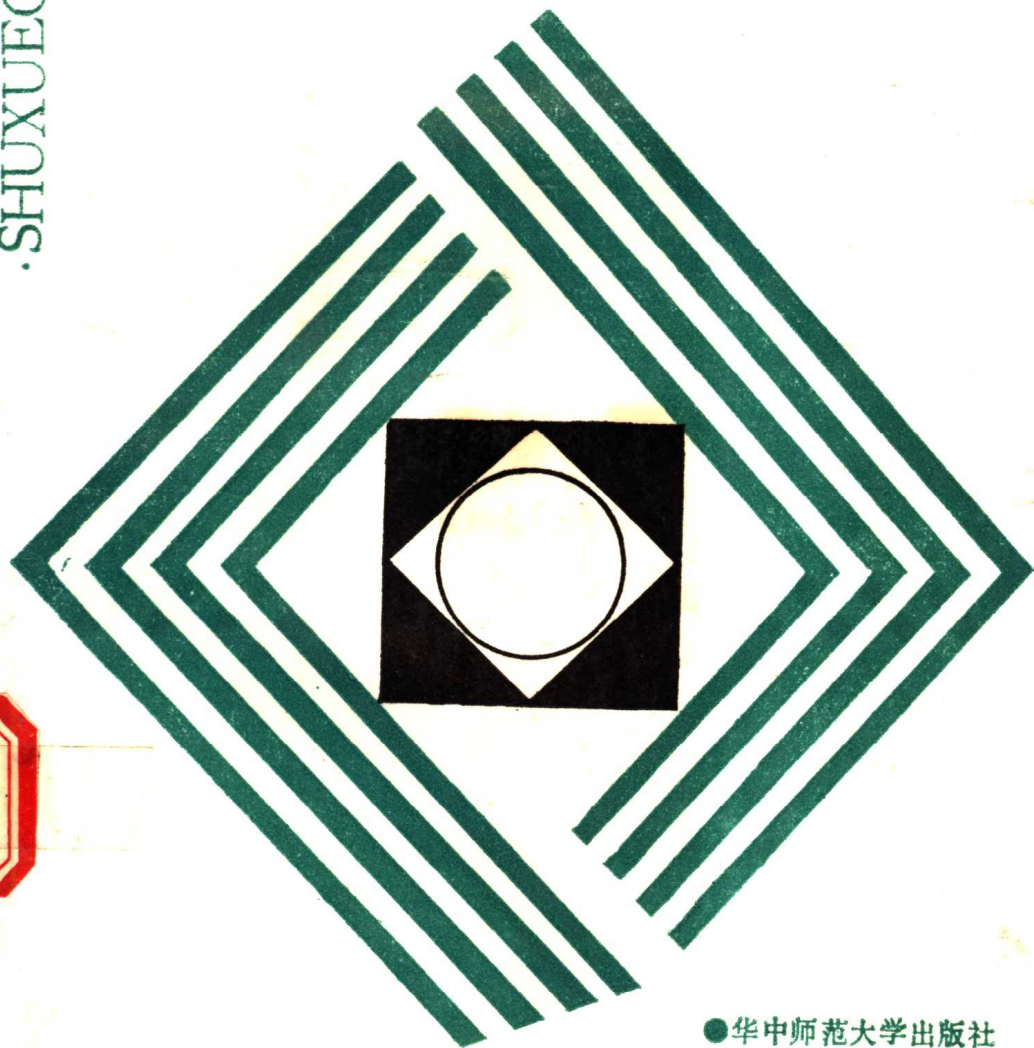


·SHUXUEGUIHUAYINLUN·

数学 规划引论



●华中师范大学出版社

数 学 规 划 引 论

李修睦 李为政 编

华中师范大学出版社出版

(武昌桂子山)

新华书店湖北发行所发行

汉阳县印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 10.25 字数 270 千

1988年 8月第1版 1988年8月第1次印刷

ISBN7-5622-0059-9/O·04

印数: 1—4500 定价: 2.25元

内 容 简 介

本书共分十七章，主要包含三部分内容，即线性规划，非线性规划和动态规划。还简要介绍网络流和矩阵对策的基本内容。各章后面均附有适量的习题以备选用。本书可以作为运筹学，组合最优化及应用数学等有关专业的教材或参考资料之用，也可以作为理工科高年级的选课教材之用。

