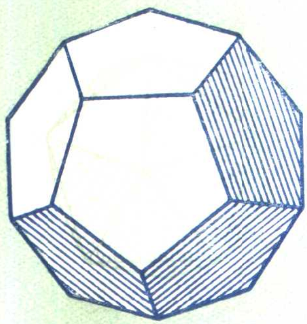
恩·阿·格拉哥列夫 著

初等几何学

立体部分



人民教育出版社

初等几何学

立体部分

恩·阿·格拉哥列夫 著
余元庆 管承仲 刘 牧 譯

人民教育出版社

本书是根据俄罗斯苏維埃联邦社会主义共和国教育部教育出版社出版的恩·阿·格拉哥列夫所著“初等几何学”（立体部分）1954年莫斯科第三版譯出的。

本书系統地闡述空間图形的重要性質以及表面积和体积的求法，特别对于平行移动、空間图形的旋轉和位移、空間图形的对称以及正多面体等，叙述頗为詳尽，并且在每一章的后面，配备有很多的練习題。

本书可供我国中学数学教师和自学者的参考。

*

Н. А. ГЛАГОЛЕВ

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

СТЕРЕОМЕТРИЯ

УЧПЕДГИЗ * 1954.

本书根据俄罗斯苏維埃联邦社会主义共和国教育部教育出版社1954年莫斯科俄文版譯出

*

初等几何学

立体部分

〔苏联〕恩·阿·格拉哥列夫 著

余元慶　管承仲　刘　收 譯

北京市书刊出版业营业許可証出字第二号

人民教育出版社出版（北京景山东街）

新华书店发行

北京市印刷一厂印刷

統一书号：7012·286　字数：111千

开本：787×1092公厘　1/32　印張：$5\frac{9}{16}$

1956年12月第一版

1957年5月第一次印刷

北京：1—10,700册

定价（6）0.46元

目　录

引　言

在平面内表示空間图形

§1　概說

在立体几何里所研究的是所有的点不全在一个平面內的几何图形的性質。这种几何图形叫做空間图形。几何体就是它的例子。为了便于想象空間图形的真实形状，通常利用看起来会产生和空間图形大致类似的印象的一些图。但是空間图形不可能完全放在一个平面內，所以在这些图中，对于图形个别部分的形状和大小难免要有些歪曲。例如，实际上互相离得很远的两点，在图中可能就很近。这一点学生很容易从各种不同的画片和照片等里面看出来。这些图对于图形的一般观察是十分适宜的，但是要从它們里面看出图形的几何性質就非常困难。因此，用来研究空間图形的图要按照下面指示的方法那样来作。

§2　空間图形的平行射影

假定我們有一个正方体的鉄絲架子。把它放在黑板的前面让太阳光照着，我們就可以看到这架子在黑板上的影子。这个影子可以作为正方体在平面內的形象。由于太阳光綫的光源很远，可以把太阳光綫当作是平行的。因此，这个影子叫做正方体的**平行射影**，而产生它的方法叫做**平行射影法**。考察这种形象是怎样产生的，容易看出下列两点：

1. 平行并且相等的綫段，例如正方体中平行的棱，它們

的形象也是平行并且相等的綫段。

2. 如果任意一条綫段，例如正方体的棱，被分成 $m:n$ 的两个部分，那末它的形象也是被分成 $m:n$ 的綫段。

在平面内表示空間图形，通常也遵守这个法則。用这种方法得到的形象，如果在很远的距离来看，它和空間图形的真实形状是相符合的。

第一章　直綫和平面

I　直綫和平面的相互位置

§3　平面在图上的表示法

有許多物体的表面很象几何平面，这些表面具有矩形的形状。例如，窗玻璃和书桌面等等。按照上面所說的方法，矩形在图上的平行射影是一个平行四边形。因此，通常把平面表示成平行四边形的形状。这个平行四边形通常用一个字母来表示，例如，“平面M”（图 1）。有的时候为了更直观，平行四边形的边用曲綫来替代。

