新课标 初中版

数学黑马

函数及其图象

崔首诗◇主编

吉林人民出版社

丛书主编:崔首诗

副 主 编:沙敬红　牟玉华　吴轶兵

编　　写:郝　艳　孙子晴　尹振彬

王晓东　程云穆　刘大治

王铁军　孙红艳　澎　松

金　海　宋　春　孙明佶

齐　夏　那海涛　吴志明

孙　勇　宿建扬　何汇川

孙宇泽　张力杰　于建华

新课标 新理念 新方法

数学黑马

打造全新的《专项突破》

编者前记

《专项突破》类丛书在浩如烟海的教辅图书中何以能够备受青睐且长销不衰?

所谓“专项”,其特点在于“专”,改变普遍教辅图书“面面俱到”的模式,以学科知识为核心,能力训练为基础,对相关知识进行优化整合,使学生在融会贯通的基础上形成研究性学习。“专项”书的创作空间于理论上深入浅出,于学法上实用灵活,让学生在理解的基础上有所提高,在提高之中实现创新。

本套丛书的特色是什么?

本套书针对数学的各个板块进行科学有序地组合,对每一专题均由浅入深,由表及里地进行系统归纳,不同年级学生可以有针对性地选择,在最短时间内对某一板块知识学精学通。

图书清晰实用的体例:

1. 言简意赅的专项知识剖析
2. 少而精的经典试题讲解
3. 基础与能力的专题突破

在课程改革的大潮之中,丛书的适应性如何?

在目前教材版本与内容不稳定的状况下,本书克服了其他图书“完全同步性”不灵活的弱点,同时又对“同步性”有一定的辅助作用,适用面广。本书尽最大可能体现了 新课标人教版、北师大版、华东师大版的课改理念,增强了原有“专项”的人文意识和科学内涵。

Shu Xue Hei Ma 数学黑马

目录

一　平面直角坐标系

知识点讲解

■学习目标

1. 能正确画出直角坐标系.
2. 能在直角坐标系中,根据坐标系确定点,由点求出坐标.

■重点、难点和考点

重点:掌握平面内点的坐标的概念,根据坐标确定点和由点求坐标.

难点:理解平面内点与有序实数对之间的一一对应关系.

考点:理解平面直角坐标系的有关概念,并会正确地画出直角坐标系;理解平面内点的坐标的意义;能熟练地根据坐标确定点和由点求得坐标;了解平面内的点与有序实数对之间的一一对应关系;掌握直角坐标系中象限的概念;掌握特殊点的坐标特点.

本节所学的象限概念,点的坐标的意义,已知点求坐标,已知坐标描点,坐标轴上点的坐标特征及关于 x 轴、y 轴、原点对称的点的坐标特征都是中考命题的热点,常见题型见填空题和选择题,有时也将一些知识点融入解答题或压轴题中.

■知识点剖析

1. 平面直角坐标系的有关概念;
2. 坐标平面象限的划分;
3. 点的坐标的意义;
4. 各象限内及坐标轴上点的坐标的规律及对称点的坐标特征;
5. 点 $P(x,y)$ 到原点及坐标轴的距离;
6. 坐标平面内的点和有序实数对 (x,y) 建立了一一对应关系.

名题精析

例1　指出下列各点所在象限或坐标轴

$A(-\sqrt{5},0)$　　$B\left(-2,-\frac{1}{3}\right)$　　$C\left(\sqrt{2},\frac{1}{2}\right)$　　$D(0,0)$　　$E(0,3)$　　$F(\sqrt{2}-\sqrt{3},\sqrt{3}-\sqrt{2})$

精析　判断某一点所在象限或坐标轴,主要看这一点的横、纵坐标的符号,根据各象限内点的符号特点,以及坐标轴上的点的坐标特点就可以知道这一点所在的象限或坐标轴.

解　点 A 在 x 轴上;点 B 在第三象限;点 C 在第一象限;点 D 既在 x 轴上,又在 y 轴上,是坐标原点;点 E 在 y 轴上;点 F 在第二象限.

点评　坐标原点既在 x 轴上,又在 y 轴上,它是两个坐标轴惟一的公共点.

