

向大支 51-2055
X D Z

中学数学题解

ZHONG XUE SHU XUE TI JIE

湖南人民出版社

《中学数学题解》分代数、几何、三角、解析几何、综合题五部分，共选题275道，另有思考题285道。主要选自部分历届高考试题与部分省、市数学竞赛题，还编选了少量的外国高考试题。题后附有解答示范、提示和答案。

为适应不同程度读者的需要，本书特选编部分难度较大的习题，但在文字叙述方面力求通俗易懂，在解题步骤上力求较为简捷，有的也作了一题多解，谨供数学爱好者学习时参考。

本书在编选过程中，得到了任远志同志的协助，在此特表谢意。

编 者

1979年3月

目 录

习 题 选

I 代数部分	(1)
一、基本概念及运算	(1)
二、方程与不等式	(5)
三、函数	(9)
四、数列与极限	(10)
五、排列、组合、二项式定理与复数	(11)
II 几何部分	(13)
一、直线形	(13)
二、圆	(14)
三、立体几何	(16)
III 三角部分	(18)
一、基本概念及性质	(18)
二、三角恒等变换	(19)
三、反三角函数及三角方程	(21)
四、三角形的解法	(23)
IV 解析几何部分	(24)
一、直线及有关问题	(24)
二、曲线	(25)

1.圆(25) 2.抛物线(26) 3.椭圆(27) 4.双曲线(28)

5.其它(28)

三、极坐标及参数方程..... (29)

V 综合题部分..... (30)

解 答 和 提 示

I 代数部分..... (39)

II 几何部分..... (76)

III 三角部分..... (103)

IV 解析几何部分..... (135)

V 综合题部分..... (161)

思 考 题

一、代数..... (216)

二、平面几何..... (224)

三、立体几何..... (232)

四、三角..... (236)

五、解析几何..... (241)

附思考题答案 (251)

习 题 选

I 代 数 部 分

一、基本概念及运算

1. 在什么条件下, $\frac{y}{2x}$ 1) 是正数? 2) 是负数? 3) 等于零? 4) 没有意义?

2. x 是何值时, $\frac{|x|}{x}$ 的值是1? 是-1? 没有意义?

3. 若 a 是整数, 1) 当 $|a| \leq 3$ 时, 求 a 的值, 其中 a 的最大值是什么? 最小值是什么?

2) 当 $|a| \geq 3$ 时, 求 a 的值, 何时 a 有最大值, 最大值是什么? 何时 a 有最小值? 最小值是什么?

4. a 与 $\frac{a}{2}$ 哪个大? a^2 与 a 哪个大?

5. 证明: 1) 如果一个自然数 m 的平方能被3整除, 则这个自然数一定能被3整除. 2) $\sqrt{3}$ 是无理数, 并在数轴上表示之.

6. 分解因式:

1) $x^4 + x^2y^2 + y^4$,

2) $x^4 - 2x^2y - 3y^2 + 8y - 4$,

3) $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$;

$$4) x^2 + 2xy - 8y^2 + 2x + 14y - 3;$$

$$5) x^4 + y^4 + z^4 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2z^2x^2;$$

$$6) (x-1)(x+2)(x-3)(x+4) + 24.$$

7. 分解因式:

$$1) bc(b+c) + ca(c-a) - ab(a+b);$$

$$2) y(x-2z)^2 + 8xyz + x(y-2z)^2 - 2z(x+y)^2;$$

$$3) 8x^3(z+y) - y^3(z+2x) - z^3(2x-y).$$

8. 1) 试证: $n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n - 1$ 对任何整数 n 都是整数,

且被3除时余2.

2) 如果 $f(x) = x^3 - 6x^2 + ax + b$ 能被 $x^2 - 4x + 3$ 整除, 求 a, b .