前 言

数学规划是运筹学的一个重要分支，研究的对象属于最优化范畴。它在生产实际，经济管理，工程控制以及军事等各方面，均有广泛的应用。

数学规划的基本内容，是研究条件极值问题，它的兴起要比古典极值问题晚得多。直到本世纪40年代前后，由于工农业生产的发展，商业的规模日益扩大，以及第二次世界大战的影响等，条件极值问题才较迅速地发展起来。首先应运而生的便是线性规划，特别在1947年 G. B. Dantzig 提出单纯形方法之后，线性规划的理论体系和计算方法便日趋系统和完善。随后，到了50年代，非线性规划和动态规划又相继形成和发展。直到今天，数学规划的理论和方法，已成为应用数学、组合最优化和运筹学等有关专业的重要基础。

本教材的内容由三部分组成：第一部分是线性规划。这部分较详细地叙述了线性规划的一般理论和计算方法，以及它在某些方面的应用。第二部分是非线性规划。这部分只简要介绍无约束和有约束问题的部分基本内容，并强调了与线性规划有直接联系的某些方面。第三部分是动态规划。这部分通过几个实际问题，介绍确定型与随机型的多阶段决策过程的基本内容，以及动态规划与马尔柯夫过程、存储论、排序问题等方面的联系与应用。

60年代初，在原系主任李修睦教授的主持下编写了《运筹学讲义》。1980年前后，作为规划论教材，保留了原讲义的部分内容：网络流，矩阵对策，二次规划与动态规划的部分内容。以后逐年在教学过程中经过多次较大的修改和补充，始成为当前本书

的样子。其中网络流，矩阵对政及二次规划部分，由李修睦教授编写，其余由李为政编写。

本书在编写过程中，参阅了马仲蕃等写的《数学规划讲义》，以及其它有关参考资料，并吸收了部分研究生的宝贵意见。在此一并致谢。

由于编者水平所限，难免有不当或错误之处，欢迎读者批评指正。

目 录

第一部分 线性规划

引 言

第一章	线性规划的基本概念	(2)
§ 1.1	实际例子	(2)
§ 1.2	线性规划问题的标准形式	(5)
§ 1.3	可行解与最优解	(8)
第二章	单纯形方法	(13)
§ 2.1	凸集与极点解	(13)
§ 2.2	线性规划的基本定理	(15)
§ 2.3	单纯形算法	(17)
§ 2.4	最优判别准则	(29)
§ 2.5	改进的单纯形方法	(35)
§ 2.6	人造基方法	(40)
§ 2.7	变量有上界的情形	(43)
§ 2.8	退化情形	(50)
第三章	对偶线性规划	(53)
§ 3.1	对偶线性规划问题	(58)
§ 3.2	对偶定理	(61)
§ 3.3	对偶单纯形法	(65)
§ 3.4	原一对偶算法	(71)
第四章	参数线性规划	(77)
§ 4.1	b_i 中含参数	(77)
§ 4.2	c_j 中含参数	(81)
§ 4.3	灵敏度分析	(85)
第五章	运输问题	(91)

§ 5.1	的表格算法	(91)
§ 5.2	表格算法的证明	(98)
§ 5.3	对偶算法	(101)
第六章	网络流	(111)
§ 6.1	线性图	(111)
§ 6.2	极小流量定理	(112)
§ 6.3	极大流量的求法	(117)
§ 6.4	平面网络	(118)
§ 6.5	网络上的最短距离和最短路径	(124)
§ 6.6	交通运输网络可行性的充分必要条件	(129)
§ 6.7	图上作业法	(132)
第七章	整数线性规划	(140)
§ 7.1	实际例子	(140)
§ 7.2	割平面法	(142)
§ 7.3	分枝估界法	(152)
第八章	分解算法	(159)
§ 8.1	直接分配分解算法	(159)
§ 8.2	参数分解算法	(161)
§ 8.3	一般分解算法	(163)
第九章	矩阵对策	(173)
§ 9.1	基本概念	(173)
§ 9.2	有鞍点的矩阵对策	(176)
§ 9.3	没有鞍点的矩阵对策	(178)
§ 9.4	矩阵对策的解法	(181)
§ 9.5	矩阵对策与对偶线性规划	(138)