例2　已知点 $A(a,b)$ 是坐标平面上的一点，则当它分别满足下列各条件时，写出 a、b 满足的条件.

(1)在第三象限角平分线上；

(2)在 y 轴负半轴上；

(3)在第二或四象限角平分线上；

(4)在过点 $(0,-1)$ 与 y 轴垂直的直线上；

(5)在第一或第二象限角平分线上.

精析　应根据坐标轴上、各象限角平分线上的点的坐标的特征及各象限内点的符号规律作出解答.

解　(1) $b=a$ 且 $a<0$

(2) $a=0$ 且 $b<0$

(3) $b=-a(a\neq0)$

(4) $b=-1$　a 为任何实数.

(5) $b=|a|(a\neq0)$

点评　以上各结论的逆命题也成立. 例如，若 $b=|a|(a\neq0)$，则点 $A(a,b)$ 在第一或第二象限角分线上.

例3　已知点 $A(a,2)$、$B(-3,b)$，根据下列条件求出 a、b 的值：

(1) A、B 两点关于 y 轴对称；　(2) A、B 两点关于原点对称；

(3) $AB/\!/y$ 轴；

(4) A、B 两点在第二、四象限两条坐标轴夹角的平分线上.

解　(1)∵ 点 $A(a,2)$、$B(-3,b)$ 关于 y 轴对称，

$\therefore \begin{cases}x_A=-x_B\\ y_A=y_B\end{cases}$　$\therefore \begin{cases}a=3\\ b=2\end{cases}$

(2)∵ A、B 关于原点对称

$\therefore \begin{cases}x_A=-x_B\\ y_A=-y_B\end{cases}$　即　$\begin{cases}a=3\\ b=-2\end{cases}$

(3)∵ $AB/\!/y$ 轴

$\therefore x_A=x_B$

$\therefore a=-3, b\neq2.$

(4)∵ A、B 两点在第二、四象限两条坐标轴夹角的平分线上

$\therefore \begin{cases}x_A=-y_A\\ x_B=-y_B\end{cases}$　即　$\begin{cases}a=-2\\ b=3\end{cases}$

点评　要根据该例熟悉各象限及坐标轴上点的特征.

例4　已知点 P 到 x 轴和 y 轴的距离分别是 3 和 4，求点 P 的坐标.

精析　∵ 点 $P(x,y)$ 到 x 轴的距离为 $|y|$，到 y 轴的距离为 $|x|$. ∴ 由已知得 $|y|=3$，$|x|=4$，$y=\pm3$，$x=\pm4$. ∴ 点 P 的坐标为 $(4,3)$ 或 $(-4,3)$ 或 $(-4,-3)$ 或 $(4,-3)$.

解　设点 P 的坐标为 (x,y)，由已知条件，得

$|y|=3$，$|x|=4$

$y=\pm3$，$x=\pm4$

∴ 点 P 的坐标为 $(4,3)$ 或 $(-4,3)$ 或 $(4,-3)$ 或 $(-4,-3)$.

点评 （1）写点 P 的坐标时，横坐标与纵坐标的前后顺序不能随意改变.
（2）满足条件的坐标有四个，不要漏掉任何一个.

例5 如图1—1，正六边形 $OABCDE$ 的边长为 a，求各顶点的坐标.

精析 正六边形是关于 x 轴的对称图形，只要求出图中 O、A、B、C 点的坐标，可由对称性求出 D、E 点的坐标.

解 作 $AP\perp x$ 轴于 P，作 $BQ\perp x$ 轴于 Q.

$\because$ 六边形 $OABCDE$ 是正六边形.

$\therefore \angle EOA=120°$，$\angle OAP=30°$，

$\therefore OP=\dfrac{1}{2}a.$

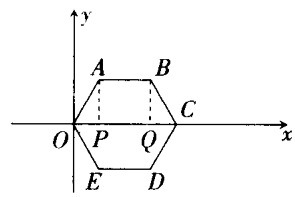

图1—1

在 $Rt\triangle APO$ 中，

$AP=\sqrt{a^2-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a.$

$\therefore A\left(\dfrac{1}{2}a,\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)$，容易得出 $B\left(\dfrac{3}{2}a,\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)$、$O(0,0)$、$C(2a,0)$.

