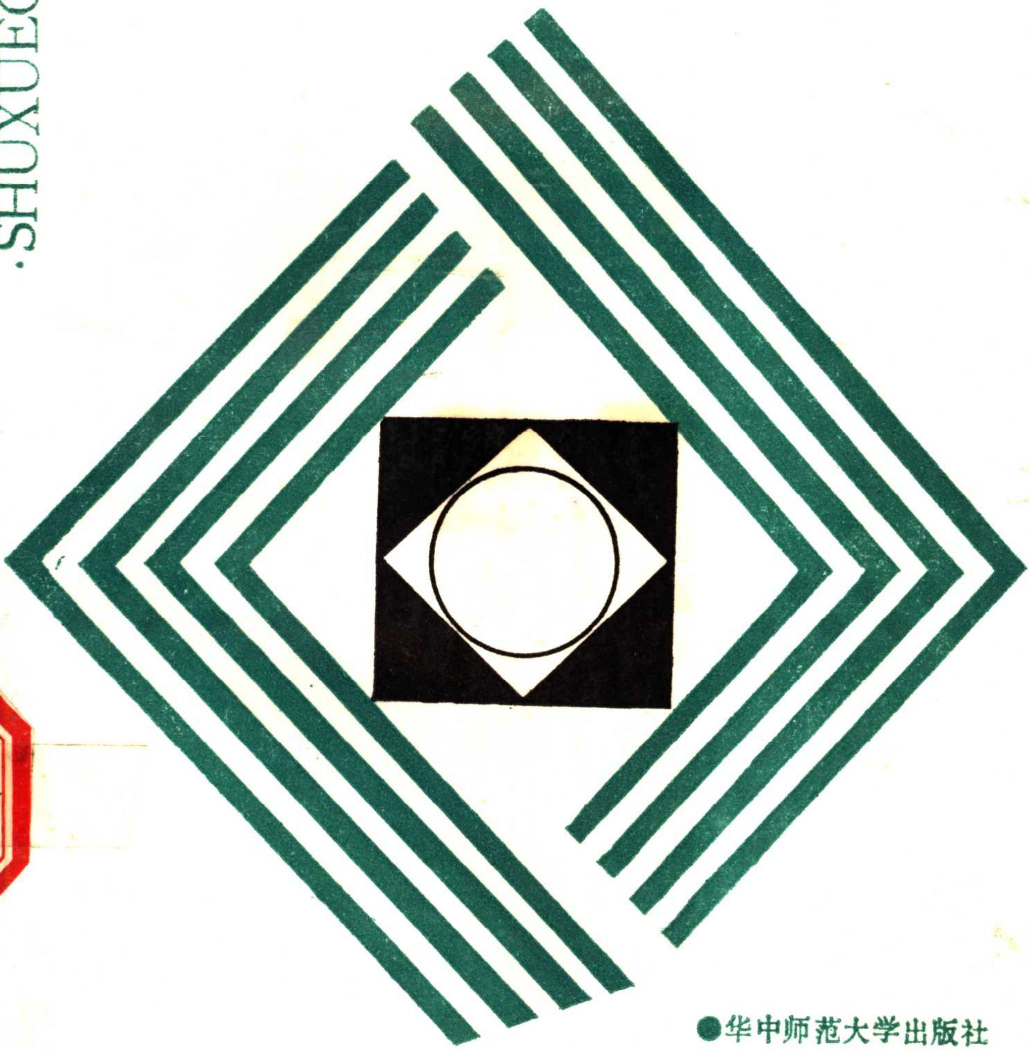
数学
规划引论

·SHUXUEGUIHUAYINLUN·



●华中师范大学出版社

数学规划引论

李修睦　李为政　编

华中师范大学出版社出版

（武昌桂子山）

新华书店湖北发行所发行

汉阳县印刷厂印刷

开本850×1168　1／32　印张10.25　字数270千

1988年8月第1版　1988年8月第1次印刷

ISBN7—5622—0059—9/O·04

印数：1—4500　定价：2.25元

内 容 簡 介

本书共分十七章，主要包含三部分内容，即线性规划，非线性规划和动态规划。还简要介绍网络流和矩阵对策的基本内容。各章后面均附有适量的习题以备选用。本书可以作为运筹学，组合最优化及应用数学等有关专业的教材或参考资料之用，也可以作为理工科高年级的选课教材之用。