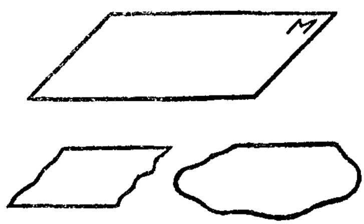


图　1

§4　平面的基本性質

公理 1　过不在一条直綫上的任何三个点可以作一个平面，并且只可以作一个。

2　如果两个平面有一个公共点，那末它們就相交于过这个点的一条直綫。

3　如果一条直綫上的两个点在一个平面内，那末这条直綫上所有的点都在这个平面内（簡单地説，这条直綫全部在这个平面内）。

推論1　**过一条直綫和这条直綫外的一个点，可以作一个平面，并且只可以作一个。**

事实上，已知的直綫上的任意两个点，連同已知点，組成了不在一条直綫上的三个点。根据公理1，过这三个点可以作唯一的平面，而根据公理3，已知的直綫在这个平面内。

推論2　**过两条相交的直綫可以作一个平面，并且只可以作一个。**

事实上，如果在每一条直綫上，在这两条直綫的交点外各取一个点，那末它們連同这个交点，組成了不在一条直綫上的三个点。过这三个点可以作唯一的平面（公理1），而两条已知的直綫都在这个平面内。

推論3　**过两条平行的直綫可以作一个平面，并且只可以作一个。**

事实上，根据定义，两条平行的直綫一定在一个平面内；因为过平行綫中的一条和另一条上的任意一个点只可以作一个平面（推論1），所以这个平面是唯一的。

§5　平面繞着直綫旋轉

过任意一条直綫可以作无数个平面。事实上，假定有一

条已知的直綫 a(图 2)，在这条直綫外取任意一点 A，过点 A 和直綫 a 就可以作唯一的平面(§4)；把它叫做平面 M。在平面 M 外取一个新的点 B，过点 B 和直綫 a 再作一个平面，把它叫做平面 N。因为点 B 在平面 N 內，而它不属于平面 M，所以平面 N 不能和平面 M 重合。我們还可以在平面 M 和 N 外，再取一个新的点 C，过点 C 和直綫 a 作一个新的平面，把它叫做平面 P。因为点 C 在平面 P 內，但是它既不属于平面 M，也不属于平面 N，所以平面 P 既不和 M 重合，也不和 N 重合。继續再取一些新的点，用这个方法我們就会得到經过已知直綫 a 的一些新的平面。很明显，这样的平面可以得到无数个，可以把它們看作是繞着直綫 a 旋轉的同一个平面的不同的位置。

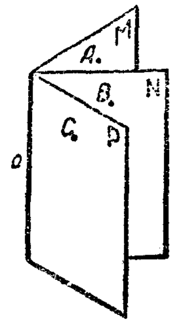


图 2

这样，我們可以看出平面的又一个性质：**平面可以繞着平面內的任何一条直綫旋轉。**

§6 直綫和平面可能的相互位置

从上面可以推出:

1. 两条直綫可以相交，这时它們在一个平面內。

2. 两条直綫可以互相平行，这时它們也在一个平面內。

3. 两条直綫可以既不相交也不平行。例如，把正方体里不在同一个面內的两条不平行的棱延长的时候所得的两条直綫(AB 和 EF，图 3)。

这样的两条直綫叫做**异面直綫**。

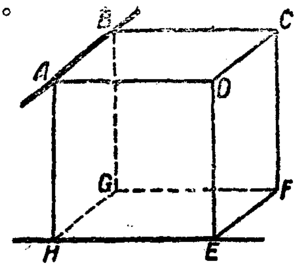


图 3

直綫和平面可以有一个公共点，这时直綫和平面**相交**。不在平面內的直綫和平面相交，不能多于一个交点。直綫和平面的交点，叫做这条直綫在平面內的**足**。

如果直綫和平面沒有一个公共点，那末它們叫做**互相平行**。直綫和平面有这样位置的可能性，将在以后証明(§11)。

两个平面可以相交于一条直綫，并且这时它們在这条直綫外沒有其他的公共点(§4 公理 1)。

如果两个平面完全沒有公共点，那末叫做**互相平行**。两个平面有这样位置的可能性，将在以后証明(§14)。

II 空間图形作图題

§7 作图題的提出

平面几何里所有的作图，都是在一个平面內用画图仪器来完成的。

要作空間图形，用画图仪器已經不够，因为在一个平面內画成空間图形是不可能的。此外，在作空間图形的时候，还要遇到一种新的元素——平面，而作平面是不可能用这种簡单的方法来完成的。

因此，在作空間图形的时候，必須正确地确定完成某一个作图的意义，特别是作一个平面的意义。

以后我們总認为:

1）如果找到了确定一个平面的位置的元素(§4)，这个平面就已經作成了；这就是說，我們会作：过不在一条直綫上的三个点的平面，过一条直綫和这条直綫外一个点的平面，过两条相交的直綫或者过两条平行的直綫的平面。

2）如果已經知道两个相交的平面，它們的交綫也就是已知的。

3）如果已經知道一个平面，我們就可以在这个平面內完成平面几何里所有的作图。

以后我們認为**在空間完成作图**，就是要归結到有限次数的下面三种基本作图。

1）过不在一条直綫上的三个点作平面；

2）求两个平面的交綫；

3）用圓規和直尺在所給的或者所作出的平面內完成作图。

我們来看几个例子。

§8

作图题 1　作已知直綫 a 和已知平面 P 的交点（图 4）。

解　在平面 P 內取任意一点 A。过点 A 和直綫 a 作平面 Q 和平面 P 相交于某一条直綫 b。在平面 Q 內求出直綫 a 和直綫 b 的交点 C。这点就是所

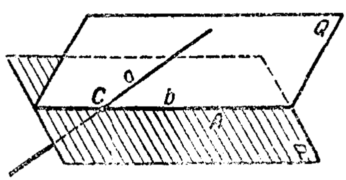


图 4

求的点。如果直綫 a 和 b 平行，那末作图題就沒有解。

§9

作图題2　过已知直綫 a 外的已知点 A 作直綫平行于直綫 a。

解　过直綫 a 和点 A 作平面 M 并且在这个平面內过点 A 作一条直綫平行于直綫 a。

这个作图題只有一解。事实上，根据平行綫的定义(平面部分，§36)，平行于直綫 a 的直綫应当和 a 在一个平面內。这个平面应当也含有所求的直綫經过的点 A。但是过直綫 a 和点 A 只可以作一个平面——这是平面 M。这就是說，所求的直綫应当在平面 M 內。但是根据平行綫公理，在平面 M 內过点 A 只可以作一条直綫平行于已知直綫 a。

§10

作图題3　过已知点 A 作直綫和两条不过点 A 的已知异面直綫 a 和 b 相交。

解　因为所求的直綫应当过点 A (图 5)并且和直綫 a 相交，所以它在过直綫 a 和点 A 的平面 M 內(因为所求的直綫上的两个点：点 A 和所求的直綫与直綫 a 的交点，应当在平面 M 內)。它也在过点 A 和直綫 b 的平面 N

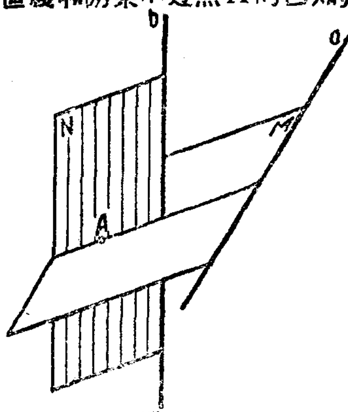


图 5

内。这就是說，它是平面M和N的交点。因此，应当这样来作图：过点A和直線a作平面M，过点A和直線b作平面N。只要平面M和N的交綫不和直線a或者直綫b平行，这条交綫就是所求的直綫。如果交綫和a或者b平行，那末作图題沒有解。