由对称性，得出 $E\left(\dfrac{1}{2}a,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)$、$D\left(\dfrac{3}{2}a,-\dfrac{\sqrt{3}}{2}a\right)$.

点评 已知坐标平面内的几何图形，求图形上某些点的坐标，往往要用到解直角三角形的知识.

例6 A、B 两村在河边的同旁，以河边为 x 轴建立直角坐标系如图1—2，则 A、B 两村对应的坐标分别为 $A(0,2)$、$B(4,1)$，现要在河边 P 处修建一个水泵站，分别直接向 A、B 两村送水，点 P 选在什么地，才可使所用的水管最短？试写出点 P 对应的坐标及所需水管的长度.

精析 结合物理学中反射光的思想，用几何方法作出点 A 关于 x 轴的对称点 A'，则 $A'B$ 与 x 轴的交点就是所求的 P 点.

解 作点 A 关于 x 轴的对称点 A'，连结 $A'B$，则 $A'B$ 与 x 轴的交点 P 即为所求的 P 点. $\because A'(0,-2)$. 过 B 作 $BC\perp y$ 轴于点 C.

则 $C(0,1)$. $\therefore A'C=3$，$BC=4$.

$\therefore Rt\triangle A'CB$ 中，$A'B=5$. 又 $OP/\!/BC$，

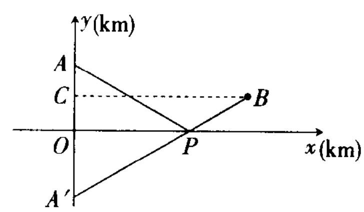

图1—2

$\therefore \dfrac{OP}{BC}=\dfrac{A'O}{A'C}$，$\therefore \dfrac{OP}{4}=\dfrac{2}{3}$，$\therefore OP=\dfrac{8}{3}$，$\therefore P\left(\dfrac{8}{3},0\right)$.

最短距离 $=AP+PB=A'P+PB=5$

答：点 P 选在 $\left(\dfrac{8}{3},0\right)$ 处，可使所用的水管最短，最短长度为5km.

点评 （1）解决此问题的关键是利用几何中的线段公理，找到点 P 的位置；
（2）解实际应用问题，最后要写"答"，写"答"时，要注明单位名称.

基础过关题

一、填空题

1. $P(-2,y)$，$Q(x,3)$ 关于 y 轴对称，则 $x=$______，$y=$______.
2. 点 $(-2,1)$ 关于原点对称的点的坐标为______.
3. 点 $P(a+5,a-2)$ 到 x 轴的距离为 $\sqrt{3}$，则 $a=$______.
4. 直角坐标系中，分别以点 $A(0,3)$ 与 $B(4,0)$ 为圆心，以 8 与 3 为半径 $\odot A$ 和 $\odot B$，则这两个圆的位置关系是______.
5. 如图 1—3，已知直线 $y=-x+6$ 与 x 轴交于点 A，与 y 轴交于点 B，点 P 为 x 轴上可以移动的点，且点 P 在点 A 的左侧，$PM\perp x$ 轴，交直线 $y=-x+6$ 于点 M. 有一个动圆 O'，它与 x 轴、直线 PM 和直线 $y=-x+6$ 都相切，且在 x 轴的上方，当 $\odot O'$ 与 y 轴也相切时，点 P 的坐标是，________.