9. 化简下列各题:

$$1) \frac{a^{2n+1} - 6a^{2n} + 9a^{2n-1}}{a^{n+1} - 4a^n + 3a^{n-1}};$$

$$2) \frac{1-x-x^2+x^3}{1-2|x|+x^2}.$$

10. 化简下列各题:

$$1) \frac{y^2z^2}{b^2c^2} + \frac{(y^2-b^2)(z^2-b^2)}{b^2(b^2-c^2)} + \frac{(y^2-c^2)(z^2-c^2)}{c^2(c^2-b^2)};$$

$$2) \frac{x^4 - (x-1)^2}{(x^2+1)^2 - x^2} + \frac{x^2 - (x^2-1)^2}{x^2(x+1)^2 - 1} + \frac{x^2(x^2-1)^2 - 1}{x^4 - (x+1)^2}.$$

11. 化简下列根式:

$$1) (m-1) \sqrt{\frac{m+1}{(m-1)^2}};$$

$$2) |6-a| - |2a+1| + \sqrt{a^2 + 10a + 25}, \text{ 其中 } a < -5;$$

3) 若 $\frac{3}{2} < x < \frac{5}{2}$, 化简 $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 6x + 9}$.

12. 已知 $x > 0$, 列出 $\sqrt{(1 - \sqrt{2})^2 x^2}$ 与 $|(\sqrt{2} - 2)x|$ 的和的立方代数式, 并进行化简.

13. 化简 $\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}+1-x}(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-1)$.

14. 若 $0 < x < 1$, 化简:

$$\left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}+x-1} \right) \left(\sqrt{\frac{1}{x^2}} - 1 - \frac{1}{x} \right).$$

15. 计算下列各题:

$$1) 5 - 3 \times \left[\left(-3\frac{3}{8} \right)^{-\frac{1}{3}} + 1031 \times (0.25 - 2^{-2}) \right] + 9^0,$$

$$2) (0.125)^{-\frac{1}{3}} + (-0.15)^{\lg 1} - \frac{1}{1 - \sqrt{2}} + \left(2\frac{10}{27} \right)^{-\frac{2}{3}} - (2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}},$$

$$3) 10(2 + \sqrt{5})^{-1} - \left(\frac{1}{500} \right)^{-\frac{1}{2}} + 30 \left(\frac{125}{9} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left(\frac{\sqrt{5}}{3} \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$4) \frac{a^{\frac{1}{3}}(a-8b)}{a^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{\frac{2}{3}}} + \frac{\sqrt[3]{a}-2\sqrt[3]{b}}{\sqrt[3]{a}} - \sqrt[3]{a^2},$$

$$5) \left(x^{\frac{a+b}{c-a}} \right)^{\frac{1}{b-c}} \left(x^{\frac{c+a}{b-c}} \right)^{\frac{1}{a-b}} \left(x^{\frac{b+c}{a-b}} \right)^{\frac{1}{c-a}}.$$

16. 计算下列各题:

$$1) \frac{1}{2} \lg 25 + \lg 2 - \lg \sqrt{0.1} - \log_2 9 \times \log_3 2,$$

$$2) \lg 25 + \frac{2}{3} \lg 8 + \lg 5 \cdot \lg 20 + (\lg 2)^2;$$

$$3) -\log_3(\log_3 \sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{3}}});$$

$$4) \log_{\frac{1}{2}} \left[\left(1 - \cos^2 \frac{\pi}{6} \right) \operatorname{ctg}^{-2} \frac{\pi}{4} \right] \div \log_2 \cos \frac{\pi}{4};$$

$$5) \sqrt{\lg^2 5 - \lg 25 + (\lg 5)^0} + |\log_{100} 4 - 1|;$$

$$6) \log_{12} (\sqrt{7+4\sqrt{3}} - \sqrt{7-4\sqrt{3}});$$

$$7) [(3 \times 5)^{-\frac{1}{9}}]^{-3^3} \cdot (-125)^{-(3^1 - \log_8 9)}$$

$$\cdot \sqrt{(-3)^{-2}} \left[\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} (2\sqrt{2}-3) \right]^{-\sqrt{7}^0}.$$

17. 已知: $\log_{18} 9 = a$ ($a \neq 2$), $18^b = 5$, 求 $\log_{36} 45$.