前　言

数学规划是运筹学的一个重要分支，研究的对象属于最优化的范畴。它在生产实际，经济管理，工程控制以及军事等各方面，均有广泛的应用。

数学规划的基本内容，是研究条件极值问题，它的兴起要比古典极值问题晚得多。直到本世纪40年代前后，由于工农业生产的发展，商业的规模日益扩大，以及第二次世界大战的影响等，条件极值问题才较迅速地发展起来。首先应运而生的便是线性规划，特别在1947年 G．B．Dantzig 提出单纯形方法之后，线性规划的理论体系和计算方法便日趋系统和完善。随后，到了50年代，非线性规划和动态规划又相继形成和发展。直到今天，数学规划的理论和方法，已成为应用数学、组合最优化和运筹学等有关专业的重要基础。

本教材的内容由三部分组成：第一部分是线性规划。这部分较详细地叙述了线性规划的一般理论和计算方法，以及它在某些方面的应用。第二部分是非线性规划。这部分只简要介绍无约束和有约束问题的部分基本内容，并强调了与线性规划有直接联系的某些方面。第三部分是动态规划。这部分通过几个实际问题，介绍确定型与随机型的多阶段决策过程的基本内容，以及动态规划与马尔柯夫过程、存储论、排序问题等方面的联系与应用。

60年代初，在原系主任李修睦教授的主持下编写了《运筹学讲义》。1980年前后，作为规划论教材，保留了原讲义的部分内容：网络流、矩阵对策，二次规划与动态规划的部分内容。以后逐年在教学过程中经过多次较大的修改和补充，始成为当前本书

的样子。其中网络流，矩阵对政及二次规划部分，由李修睦教授编写，其余由李为政编写。

本书在编写过程中，参阅了马仲蕃等写的《数学规划讲义》，以及其它有关参考资料，并吸收了部分研究生的宝贵意见。在此一并致谢。

由于编者水平所限，难免有不当或错误之处，欢迎读者批评指正。

目　录

第一部分　线性规划

第二部分 非线性规划

第三部分　动态规划

第一部分　线性规划

引　　言

线性规划问题数学模型的基本特征是：目标函数与约束条件均为未知量的线性函数。它在理论上有较完整的数学描述，计算方法方面有行之有效的单纯形方法，在生产实际方面有着广泛的应用。

在这部分里，先介绍线性规划问题的一般方法—单纯形方法及有关的理论叙述，接着介绍运输问题与网络流，最后介绍整数线性规划和分解算法以及矩阵对策。

第一章 线性规划的基本概念

§1.1 实际例子

为了便于理解什么是线性规划问题以及它的实际背景，我们先举出如下几个实际例子。

例1 生产组织与计划安排问题。

某工厂生产A和B两种产品，已知制造产品A 1公斤，要用煤9吨、电力4瓩、劳动力（按工时计算）3个，所创造的经济价值是7万元。制造产品B 1公斤，要用煤4吨、电力5瓩、劳动力10个，所创造的经济价值是12万元。现在该工厂有煤360吨，电力200瓩，劳动力300个，问在这种限制条件下，应该生产产品A、B各多少公斤，才能使所创造的总的经济价值最高？

设该厂生产产品A、B各为x_1、x_2公斤，那么问题便是求x_1、x_2的值，满足条件：

$$
\begin{aligned}
9x_1+4x_2&\leqslant 360\\
4x_1+5x_2&\leqslant 200\\
3x_1+10x_2&\leqslant 300\\
x_1\geqslant 0,\quad x_2&\geqslant 0
\end{aligned}
$$

且使目标函数（总产值）

$$f(x_1,x_2)=7x_1+12x_2$$

达到最大值。

例2 合理购肥问题。

某生产队为了提高农作物的产量，需氮肥2100公斤，磷肥700公斤，钾肥800公斤。现有甲、乙、丙、丁四种肥料可供选

丁，它们含氮量分别为7%，5%，6%，6%；含磷量分别为1%，3%，4%，3%；含钾量分别为3%，1%，2%，2%。它们的价格假定每百公斤分别为0.9元，0.7元，0.8元，0.6元。我们的问题便是：在满足农作物所需肥料的条件下，问甲、乙、丙、丁四种肥料应各买多少公斤，才能使总的费用最少？