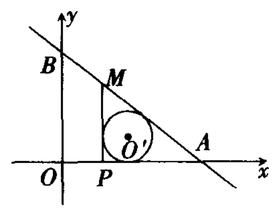

图 1—3

二、选择题

1. 若 $a>0$，$b<-2$，则点 $(a,b+2)$ 在(　　)
   A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限
2. 点 $P(m+3,m+1)$ 在直角坐标系的 x 轴上，则 P 点的坐标为(　　)
   A. $(0,-2)$　　B. $(2,0)$　　C. $(4,0)$　　D. $(0,-4)$
3. 若点 P 在第二象限，则点 P 到 x 轴、y 轴的距离分别为 4、3，那么点 P 的坐标为(　　)
   A. $(4,-3)$　　B. $(3,-4)$　　C. $(-3,4)$　　D. $(-4,3)$
4. 已知点 (x,y) 满足 $x^2-y^2=0$. 则点 P 的位置是(　　)
   A. 在 x 轴或 y 轴上.　　B. 在第一、三象限坐标轴及夹角平分线上.
   C. 在第二、四象限坐标轴及夹角平分线上.　　D. 在坐标轴夹角平分线上.
5. 已知正 $\triangle ABC$ 的中心为坐标原点，顶点 A 的坐标为 $A(2,0)$. 则另两个点的坐标分别为(　　)
   A. $(-1,\sqrt{3})$，$(1,\sqrt{3})$　　B. $(-1,-\sqrt{3})$，$(1,-\sqrt{3})$
   C. $(-1,-\sqrt{3})$，$(-1,\sqrt{3})$　　D. $(1,-\sqrt{3})$，$(1,\sqrt{3})$

三、解答题

1. 已知点 $P(x,y)$ 的坐标满足方程 $(x+3)^2+\sqrt{y+4}=0$. 求点 P 关于二、四象限角平分线的对称点的坐标.

2. 如图 1—4，已知 M 点在第二象限，$\angle MOX=120°$，$MO=8$. 求 M 点的坐标.

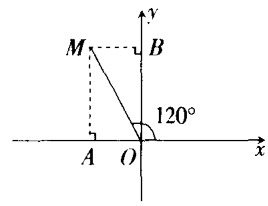

图 1—4

3. 在直角坐标系中描出下列各点：$A(-1,-1)$，$B\left(-2,\frac{1}{2}\right)$，$C(-2,0)$，$D(3,2)$，$E(0,-2)$，$F(-2,3)$

4. 已知点 $P(3a-9,1-a)$ 是第三象限的点，且横纵坐标均为整数. 若 P、Q 关于原点对称. 求 Q 点坐标.

5. 已知点 $P(2x-1,3x-9)$ 在第四象限，化简 $\sqrt{x^2-6x+9}+\sqrt{4x^2-4x+1}$.

能力拓展题

一、填空题

1. 若点 $M(1+a,2b-1)$ 在第二象限内，则点 $N(a-1,1-2b)$ 在第______象限.
2. 等边三角形 ABC 的边长为4，以 AB 边所在的直线为 x 轴. AB 边的中点为原点，建立直角坐标系，则顶点 C 的坐标为______.
3. 圆心都在 x 轴上的两圆相交于 A、B 两点. 已知 A 点坐标为 $(-3,4)$. 则 B 点的坐标为______.
4. 已知 $a<0$，那么点 $P(-a^2-2,2-a)$ 关于 x 轴的对称点 P' 在第______象限.
5. 如图1—5，在直角坐标系中，第一次将 $\triangle OAB$ 变换成 $\triangle OA_1B_1$，第二次将 $\triangle OA_1B_1$，变换成 $\triangle OA_2B_2$，第三次将 $\triangle OA_2B_2$，变换成 $\triangle OA_3B_3$.

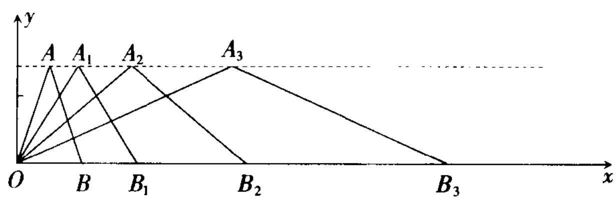

图1—5

已知 $A(1,3)$，$A_1(2,3)$，$A_2(4,3)$，$A_3(8,3)$；$B(2,0)$，$B_1(4,0)$，$B_2(8,0)$，$B_3(16,0)$.

(1)观察每次变换前后的三角形有何变化，找出规律，按此变换规律再将 $\triangle OA_3B_3$ 变换成 $\triangle OA_4B_4$，则 A_4 的坐标________________，B_4 的坐标是________________.

(2)若按第(1)题找到的规律将 $\triangle OAB$ 进行了 n 次变换，得到 $\triangle A_nB_n$，比较每次变换中三角形顶点坐标有何变化，找出规律，推测 A_n 的坐标是______________，B_n 的坐标是______________.