III 平行的直綫和平面

§11 直綫和平面平行的条件

定理 **如果一条直綫平行于一个平面內的某一条直綫，那末它也就平行于这个平面。**

已知：直綫a在平面M內并且直綫$b \parallel a$。

求証：$b \parallel M$（图6）。

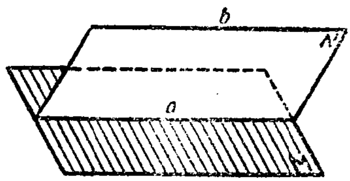


图 6

平行直綫a和b在同一个平面N內。平面M和N相交于直綫a。假如直綫b和平面M相交，那末它也要和直綫a相交。由于$a \parallel b$，这是不可能的。因此，$b \parallel M$。

逆定理 **如果一条直綫和一个平面平行，那末过已知直綫并且和已知平面不平行的任何平面，交这个平面于一条平行于已知直綫的直綫。**

已知：平行于平面M的直綫b（图6）和过b并且交M于直綫a的平面N。

求証：$a \parallel b$。

假如a和b不平行，因为它們在一个平面內，它們就要相

交。假如 b 和 a 相交，那末 b 就要交 a 所在的平面 M 于 b 和 a 的交点。由于 $b \parallel M$，这是不可能的。因此，$a \parallel b$。

§12 过平行直綫的平面

定理　过两条平行直綫的两个不平行平面，相交于一条平行于已知的两条直綫的直綫。

已知：$a \parallel b$（图7）；M和N是过 a 和 b 的不平行平面；c 是它們的交綫。

求証：$c \parallel a$ 和 $c \parallel b$。

因为 $a \parallel b$，而 b 在 N 內，所以 $a \parallel N$。但是如果 $a \parallel N$，那末过 a 的平面M和N相交于一条平行于a（§11）的直綫。因此，$c \parallel a$。同样可以証明，$c \parallel b$。

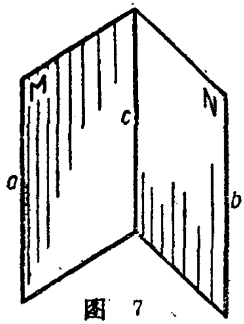


图　7

§13 平行于第三条直綫的两条直綫

定理　平行于第三条直綫的两条直綫互相平行。

已知：$a \parallel b$ 和 $a \parallel c$。

求証：$b \parallel c$（图8）。

在 c 上取任意一个点 P 并且作两个平面：平面M过 a 和 P，平面N过 b 和 P。这两个平面过平行直綫 a 和b，因而相交于一条平行于 a 和b的直綫。

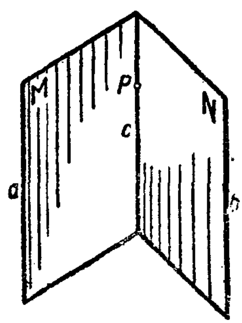


图　8

但是过点P只能作唯一的一条平行于a的直綫c。这就是說，c是平面M和N的交綫，因而它平行于直綫a，也平行于直綫b。

§14 平行的平面

定理 过两条相交直綫的平面平行于和这两条直綫平行的平面。

已知：$a \parallel M$和$b \parallel M$，N过a和b。

求証：$N \parallel M$（图9）。

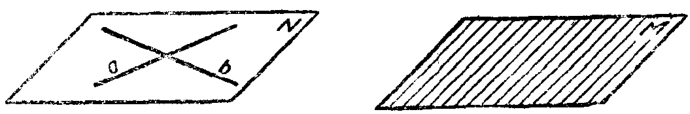


图 9

假如平面N和平面M相交，那末它們的交綫就要既平行于a，又平行于b（§11）。因此，直綫a和b就要互相平行，这和已知的条件相矛盾。所以$N \parallel M$。

