7	0			21 .25	+1.39	1.93	19 .45	−0.04	0	23 .05	+1.99	3.96	+3.34	11.16
8	0			20 .97	+1.67	2.79	20 .67	−1.26	1.59	24 .87	+0.17	0.03	+0.58	0.34
Σ	0			181 .09	+0.03	27.30	155 .29	−0.01	15.08	200 .34	−0.02	20.75	0	106.44
平均	0			22 .64			19 .41			25 .04				

方向观测中誤差：$\mu=\sqrt{\frac{[d^2]-\frac{1}{n}\Sigma[d]^2}{(n-1)(m-1)}}=\sqrt{\frac{63.13-26.61}{3\times7}}=\pm1''.32$；测站平差后方向中誤差：$M=\frac{\mu}{\sqrt{m}}=\pm0''.47$；

n—方向数目；m—测回数目。

在低級三角点上作測站平差时，可以采用簡單的近似方法来估算每个方向观測值的中誤差μ。在叙述这个方法以前，首先将平均誤差t与中誤差m的关系說明一下。

設有n个观測值之眞誤差为ε_1、$\varepsilon_2\cdots\varepsilon_n$；其最或是誤差为$v_1$、$v_2\cdots v_n$；則根据第二章§6，知道：

平均誤差：　　$t=\dfrac{[|\varepsilon|]}{n}$

中誤差：　　$m=\sqrt{\dfrac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}}=\sqrt{\dfrac{[vv]}{n-1}}$

由此得到：

$$\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}=\frac{[vv]}{n-1}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(47.19)$$

将上式內的$[\varepsilon\varepsilon]$及$[vv]$，分别用下面的近似式子代替之，卽：

$$[\varepsilon\varepsilon]\approx[|\varepsilon|]^2\text{及}[vv]\approx[|v|]^2$$

則得到眞誤差ε与最或是誤差v之間的近似关系如下：

$$[|\varepsilon|]=[|v|]\sqrt{\frac{n}{n-1}}$$

由此就可以得到用最或是誤差v来表示平均誤差的公式：

$$t=\frac{[|\varepsilon|]}{n}=\frac{[|v|]}{\sqrt{n(n-1)}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(47.20)$$

在或然率理論中証明，中誤差与平均誤差的关系：

$$m=1.253\,t$$

最后得到中誤差的近似公式：

$$m=1.253\frac{[|v|]}{\sqrt{n(n-1)}}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(47.21)$$

公式(47.21)具体应用于低級三角測量測站平差时，令n为測站上方向数目，m为观測測回数目[卽(47.21)式內的n]，d为每一方向观測值与平均值之差[卽(47.21)式內的v]，于是得到每个方向观測值的中誤差μ的近似值：

$$\mu = 1.253 \frac{\Sigma[|d|]}{\sqrt{m(m-1)}} \times \frac{1}{n}$$

令 k 为:

$$k = \frac{1.253}{\sqrt{m(m-1)}}$$

則每个方向观測值的中誤差:

$$\mu = k \frac{\Sigma[|d|]}{n} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (47.22)$$

(47.22)式內的 k 是一个随測回数目 m 而不同的常数，茲将它列在表56內:

表 56

m	k	m	k
3	0.511	8	0.167
4	0.361	9	0.148
6	0.228	12	0.109

最后每个方向平差值之中誤差 M，仍按(47.18)式計算之，即:

$$M = \frac{\mu}{\sqrt{m}}$$

[例47.2] 将[例47.1]按近似方法估算每个方向观測值的中誤差。

求測站平差后的方向值仍按表55，惟可以略去該表內 d^2、$[d']$ 及 $[d']^2$ 諸栏; 然后按每个方向将 $|d|$ 总和之，得到:

方向 II_7 的 $[|d|]$ 为: 13.01

方向 III_{18} 的 $[|d|]$ 为: 8.57

方向 I_9 的 $[|d|]$ 为: 10.44

总和之: $\Sigma[|d|] \doteq 32.02$

$m=8$，查表56得到：$k=0.167$。

按(47.22)式得到每个方向观测值的中誤差：

$$\mu=0.167\times\frac{32.02}{4}=\pm 1''.34$$

此間按近似方法所求得的μ与上述严密方法所求得的仅相差$0''.02$，但演算工作却省略不少。

§48 史賴伯全組合測角法之測站平差

假設按史賴伯全組合測角法观測图46.1內P_1、P_2、P_3、P_4四个方向之間的全部組合角，命各角的观測值和改正数为：

$$\begin{array}{lll} (1\cdot2) & (1\cdot3) & (1\cdot4) \\ & (2\cdot3) & (2\cdot4) \\ & & (3\cdot4) \end{array} \qquad \begin{array}{lll} v_{1\cdot2} & v_{1\cdot3} & v_{1\cdot4} \\ & v_{2\cdot3} & v_{2\cdot4} \\ & & v_{3\cdot4} \end{array}$$

幷設观測值$(1\cdot2)$、$(1\cdot3)$、$(1\cdot4)$的平差值$[1\cdot2]$、$[1\cdot3]$、$[1\cdot4]$作为未知数，于是可以列出誤差方程式如下：

$$\left.\begin{array}{l} v_{1\cdot2}=[1\cdot2]-(1\cdot2) \\ v_{1\cdot3}=+[1\cdot3]-(1\cdot3) \\ v_{1\cdot4}=+[1\cdot4]-(1\cdot4) \\ v_{2\cdot3}=-[1\cdot2]+[1\cdot3]-(2\cdot3) \\ v_{2\cdot4}=-[1\cdot2]+[1\cdot4]-(2\cdot4) \\ v_{3\cdot4}=-[1\cdot3]+[1\cdot4]-(3\cdot4) \end{array}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(48.1)$$

由(48.1)式組成法方程式为：

$$\left.\begin{array}{l} 3[1\cdot2]-[1\cdot3]-[1\cdot4]-(1\cdot2)+(2\cdot3)+(2\cdot4)=0 \\ -[1\cdot2]+3[1\cdot3]-[1\cdot4]-(1\cdot3)-(2\cdot3)+(3\cdot4)=0 \\ -[1\cdot2]-[1\cdot3]+3[1\cdot4]-(1\cdot4)-(2\cdot4)-(3\cdot4)=0 \end{array}\right\}(48.2)$$

将(48.2)式的三个式子相加，得出：

$$[1\cdot2]+[1\cdot3]+[1\cdot4]-(1\cdot2)-(1\cdot3)-(1\cdot4)=0\cdots\cdots\cdots(48.3)$$