二、选择题

1. 如图1—6，$P(x,y)$ 是以坐标原点为圆心，5为半径的圆周上的点，若 x,y 都是整数，则这样的点共有(　　)

   A. 4个　　B. 8个　　C. 12个　　D. 16个

2. 若 a 为整数，且点 $M(3a-9,2a-10)$ 在第四象限，则 a^2+1 的值为(　　)

   A. 17　　B. 16　　C. 5　　D. 4

3. 在直角坐标系中，若一点的横坐标与纵坐标互为相反数，则该点一定在(　　)

   A. 直线 $y=-x$ 上　　B. 抛物线 $y=x^2$ 上

   C. 直线 $y=x$ 上　　D. 双曲线 $y=\frac{1}{x}$ 上

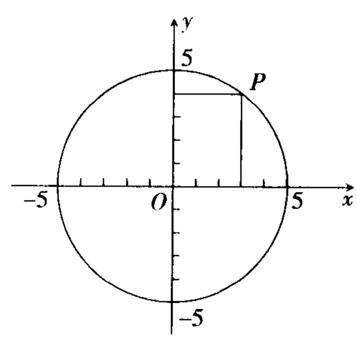

图1—6

4. 如图1—7,在平面直角坐标系中,直线 AB 与 x 轴的夹角为60°,且点 A 坐标为$(-2,0)$,点 B 在 x 轴上方,设 $AB=a$,那么点 B 的横坐标为(　　)

A. $2-\frac{a}{2}$　　B. $2+\frac{a}{2}$　　C. $-2-\frac{a}{2}$　　D. $-2+\frac{a}{2}$

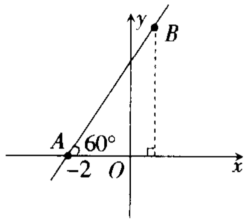

图 1—7

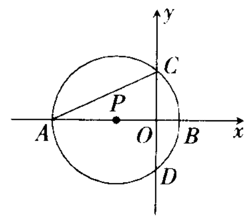

图 1—8

5. 如图1—8所示,线段 AB 在直角坐标系的 x 轴上,以 AB 为直径作⊙P 交 y 轴于 C、D 两点,又 $AC=2\sqrt{5}$,B 点的坐标为$(1,0)$,则圆心 P 的坐标为(　　)

A. $\left(-\frac{3}{2},0\right)$　　B. $\left(-\frac{4}{3},0\right)$　　C. $\left(-\frac{5}{3},0\right)$　　D. $\left(-\frac{5}{2},0\right)$

三、解答题

1. 如图1—9所示,矩形 $ABCD$ 中,AB、CD 与 y 轴的交点为 E、F 两点,点 O 是 AC 中点,$AB=8$,$BC=6$. 求 E、F 的坐标.

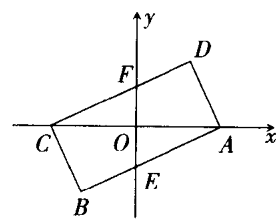

图 1—9

2. 求符合条件的 B 点的坐标:

(1)已知 $A(2,0)$,$|AB|=4$,B 点和 A 点在同一坐标轴上,求 B 点坐标.

(2)已知 $A(0,0)$,$|AB|=4$,B 点和 A 点在同一坐标轴上,求 B 点的坐标.

3. 如图1—10,已知在$\triangle ABC$中,三个顶点坐标分别为$A(-3,0)$,$B(4,0)$,$C(1,3)$,求$S_{\triangle ABC}$.

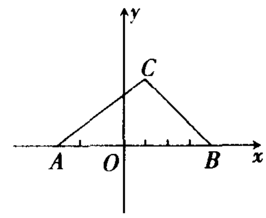

图1—10

4. 已知$\odot A$的圆心坐标为$A(-3,0)$,它与y轴负半轴交于$B(0,-4)$,求(1)$\odot A$的半径;(2)$\odot A$与坐标轴其它三个交点的坐标.

5. 已知如图1—11,在等腰梯形$OABC$中,C点坐标$\left(\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$,$A$点坐标$(5,0)$.