第二部分 非线性规划

引 言

第1章	无约束极值问题	(194)
-----	---------	---------

§ 10.1	一般性描述	(194)
§ 10.2	凸函数与凹函数	(195)
§ 10.3	一维极值问题	(199)
§ 10.4	梯度法	(201)
§ 10.5	牛顿法	(204)
§ 10.6	共轭梯度法	(209)
第十一章	约束极值问题	(215)
§ 11.1	等式约束问题	(215)
§ 11.2	不等式约束问题	(217)
§ 11.3	二次凹规划的Wolfe's方法	(221)
§ 11.4	二次凸规划的Beale's方法	(225)
§ 11.5	非线性规划问题的线性化方法	(223)

第三部分 动态规划

引 言

第十二章	基本概念	(231)
§ 12.1	过程最优化的例子	(234)
§ 12.2	最短线路问题	(238)
§ 12.3	函数方程	(241)
第十三章	资源分配问题	(245)
§ 13.1	资源分配问题	(245)
§ 13.2	函数方程	(246)
§ 13.3	存在唯一性定理	(250)
§ 13.4	逐次逼近	(256)
§ 13.5	凸函数和凹函数	(264)
§ 13.6	函数方程解的性质	(266)
第十四章	采矿问题	(275)
§ 14.1	采矿问题及其数学模型	(275)
§ 14.2	存在唯一性定理	(276)
§ 14.3	决策区域	(278)

§ 14.4	$f(x, y)$ 的形式	(282)
第十五章	动态规划与 马尔柯夫过程	(283)
§ 15.1	状态概率	(283)
§ 15.2	有报酬的马尔柯夫过程	(289)
§ 15.3	策略改进程序	(292)
第十六章	最优储备 问题	(295)
§ 16.1	有限时期的储备问题	(295)
§ 16.2	无限时期的储备问题	(303)
第十七章	排序 问题	(313)
参考文献		(317)

第一部分 线性规划

引 言

线性规划问题数学模型的基本特征是：目标函数与约束条件均为未知量的线性函数。它在理论上有着较完整的数学描述，计算方法方面有行之有效的单纯形方法，在生产实际方面有着广泛的应用。

在这部分里，先介绍线性规划问题的一般方法——单纯形方法及有关的理论叙述，接着介绍运输问题与网络流，最后介绍整数线性规划和分解算法以及矩阵对策。

第一章 线性规划的基本概念

§1.1 实际例子

1. 为了便于理解什么是线性规划问题以及它的实际背景，我们先举出如下几个实际例子。

例1 生产组织与计划安排问题。

某工厂生产A和B两种产品，已知制造产品A 1公斤，要用煤2吨、电力4瓩、劳动力（按工时计算）3个，所创造的经济价值是7万元。制造产品B 1公斤，要用煤4吨、电力6瓩、劳动力10个，所创造的经济价值是12万元。现在该工厂有煤360吨、电力200瓩、劳动力300个，问在这种限制条件下，应该生产产品A、B各多少公斤，才能使所创造的总的经济价值最高？

设该厂生产产品A、B各为 x_1 、 x_2 公斤，那么问题便是求 x_1 、 x_2 的值，满足条件：

$$9x_1 + 4x_2 \leq 360$$

$$4x_1 + 5x_2 \leq 200$$

$$3x_1 + 10x_2 \leq 300$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

且使目标函数（总产值）

$$f(x_1, x_2) = 7x_1 + 12x_2$$

达到最大值。

例2 合理购肥问题。

某生产队为了提高农作物的产量，需氮肥2100公斤，磷肥700公斤，钾肥800公斤。现有甲、乙、丙、丁四种肥料可供选

拌, 它们含氮量分别为 7%, 5%, 6%, 6%; 含磷量分别为 1%, 3%, 4%, 3%; 含钾量分别为 3%, 1%, 2%, 2%。它们的价格假定每百公斤分别为 0.9 元, 0.7 元, 0.8 元, 0.6 元。我们的问题便是: 在满足农作物所需肥料的条件下, 问甲、乙、丙、丁四种肥料应各买多少公斤, 才能使总的费用最少?