设购买肥料甲、乙、丙、丁的数量分别为x_1、x_2、x_3、x_4（单位：百公斤），则问题便是求一组x_j（$j=1$、2、3、4）的值，满足约束条件：

$$
\begin{aligned}
7x_1+5x_2+6x_3+6x_4 &\geqslant 2100 \\
x_1+3x_2+4x_3+3x_4 &\geqslant 700 \\
3x_1+x_2+2x_3+2x_4 &\geqslant 800 \\
x_j \geqslant 0 \qquad & j=1,\ 2,\ 3,\ 4
\end{aligned}
$$

使目标函数（总费用）

$$f=0.9x_1+0.7x_2+0.8x_3+0.6x_4$$

达到最小值。

例3　运输问题

设有某种物资，它有m个产地：A_1，A_2，…，A_m，其产量分别为a_1，a_2，…，a_m；有n个销地：B_1，B_2，…，B_n，其销量分别为b_1，b_2，…，b_n。现假定产销平衡，试求该物资的最优调运方案，使总的运输费用最少。

设C_{ij}表示从产地A_i到销地B_j的单位运费，x_{ij}表示从产地A_i到销地B_j的物资运量，那么问题便是求一组x_{ij}的值，满足条件：

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i \qquad && i=1,2,\cdots,m \\
&\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j \qquad && j=1,2,\cdots,n \\
&x_{ij}\geqslant 0 \qquad && i=1,\cdots,m;\ j=1,\cdots,n
\end{aligned}
$$

$$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i=\sum_{j=1}^{n} b_j\right)$$

使目标函数（总运费）

$$f=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$$

达到最小值。

例4 分派问题

设某单位分派n个人同时做n种工作，t_{ij}表示第i个人做第j种工作所需的时间。问如何安排，使得完成这n种工作的总时间为最少。

引进0，1变量x_{ij}

$$x_{ij}=\begin{cases}1 & \text{若第}i\text{个人分派做第}j\text{种工作}\\ 0 & \text{相反}\end{cases}$$

则上述问题便归结为：求一组x_{ij}的值（$x_{ij}=0,1$）满足条件：

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1 \qquad i=1,2,\cdots,n\text{（每人只做一种工作）}$$

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=1 \qquad j=1,2,\cdots,n\text{（每种工作都有人去做）}$$

使目标函数（总时数）

$$f=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}t_{ij}x_{ij}$$

达到最小值

例5 营养问题

设有n种食物含m种营养素，假定已知每人每天第i种营养素的最少需要量是b_i毫克，在每斤第j种食物中所含第i种营养素为a_{ij}毫克，今第j种食物每公斤单价为c_j元，问购买各种食物各多少公斤才能满足人们的需要，且使每天的开支最少？

设x_j表示购买第j种食物的公斤数，则问题便是：求一组x_j的值，满足条件：

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\geqslant b_i \qquad i=1,2,\cdots,m$$

$$x_j\geqslant 0 \qquad j=1,2,\cdots,n$$

使目标函数（总费用）

$$f=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j$$

达到最小值。

例6　合理下料问题

要用某类钢材（条材）下m种零件的毛坯，根据已往经验，人们在一种钢材上已经设计出n种不同的下料方式。设第j种下料方式可得第i种零件a_{ij}个，设第　种零件的需要量为b_i。问应采用那些下料方式，使既满足需要又用的钢材总数最少？

设用第j种方式下料的钢材总数为x_j，则上述问题可归结为：求一组x_j的值，满足条件：

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i \qquad i=1\ 2\ \cdots\ m$$

$$x_j \geqslant 0 \qquad j=1,2\ \cdots,n$$

使目标函数（钢材总量）

$$f=\sum_{j=1}^{n} x_j$$

达到最小值。

以上所举6个例子都是线性规划问题，其中有些问题后面还要详细讨论。

§1.2　线性规划问题的标准形式

上节提出的各种例子代表不同的实际问题，其目的和所需满足的约束条件也不完全相同，但就其数学模型而言，却可以一般地概述如下：

求一组变量x_j（$j=1,2,\cdots,n$）的值，满足条件：

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i\ (\text{或}\geqslant b_i) \qquad i=1,2,\cdots,m$$

$$x_j \geqslant 0 \qquad j=1,2,\cdots,n$$

使目标函数

$$f=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

达到最优值（最小值或最大值）。

这里约束条件和目标函数都是变量x_j的线性函数，我们称这样的问题为线性规划问题。

为了便于研究，我们通常要把上面的数学模型统一化为标准形式。

首先，将约束条件中的不等式变为等式。若$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i$，则在不等式的左边加上一个非负变量$x_{n+i}$使其变为等式，即$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+i} = b_i$，这些新加进的变量叫做“松驰变量”（或简称松变量）。若$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j \geqslant b_k$，则在不等式的左边减去一个非负变量$x_{n+k}$使其变为等式，即$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j - x_{n+k} = b_k$，这些新添进的变量称为剩余变量。松变量或剩余变量在目标函数中的系数令其为零，显然这样做并不影响目标函数的最优值。