求(1)$\angle A$的度数;(2)AB的长;(3)B点坐标;(4)BC的长.

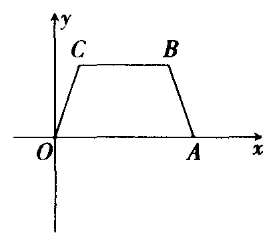

图1—11

四、综合题

1. 如图1—12,直角坐标系中矩形$OADB$,OA与x轴正半轴夹角$\alpha=30°$,$OA=2$,$OB=1$,对角线AB、OD相交于C点,求A、B、C、D各点的坐标.

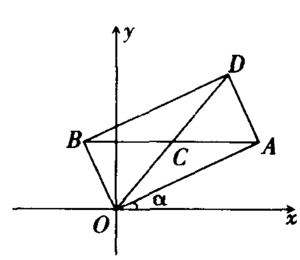

图1—12

2. 已知，点 $P(a,b)$ 在 x 轴的上方，且 a、b 是一元二次方程 $x^2+(2m+30)x+3m=0$ 的两根，若 P 点到原点的距离是 10，求 m 值和 P 点坐标.

3. 已知菱形的边长为 10，一条对角线的长是 12，以两条对角线所在直线为坐标轴，求出菱形四个顶点的坐标.

二 函 数

知识点讲解

■学习目标

1. 能分清实际问题中的常量与变量、自变量与函数.
2. 对简单的函数表达式,能确定自变量的取值范围,会求函数值.

■重点、难点和考点

重点:了解函数的定义,掌握自变量取值范围的确定方法和函数值的求法.

难点:函数有关概念的理解.

考点:(1)理解自变量的取值范围和函数值的意义,对解析式是由简单的整式、分式、二次根式构成的函数,会确定它们的自变量的取值范围和求它们的函数值.

(2)了解常量、变量、函数的意义,会举出函数的实例,以及分辨常量与变量、自变量与函数.

求函数的自变量取值范围和求函数值,以及根据实际问题求两个变量之间的函数关系式是中考命题的热点,题型多见于填空题.

■知识点剖析

1. 常量和变量的理解.
2. 函数的理解.
3. 函数的解析式.
4. 自变量取值范围的确定.
5. 求函数值.

名题精析

例1 求下列函数自变量的取值范围.

(1)$y=\frac{1}{2}x-3$; (2)$y=\frac{1}{2-x}$

(3)$y=\sqrt{3-x}$; (4)$y=\frac{x-1}{x^2+2x-3}$;

(5)$y=\frac{\sqrt{x-1}}{x-3}$; (6)$y=\sqrt{x+1}+\frac{1}{x^2-4x+3}$;

(7)$y=\frac{1}{2-\sqrt{x-2}}$; (8)$y=\frac{1}{x^2+2x+3}$.

解 (1)自变量 x 的取值范围是全体实数;

(2)$\because 2-x\neq 0$, $\therefore x\neq 2$. 即自变量 x 的范围是 $x\neq 2$;

(3)$\because 3-x\geqslant 0$,$\therefore x\leqslant 3$. 即自变量 x 的取值范围是 $x\leqslant 3$;

(4)$\because x^2+2x-3\neq 0$,即$(x+3)(x-1)\neq 0$,$\therefore x+3\neq 0$ 且 $x-1\neq 0$,即 $x\neq -3$ 且 $x\neq 1$;

(5)$\because \begin{cases}x-1\geqslant 0,\\ x-3\neq 0.\end{cases}$解得$\begin{cases}x\geqslant 1,\\ x\neq 3.\end{cases}$综合得自变量 x 的取值范围是 $x\geqslant 1$ 且 $x\neq 3$.

(6)$\therefore \begin{cases}x+1\geqslant 0\\ x^2-4x+3\neq 0.\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}x\geqslant -1\\ x\neq 1 \text{ 且 } x\neq 3.\end{cases}$

综合得自变量 x 的取值范围是 $x\geqslant -1$ 且 $x\neq 1$ 且 $x\neq 3$.