18. 已知: $\lg 5 = 0.6990$, 问 $8^{3.4} \times 25^{1.1}$ 是多少位整数.

19. 已知: x, y 都是实数, 且 $4x^2 + y^2 - 4x - 16y + 65 = 0$,

求: $\log_{1.8} 8 = ?$.

20. 化简下列各题:

$$1) \sqrt{5^{2\log_5 (\lg x)} - 2\lg x + 1};$$

$$2) \sqrt{9^{\log_3 \sin \alpha} - 2\sin \alpha + 1};$$

$$3) \log_a \left[\left(\frac{m^4 n^{-4}}{m^{-1} n} \right)^{-3} + \left(\frac{m^{-2} n^2}{mn^{-1}} \right)^5 \right] \text{ (这里 } m, n \text{ 和 } a \text{ 都是}$$

正数且 $a \neq 1$).

21. 证明下列各题:

$$1) \text{ 已知: } \log_{12} 27 = a, \text{ 求证: } \log_6 16 = \frac{4(3-a)}{3+a};$$

2) 已知: $\log_{12} 3 = a$, 计算: $\log_{\sqrt{8}} 8$ 的值.

二、方程与不等式

22. 解下列方程:

1) $x^3 - 7x + 6 = 0$;

2) $\frac{x-1}{x-2} + \frac{x-6}{x-7} = \frac{x-2}{x-3} + \frac{x-5}{x-6}$;

3) $(x^2 + x - 4)^2 + (x^2 + x - 1)^2 = 5$;

4) $\frac{3x}{x^2-1} + \frac{x^2-1}{3x} = \frac{5}{2}$;

5) $x^4 + (x-4)^4 = 626$;

6) $|x+1| + \frac{1}{2}|2x-3| = 5x+2$;

7) $x(x-1)(x+1)(x+2) = 24$.

23. 1) $\sqrt[3]{5+x} + \sqrt[3]{5-x} = \sqrt[3]{5}$;

2) $x^2 - 6x - 6 - x\sqrt{x^2 - 2x - 2} = 0$;

3) $\sqrt[5]{(7x-3)^3} + 8\sqrt[5]{(3-7x)^{-3}} = 7$;

4) $\frac{\sqrt[5]{3+x}}{3} + \frac{\sqrt[5]{3+x}}{x} = \frac{64}{3}\sqrt[5]{x}$;

5) $(\sqrt{x}-2)^4 + (\sqrt{x}-3)^4 = 1$.

24. 解方程: $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}} + \sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}} = 1$.

25. 解下列方程组:

$$1) \begin{cases} x+y^{-1} = \frac{3}{2} \dots\dots\dots (1) \\ y+z^{-1} = \frac{7}{3} \dots\dots\dots (2) \\ z+x^{-1} = 4 \dots\dots\dots (3) \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x^{-1} + y^{-1} + z^{-1} = ax \dots\dots\dots (1) \\ x^{-1} + y^{-1} + z^{-1} = by \dots\dots\dots (2) \\ x^{-1} + y^{-1} + z^{-1} = cz \dots\dots\dots (3) \end{cases}$$

(a、b、c均不为零)。

$$3) \begin{cases} \frac{xy}{ay+bx} = c \dots\dots\dots (1) \\ \frac{zx}{az+cx} = b \dots\dots\dots (2) \\ \frac{yz}{bz+cy} = a \dots\dots\dots (3) \end{cases}$$

26. 解下列方程组：

$$1) \begin{cases} |x+1| + |y-1| = 5, \dots\dots\dots (1) \\ |x-1| = 4y-4, \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} (x+y+1)^2 + (x+y)^2 = 25, \dots\dots\dots (1) \\ x^2 - y^2 = 3, \dots\dots\dots (2) \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} (b+c)(y+z) - ax = b-c, \dots\dots\dots (1) \\ (c+a)(z+x) - by = c-a, \dots\dots\dots (2) \\ (a+b)(x+y) - cz = a-b, \dots\dots\dots (3) \end{cases}$$