设购买肥料甲、乙、丙、丁的数量分别为 x_1, x_2, x_3, x_4 (单位: 百公斤), 则问题便是求一组 x_j ($j = 1, 2, 3, 4$) 的值, 满足约束条件:

$$7x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 6x_4 \geq 2100$$

$$x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 3x_4 \geq 700$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 \geq 800$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, 3, 4$$

使目标函数 (总费用)

$$f = 0.9x_1 + 0.7x_2 + 0.8x_3 + 0.6x_4$$

达到最小值。

例 3 运输问题

设有某种物资, 它有 m 个产地: $A_1, A_2, \dots, A_m$, 其产量分别为 $a_1, a_2, \dots, a_m$; 有 n 个销地: $B_1, B_2, \dots, B_n$, 其销量分别为 $b_1, b_2, \dots, b_n$ 。现假定产销平衡, 试求该物资的最优调运方案, 使总的运输费用最少。

设 C_{ij} 表示从产地 A_i 到销地 B_j 的单位运费, x_{ij} 表示从产地 A_i 到销地 B_j 的物资运量, 那么问题便是求一组 x_{ij} 的值, 满足条件:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n$$

$$\left(\sum_{i=1}^m a_i = \sum_{j=1}^n b_j \right)$$

使目标函数 (总运费)

$$f = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

达到最小值。

例4 分派问题

设某单位分派 n 个人同时做 n 种工作, t_{ij} 表示第 i 个人做第 j 种工作所需的时间。问如何安排, 使得完成这 n 种工作的总时间为最少。

引进 0, 1 变量 x_{ij} ,

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{若第 } i \text{ 个人分派做第 } j \text{ 种工作} \\ 0 & \text{相反} \end{cases}$$

则上述问题便归结为: 求一组 x_{ij} 的值 ($x_{ij} = 0, 1$) 满足条件:

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{每人只做一种工作})$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (\text{每种工作都有人去})$$

使目标函数 (总时数)

$$f = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n t_{ij} x_{ij}$$

达到最小值

例5 营养问题

设有 n 种食物含 m 种营养素, 假定已知每人每天第 i 种营养素的最少需要量是 b_i 毫克, 在每斤第 j 种食物中所含第 i 种营养素为 a_{ij} 毫克, 今第 j 种食物每公斤单价为 c_j 元, 问购买各种食物各多少公斤才能满足人们的需要, 且使每天的开支最少?

设 x_j 表示购买第 j 种食物的公斤数, 则问题便是: 求一组 x_j 的值, 满足条件:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &\geq b_i & i = 1, 2, \dots, m \\ x_j &\geq 0 & j = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

使目标函数 (总费用)

$$f = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

达到最小值。

例6 合理下料问题

要用某类钢材（条材）下 m 种零件的毛坯，根据以往经验，人们在一种钢材上已经设计出 n 种不同的下料方式。设第 j 种下料方式可得第 i 种零件 a_{ij} 个，设第 i 种零件的需要量为 b_i 。问应采用那些下料方式，使既满足需要又用的钢材总数最少？

设用第 j 种方式下料的钢材总数为 x_j ，则上述问题可归结为：求一组 x_j 的值，满足条件：

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

使目标函数（钢材总量）

$$f = \sum_{j=1}^n x_j$$

达到最小值。

以上所举6个例子都是线性规划问题，其中有些问题后面还要详细讨论。

§1.2 线性规划问题的标准形式

上节提出的各种例子代表不同的实际问题，其目的和所需满足的约束条件也不完全相同，但就其数学模型而言，却可以一般地概述如下：

求一组变量 x_j ($j = 1, 2, \dots, n$)的值，满足条件：

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \quad (\text{或} \geq b_i) \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