(7)$\because \begin{cases}x-2\geqslant 0, & ①\\ 2-\sqrt{x-2}\neq 0. & ②\end{cases}$ 由①得 $x\geqslant 2$.

由②当 $2-\sqrt{x-2}=0$ 时,即 $\sqrt{x-2}=2$,两边平方得 $x=6$.

$\therefore x=6$ 时,$2-\sqrt{x-2}=0$,

则 $x\neq 6$ 时,$2-\sqrt{x-2}\neq 0$.

综合①、②得自变量 x 的取值范围是:$x\geqslant 2$ 且 $x\neq 6$;

(8)$\because x^2+2x+3=(x+1)^2+2\neq 0$.

$\therefore$ 自变量 x 无论取何值,函数 y 均有意义. 故自变量 x 的范围是全体实数.

点评 (1)求函数自变量的取值范围,必须抓住自变量 x 所在的代数式,若有分母,分母不解为0,若有二次根式,根式下的式子为非负数得到含有自变量 x 的不等式组,解不等式组,求得公共解集即为自变量的取值范围.

例2 已知 $y=\dfrac{2x+4}{x-3}$,求:

(1)当 x 取 $1,-1,\sqrt{3}$时的函数值;

(2)当 $y=-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},-2$ 时 x 的值.

精析 第(1)小题实质是求代数式的值;第(2)题实质就是解方程.

解 (1)当 $x=1$ 时,$y=\dfrac{2\times 1+4}{1-3}=-3$;

当 $x=-1$ 时,$y=\dfrac{2\times(-1)+4}{(-1)-3}=-\dfrac{1}{2}$;

当 $x=\sqrt{3}$时,$y=\dfrac{2\sqrt{3}+4}{\sqrt{3}-3}=-\dfrac{9+5\sqrt{3}}{3}$.

(2)当 $y=-\dfrac{1}{3}$时,$\dfrac{2x+4}{x-3}=-\dfrac{1}{3}$,解得 $x=-\dfrac{9}{7}$;

当 $y=\dfrac{1}{3}$时,$\dfrac{2x+4}{x-3}=\dfrac{1}{3}$,解得 $x=-3$;

当 $y=-2$ 时,$\dfrac{2x+4}{x-3}=-2$,解得 $x=\dfrac{1}{2}$.

点评 (1)当函数是由一个解析式表示时,欲求函数值,实质就是求代数式的值.
(2)当已知函数解析式,又给出函数值,欲求相应的自变量的值时,实质就是解方程.
(3)当给定函数值的一个取值范围,欲求相应的自变量的取值范围时,实质就是解不等式.

例3 下面各题中都有两个函数，它们是同一个函数吗？为什么？

(1)$y=x$ 与 $y=(\sqrt{x})^2$；(2)$y=x$ 与 $y=\frac{x^2}{x}$；(3)$y=\frac{1}{x}$与 $y=\frac{x}{x^2}$.

解 (1)不是同一函数，因为它们自变量 x 的取值范围不同. $y=x$ 中 x 为全体实数，$y=(\sqrt{x})^2$ 中 $x\geqslant 0$.

(2)不是同一函数. 虽然 $y=\frac{x^2}{x}$约分后可化为 $y=x$，但它的自变量 $x\neq 0$，即它们自变量 x 的取值范围不同.

(3)是同一函数. 首先，它们自变量的取值范围都是 $x\neq 0$，其次，它们的自变量与函数的对应规律完全相同. $y=\frac{x}{x^2}=\frac{1}{x}$与 $y=\frac{1}{x}$完全一样，故它们是同一函数.

点评 两个函数完全相同，必须自变量取值范围相同，对应关系相同.

例4 如图2—1，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=2$，$BC=3$，P 是 BC 边上与 B、C 两点不重合的任意一点，设 $PA=x$，D 点到 PA 的距离为 y，求 y 与 x 之间的函数关系式，并求出自变量 x 的取值范围.

解 过 D 点作 $DE\perp AP$，E 是垂足，则 $DE=y$.