27. 解下列方程组：

$$1) \begin{cases} 7\sqrt{x+y} - x - y = 12, \\ x^2 + y^2 = 136, \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{x-y}{\sqrt[3]{x^2y} - \sqrt[3]{xy^2}} = \frac{7}{2}, \\ \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 3. \end{cases}$$

28. 求方程组 $\begin{cases} x+y=2, & \dots\dots\dots(1) \\ xy-z^2=1. & \dots\dots\dots(2) \end{cases}$ 的实数解.

29. 已知: x, y, z 为不同之实数, 且 $x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}$. 求证: $x^2y^2z^2 = 1$.

30. 当 a, b, c 为实数时, 求证方程 $x^2 - (a+b)x + (ab-c^2) = 0$ 有两实根, 并求出这两根相等的条件.

31. 欲方程 $x^2 = 3x - mx + \log_{4-\sqrt{15}}(4 + \sqrt{15})^m$ 的两根都是正数, 试确定参数 m .

32. 当 p 为何值时, 方程 $x^2 + px - 3 = 0$, 与方程 $x^2 - 4x - (p-1) = 0$ 有一个公共根, 并求出这个公共根.

33. 设 α, β 为 $x^2 + mx + m^2 + n = 0$ 之两根, 试证: $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 + n = 0$.

34. 设 $x^2 + ax + b = 0$ 两根之差与 $x^2 + px + q = 0$ 两根之差相等, 求 a, b, p, q 之关系.

35. 将 $x^3 - 3x^2 + 5x + 6 = 0$ 的根增一常数, 求变形后缺 x^2 项的方程.

36. n 为哪些整数时, 方程组 $\begin{cases} nx - y = 5, \\ 2x + 3ny = 7, \end{cases}$ 的解满足条件 $x > 0, y < 0$?

37. 如果 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 成等差数列, 并且 α, δ 为实系数方程 $ax^2 + bx + c = 0$ 的两根, 试求以 β, γ 为根的二次方程.

38. a 为什么值时, 方程 $x^2 - 2x + \lg a = 0$ 有实数根?

39. 已知: $2\lg(x-2y) = \lg x + \lg y$, 求 $x:y$.

40. 解方程: $x^{\log_a x} = \frac{x^4 \sqrt{x}}{a^2}$.

41. 解 $(\sqrt{x})^{\log_5 x - 1} = 5$.

42. 解 $2\log_2 3 \cdot \log_{3+3} 3 = \log_{3\sqrt{x}} 3$.

43. 解 $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^{-x} = 4$.

44. 解 $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 12, & \dots\dots\dots (1) \\ 2^y \cdot 3^x = 18, & \dots\dots\dots (2) \end{cases}$

45. 解方程组: $\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y-3} = \sqrt{x+y}, & \dots\dots\dots (1) \\ \lg(x-10) + \lg(y-6) = 1, & \dots\dots\dots (2) \end{cases}$

46. 解不等式: $\begin{cases} 16-x^2 \geq 0, \\ x^2-x-6 > 0. \end{cases}$ 并把解在数轴上表示之.

47. 设 $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, 求证:

$$ax + by + cz \leq 1.$$

48. 若 $a > b > c > 0$, 求证:

$$a^{2a} \cdot b^{2b} \cdot c^{2c} > a^{b+c} \cdot b^{c+a} \cdot c^{a+b}.$$

49. 解不等式: $10^{2\lg x} + 4x - \log_2 32 > 0$.

50. 小汽车和摩托车先后从某地出发前往A地执行紧急任务, 在距A地105公里的地方, 摩托车赶上小汽车, 在这以后经1小时24分钟, 小汽车和到达A地而立即返回的摩托车迎面相遇, 当小汽车到达A地时, 摩托车已离开A地15公里, 问二车的速度各是每小时多少公里?