注。这个定理証明了平行平面的存在。

推論 如果一个平面内的两条相交直綫分别平行于另一个平面内的两条相交直綫，那末这两个平面互相平行（§11）。

定理 两个平行平面交第三个平面于两条平行直綫。

已知：两个平行平面M和N分别交第三个平面P于直綫m和n（图10）。

求証：$m \parallel n$。

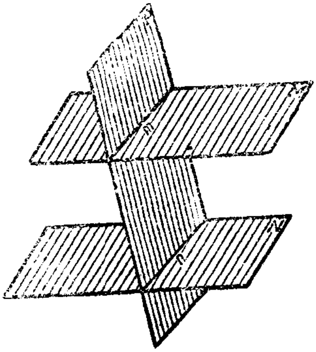


图 10

直綫m和n在同一个平面P內并且不相交。事实上，假如它們相交，那末它們的交点也就是平面M和N的公共点，由于$M \parallel N$，这是不可能的。因此，$m \parallel n$。

§15 平行平面間的綫段

定理 夾在平行平面間的平行綫段相等。

已知：平行平面M和N以及平行直綫AB和CD（图 11）。

求証：$AB=CD$。

过平行直綫AB和CD作平面P。它們交M和N于平行直綫AC和BD(§14)。綫段AB和CD是平行四边形$ACDB$的对边，因而$AB=CD$。

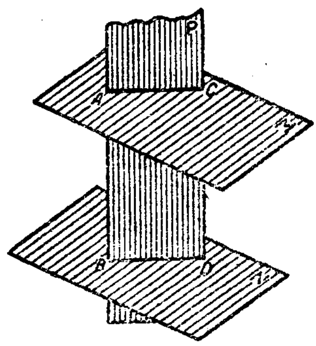


图 11

定理 两条任意直綫夾在三个平行平面間的綫段成比例。

已知：三个平行平面M、N、P，分别交两条直綫AC和DF于点A、B、C和D、E、F（图 12）。

求証：$\dfrac{AB}{BC}=\dfrac{DE}{EF}$。

作直綫 $AH \parallel DF$。

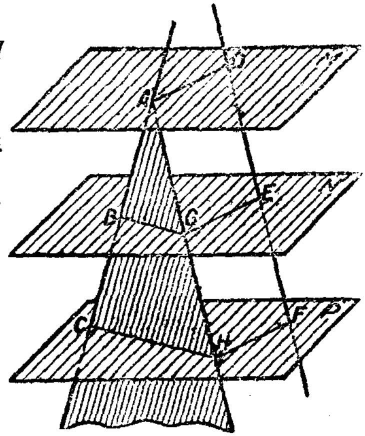


图 12

那末 $DE=AG$ 和 $EF=GH$（根据上述的定理）。

作过直綫 AC 和 AH 的平面，得三角形 ACH，在这个三角形中，$BG \parallel CH$（§14）。因此，

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AG}{GH}。$$

但是 $AG=DE$ 和 $GH=EF$，所以

$$\frac{AB}{BC}=\frac{DE}{EF}。$$

§16 对应边平行的角

定理 对应边平行并且方向相同的两个角相等。

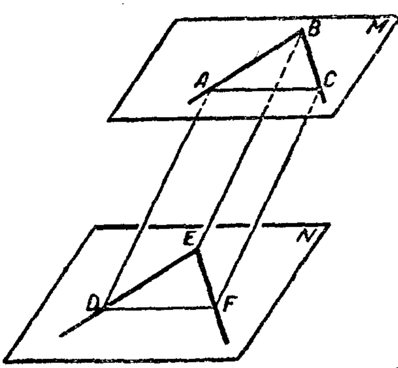


图 13

已知：角 ABC 和 DEF（图 13）分别在平面 M 和 N 內，以及射綫 BA 和 ED 平行并且方向相同，射綫 BC 和 EF 也平行并且方向相同。

求証：$\angle ABC=\angle DEF$。

根据 §14 定理的推論，$M \parallel N$。在角的两边上截取相等的綫段 $BA=ED$，BC