其次，如果约束条件中有某个$b_i<0$，则用（－1）乘等式的两边，使b_i变为$(-b_i)>0$，即如果

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n=b_i<0$$

则用（－1）乘两边便有

$$-a_{i1}x_1-a_{i2}x_2-\cdots a_{in}x_n=-b_i>0$$

往后如果不加说明，总认为约束条件中的常数项b_i都是非负的。

最后，如果某个变量x_s是自由变量（或无约束变量），则可以从约束条件中消去此自由变量，方法是：设

$$a_{i1}x_1+\cdots+a_{is}x_s+\cdots+a_{in}x_n=b_i$$

其中$a_{is}\neq 0$，用a_{is}除两边得到

$$x_s=-\frac{1}{a_{is}}(a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n-b_i)$$

$$=-\frac{1}{a_{is}}\left(\sum_{\substack{j=1\\j\neq s}}^{n} a_{ij}x_j-b_i\right)$$

再将x_s的表达式代入其余约束条件，这样其余各约束条件中便消

去了自由变量x_s。然后，就仅考虑各非负变量求出问题的解，并将这些已求出的非负变量的值代入x_s的表达式中，便得到自由变量x_s的值。

通过以上讨论，一般线性规划问题可以表为下面的标准形式：

$$\min f=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

满足条件
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad i=1,2,\cdots,m$$
$$x_j \geqslant 0 \qquad j=1,2,\cdots,n$$

如果是求f的最大值，则可以变为求$-f=\sum_{j=1}^{n}(-c_j)x_j$的最小值，且具有相同约束条件的问题。因为若一组变量的值使f达到最大，则同一组变量的值必使$(-f)$达到最小。

线性规划的数学模型还可以写为

$$\min f = Cx$$

满足条件
$$Ax=b$$
$$x\geqslant 0$$

这里

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ a_{m1} & a_{m2}\cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$C=(c_1,c_2,\cdots c_n)$，0是n维零列向量，且$m\leqslant n$。

设有线性规划问题

$$\min f=-x_1-2x_2$$

满足条件
$$-x_1+x_2\leqslant 2$$
$$x_1+x_2\leqslant 3$$
$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0$$

引入松变量把问题化为标准形式：

$$\min f=-x_1-2x_2+0\cdot x_3+0\cdot x_4$$

满足条件
$$-x_1+x_2+x_3=2$$

$$x_1+x_2+x_4=3$$

$$x_j\geqslant 0 \qquad j=1,2,3,4$$

令

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix},$$

$$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$$

$C=(-1,-2,0,0)$，则数学模型可以写为：

$$\min f=Cx$$

满足条件 $\quad Ax=b$

$$x\geqslant 0$$

线性规划的标准模型还可以写为：

$$\min f=Cx$$

满足条件 $\quad P_1x_1+P_2x_2+\cdots+P_nx_n=b$

$$x_j\geqslant 0 \qquad j=1,2,\cdots,n$$

其中 $\quad P_j=(a_{1j},a_{2j}\cdots,a_{mj})^T \quad (j=1,2,\cdots,n)$

以上介绍的线性规划模型的三种形式，往后各有其用处。

§1.3 可行解与最优解

在开展一般性讨论之前，我们先研究一个简单的线性规划问题，有助于观察和理解线性规划约束区的结构及目标函数的变化情况。

以§1.2的线性规划问题为例

$$\min f=-x_1-2x_2 \qquad (1\cdot3-1)$$

满足条件 $\quad -x_1+x_2\leqslant 2 \qquad (1\cdot3-2)$

$$x_1+x_2\leqslant 3 \qquad (1\cdot3-3)$$

$$x_1\geqslant 0,\ x_2\geqslant 0$$

首先，将(1·3－2)、(1·3－3)取等号，便得到两条直线：

$$L_1:\ -x_1+x_2=2$$