51. 某农机厂金工车间共有86个工人, 已知每个工人平均

每天可以加工甲种部件15个,或者乙种部件12个,或者丙种部件9个,问应安排加工甲种、乙种和丙种部件各多少人,才能使加工后的三个甲种、二个乙种和一个丙种部件恰好配套。

52. 有某种农药一桶,倒出8升后,用水补满,然后又倒出4升,再用水补满,这时测得桶中农药与水之比为18:7,求水桶的容积。

53. 在周长为300厘米的圆周上,有甲、乙两球,以大小不等的速度作匀速圆周运动,甲球从A点出发,按逆时针方向运动,乙球从B点出发,按顺时针方向运动,两球相遇于C点。相遇后,两球各自反向作匀速圆周运动,但这时甲球速度的大小是原来的两倍,乙球速度的大小是原来的一半,以后它们第二次相遇于D点,已知 $\widehat{AmC} = 40$ 厘米, $\widehat{BD} = 20$ 厘米,求 $\widehat{ACB}$ 的长度。

三、函数

54. 二次函数 $y = f(x)$ 的图象,顶点为(1,3),且 $f(0) = 1$,求此函数的解析式。

55. 用6米长的条形木料做矩形窗框,(包括中间两个横档),问窗框的长度尺寸如何选择窗户的面积最大?最大面积是多少?

56. 已知某二次三项式当 $x = -\frac{1}{2}$ 时,取得极值为 $4\frac{1}{2}$,这个二次三项式的两根的倒数的平方和为 $1\frac{1}{4}$,求这个二次三项式及它的两个根。

57. 已知一个二次函数 $y = f(x)$ 的图象的顶点是 $(-1, 1)$, 与 y 轴的交点为 $(0, 2)$.

1) 找出这个二次函数表达式;

2) 当 $x = 8$ 时, $y = ?$

58. 作下列各函数的图象:

1) $y = \sqrt{4x^2 + 12x + 9}$;

2) $y = \frac{|4x^2 + 12x + 9|}{2x + 3}$.

59. 函数 $f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$.

1) 若 $-1 < x_1 < x_2 < 1$, 比较 $f(x_1)$ 与 $f(x_2)$ 的大小;

2) 证明 $f(1)$ 是 $f(x)$ 的极大值, $f(-1)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

60. 作函数 $y = |x^2 - 1|$ 的图象.

四、数列与极限

61. 求下面数列的前 n 项的和:

$$\lg \frac{1}{3} + \lg \frac{10}{3^2} + \lg \frac{100}{3^3} + \lg \frac{1000}{3^4} + \dots$$

62. 等差数列有10项, 偶数项的和等于15, 而奇数项的和等于12.5, 求此数列各项.

63. 设数列1, 2, 4, ... 前 n 项的和为:

$S_n = a + bn + cn^2 + dn^3$, 求这数列的通项公式 a_n , 并确定 a 、 b 、 c 、 d 的值.

64. 计算: $\frac{1}{100 \times 101} + \frac{1}{101 \times 102} + \frac{1}{102 \times 103} + \dots$
 $+ \frac{1}{149 \times 150}.$

65. 无限递减等比数列的前四项之和等于15, 第一项与第四项之和为第二项与第三项的和的 $\frac{3}{2}$ 倍, 求此数列的和.

66. 和为114的三个数, 是等比数列的顺次三项, 或者是等差数列的第一项, 第四项和第二十五项, 求此三数.

67. 求 $1 + 2x + 2x^2 + \dots + nx^{n-1}$ 的和 (n 为自然数).

68. 某电管所沿着一条通往农村的新公路竖电线杆, 已知一辆汽车每次从电管所运 3 根电线杆, 相邻两电线杆的距离为 50 米, 汽车往返的总路程是 35.5 公里, 最后一根电线杆与电管所的距离是 2450 米.

1) 问第一根电线杆与电管所的距离是多少?

2) 共竖了多少根电线杆?

五、排列、组合、二项式定理与复数

69. 用 0, 2, 5, 7, 9 诸数字组成的没有重复数字的四位数中大于 5000 的有多少个? 是 4 的倍数的有多少个?