$\because$ $ABCD$ 是矩形，$\therefore \angle B=90°$，$AB\perp AD$，

$\therefore \angle DAE=\angle APB$. 又 $\angle B=\angle AED=90°$，

$\therefore \triangle ABP\backsim\triangle DEA$，

$\therefore \frac{AD}{AP}=\frac{DE}{AB}$. 将 $AB=2$，$AD=3$，$PA=x$ 代入得 $\frac{y}{2}=\frac{3}{x}$，

$\therefore y=\frac{6}{x}$.

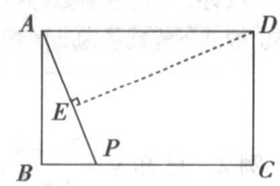

图2—1

当点 P 与点 B 重合时，$PA=BA=2$，即 $x=2$.

当点 P 与点 C 重合时，$PA=CA=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$，即 $x=\sqrt{13}$. 由于点 P 是 BC 上任意一点，且与 B、C 不重合，

$\therefore 2<x<\sqrt{13}$.

$\therefore$ y 与 x 之间的函数关系式是 $y=\frac{6}{x}$ $(2<x<\sqrt{13})$.

点评 (1)解有关函数问题时，往往将代数与几何知识有机地联系起来，要结合几何图形分析问题.

(2)求实际问题中自变量的取值问题，往往先求极端值. 如本题中 P 点与 B 点重合时得到 $x=2$ 是边值. 同样 P 点与 C 点重合时，$x=\sqrt{13}$是边值，再求范围，从而得到自变量 x 的取值范围是$2<x<\sqrt{13}$.

例5 如图2—2所示，$\angle ABC=30°$，O 是 BA 上的一点，以 O 为圆心作圆与 BC 相切于点 D，交 BA 于点 E，连结 ED，F 是 OA 上的一点，过 F 作 $FG\perp AB$ 交 BC 于点 G，$BD=\sqrt{3}$，设 $OF=x$，四边形 $EDGF$ 的面积为 y

(1)求 y 与 x 的函数关系式

(2)若四边形 $EDGF$ 的面积是$\triangle BED$ 面积的5倍，试确定 FG 所在直线与$\odot O$ 的位置关系，并且说明理由.

精析 四边形 $EDGF$ 非特殊四边形，不能直接使用面积公式，故利用面积的割补，观察图形，不难发现 $S_{四边形EDGF}=S_{\triangle BGF}-S_{\triangle BED}$

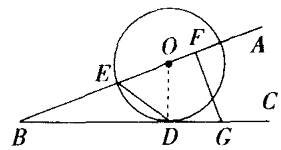

图 2—2

解 (1)连结 OD,则 $OD \perp BC$,$\triangle BOD$ 是直角三角形.

$\because BD=\sqrt{3}$,$\angle B=30°$,$\therefore OD=1$,$BO=2$

$\therefore BE=BO-OE=1$,$\therefore BF=2+x$,$\therefore S_{\triangle BOD}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\because E$ 是 BO 的中点,$\therefore S_{\triangle BED}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle BOD}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

$\because FG \perp AB$,$\therefore \triangle BGF$ 是直角三角形.

$\therefore \angle B=\angle B$(公共角).

$\because Rt\triangle BOD \backsim Rt\triangle BGF$,

$\therefore \dfrac{S_{\triangle BOD}}{S_{\triangle BGF}}=\dfrac{BD^2}{BF^2}$,

$\therefore \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{S_{\triangle BGF}}=\dfrac{(\sqrt{3})^2}{(2+x)^2}$.

$\therefore S_{\triangle BGF}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}(2+x)^2$,

$\therefore S_{四边形EDGF}=S_{\triangle BGF}-S_{\triangle BED}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}(2+x)^2-\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

(2)依题意,得$\dfrac{\sqrt{3}}{6}(2+x)^2-\dfrac{\sqrt{3}}{4}=5\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

解得 $x_1=1$,$x_2=-5$(舍去),$\therefore OF=1$

$\therefore$ 直线 $FG \perp \odot O$ 的半径 OF

$\therefore$ 直线 GF 与$\odot O$ 相切

点评 本题是一道代数、几何综合题,首先要识别题目所引入的两个变量在几何图形中所表示的几何意义,弄清它们之间的内在几何关系,由几何图形性质推导出两个变量的函数关系式.