使目标函数

$$f = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

达到最优值（最小值或最大值）。

这些约束条件和目标函数都是变量 x 的线性函数，我们称这样的问题为线性规划问题。

为了便于研究，我们通常要把上面的数学模型统一化为标准形式。

首先，将约束条件中的不等式变为等式。若 $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i$ ，则在不等式的左边加上一个非负变量 x_{n+1} 使其变为等式，即 $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + x_{n+1} = b_i$ ，这些新加进的变量叫做“松弛变量”（或简称松变量）。若 $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq b_i$ ，则在不等式的左边减去一个非负变量 x_{n+1} 使其变为等式，即 $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - x_{n+1} = b_i$ ，这些新添进的变量称为剩余变量。松变量或剩余变量在目标函数中的系数令其为零，显然这样做并不影响目标函数的最优值。

其次，如果约束条件中有某个 $b_i < 0$ ，则用 (-1) 乘等式的两边，使 b_i 变为 $(-b_i) > 0$ ，即如果

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n = b_i < 0$$

则用 (-1) 乘两边便有

$$-a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots - a_{in}x_n = -b_i > 0$$

往后如果不加说明，总认为约束条件中的常数项 b_i 都是非负的。

最后，如果某个变量 x_i 是自由变量（或无约束变量），则可以从约束条件中销去此自由变量，方法是：设

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{is}x_s + \cdots + a_{in}x_n = b_i$$

其中 $a_{is} \neq 0$ ，用 a_{is} 除两边得到

$$x_s = -\frac{1}{a_{is}} (a_{i1}x_1 + \cdots + a_{is}x_s - b_i)$$

$$= -\frac{1}{a_{is}} \left(\sum_{j=1, j \neq s}^n a_{ij} x_j - b_i \right)$$

再将 x_s 的表达式代入其余约束条件，这样其余各约束条件中便消

去了自由变量 x_s 。然后,就仅考虑各非负变量求出问题的解,并将这些已求出的非负变量的值代入 x_s 的表达式中,便得到自由变量 x_s 的值。

通过以上讨论,一般线性规划问题可以表为下面的标准形式:

$$\min f = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\text{满足条件} \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

如 x_j 是求 f 的最大值,则可以变为求 $-f = \sum_{j=1}^n (-c_j) x_j$ 的最小值,且具有相同约束条件的问题。因为若一组变量的值使 f 达到最大,则同一组变量的值必使 $(-f)$ 达到最小。

线性规划的数学模型还可以写为

$$\min f = Cx$$

$$\text{满足条件} \quad Ax = b$$

$$x \geq 0$$

这里

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$, 0 是 n 维零列向量, 且 $m \leq n$ 。

设有线性规划问题

$$\min f = -x_1 + 2x_2$$

$$\text{满足条件} \quad -x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1 + x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

引入松变量把问题化为标准形式:

$$\min f = -x_1 + 2x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4$$

$$\text{满足条件} \quad -x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

令

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$$

$C = (-1, -2, 0, 0)$, 则数学模型可以写为:

$$\min f = Cx$$

满足条件 $Ax = b$

$$x \geq 0$$

线性规划的标准模型还可以写为:

$$\min f = Cx$$

满足条件 $P_1 x_1 + P_2 x_2 + \dots + P_n x_n = b$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \dots, n$$

其中 $P_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})^T \quad (j = 1, 2, \dots, n)$

以上介绍的线性规划模型的三种形式, 往后各有其用处。

§1.3 可行解与最优解

在开展一般性讨论之前, 我们先研究一个简单的线性规划问题, 有助于观察和理解线性规划约束区的结构及目标函数的变化情况。

以 §1.2 的线性规划问题为例

$$\min f = -x_1 - 2x_2 \quad (1.3-1)$$

满足条件 $-x_1 + x_2 \leq 2 \quad (1.3-2)$

$$x_1 + x_2 \leq 3 \quad (1.3-3)$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

首先, 将(1.3-2), (1.3-3)取等号, 便得到两条直线:

$$L_1: -x_1 + x_2 = 2$$