70. 用 1, 2, 3, 4, 7, 9 组成没有重复数字的五位数, 问:

1) 这样的五位数一共有多少个?

2) 这样五位数中有多少个偶数?

3) 在这些五位数中有多少个是 3 的倍数?

71. 一平面上有 10 点, 除其中四点在一直线外, 其余各点无三点在一直线上, 问连接所有的直线共有多少条?

72. 把由数码 1, 2, 3, 4 组成的数码互不相同的所有四位数相加, 问总和多少?

73. 解方程 $\sqrt{ax^2 + bx} + x = 4$, 其中 a 由方程 $\lg(a + 99) = 2$ 决定, b 是 $(1+y)^5$ 的展开式中第三项系数的 $\frac{1}{5}$.

74. 求 $(1+x)^3 + (1+x)^4 + (1+x)^5 + \cdots + (1+x)^{n+2}$ 展开式里 x^2 的系数.

$$75. \text{ 求和: } S = m! + \frac{(m+1)!}{1!} + \frac{(m+2)!}{2!} + \cdots + \frac{(m+n)!}{n!}.$$

76. 在下面的展开式中含有多少个有理项:

$$(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3})^{100}?$$

77. 若 $(1+i)^n = (1-i)^n$, 求 n .

78. 在下列方程中, 问 x, y 为什么实数值时:

$$(x+y)^2 i - \frac{6}{i} - x = -y + 5i(x+y) - 1.$$

79. 1) 求出复数 $1 + \sqrt{3}i$ 的模数和幅角;

2) 在直角坐标系 XOY 所在的平面内, 以 A 点表示复数 $1 + \sqrt{3}i$, 把 OA 线段绕着 O 点按反时针方向旋转 150° , 这点到达的位置为 B , 写出 B 点所表示的复数的代数式.

80. 求 1 的三次根, 证任一虚根的平方等于另一虚根, 且

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}\right)^n + \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\right)^n = -1, \text{ 式内 } n \text{ 可}$$

为任意整数, 唯不能为 3 的倍数.

II 几何部分

一、直线形

81. 已知正方形 $ABCD$ 的边 CD 上任意一点 E , 延长 BC 到 F , 使 $CF = CE$, 设 BE 与 DF 相交于 G , 求证: $BG \perp DF$.

82. 在梯形 $ABCD$ 中, 已知 $AD \parallel BC$, 对角线 AC 和 BD 相交于 E 点, 过 E 作平行于底的直线, 交 AB 于 M 点, 交 CD 于 N 点, 求证 $ME = EN$.

83. 求证直角三角形弦的立方大于两直角边的立方和.

84. $ABCD$ 是正方形, $KL \perp MN$ 分别交对边于 K 、 L 、 M 、 N , 求证 $KL = MN$.

85. 四边形 $ABCD$ 中, $AD = BC$, 取 AB 与 CD 的中点 E 、 F , 连 EF 并延长交 AD 于 G , BC 于 H , 求证: $\angle AGE = \angle BHE$.

86. 在 $\triangle ABC$ 中, D 是 BC 的中点, 过 D 点作一直线分别交 AC 于 E , 交 AB 的延长线于 F , 求证: $AE:EC = AF:BF$.

87. 设 M 是 $\triangle ABC$ 的 AC 边的中点, 过 M 点, 作直线交 AB 直线于 E , 过 B 点, 作直线平行于 ME , 交 AC 线于 F , 求证 $\triangle AEF$ 的面积等于 $\triangle ABC$ 面积的一半.

88. 一直线截 $\triangle ABC$ 之边 BC 、 CA 、 AB 于 X 、 Y 、 Z , 则

$$\frac{BX}{CX} \cdot \frac{CY}{AY} \cdot \frac{AZ}{BZ} = 1.$$

89. 在 $\triangle ABC$ 中, BD 、 CE 为 AC 、 AB 上的高, M 为 BC 的中