

数学教育学

[苏] A. A. 斯托利亚尔 著

人民教育出版社

数 学 教 育 学

[苏] A. A. 斯托利亚尔 著

丁尔陞 王慧芬

锺善基 孙宏安 曹伟丽 译

王玉阁 梁国仪

人民教育出版社

А. А. СТОЛЯР
ПЕДАГОГИКА
МАТЕМАТИКИ

КУРС ЛЕКЦИЙ

Издание 2-е переработанное
и дополненное

Издательство "Высшая школа"

Минск 1974

数 学 教 育 学

[苏] А. А. 斯托利亚尔著

丁尔陞 等译

*

人民教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京市房山县印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32 印张 13.5 字数 163,000

1984年7月第1版 1985年8月第1次印刷

印数 1—15,500

书号 7012·0781 定价 2.45 元

译者说明

本书是一本数学教育学专著，也是苏联师范院校数学教育学课程的讲授教材。

全书除引论外共分三篇，由三十讲组成。引论一讲，主要讲数学教育学的对象和方法。数学教育学是数学、教育学、逻辑学和心理学的边缘科学。它的对象是数学教学，数学教学是“数学活动”（思维活动）的教学而不仅是数学活动的结果——数学知识的教学。第一篇三讲，主要讲数学教学的内容，系统阐述苏联国内外数学教育现代化运动。其基本观点是，数学教育现代化不是要教现代数学而是指数学的现代教学，即把学校数学建立在现代数学的思想基础上并且使用现代数学的方法和语言。第二篇九讲，主要讲数学教学法，阐明数学教学的原则，教学过程的改进等一般方法问题，并着重分析数学的特殊教学法。特殊方法中除了讲逻辑方法之外，还讲了观察、实验、归纳、类比、一般化、抽象化等方法。第三篇十七讲，主要讲学校教学中数学思想的形成和发展。这是本书的主要部分，讲了最基本的重要数学概念、思想和方法。比如，集合和关系、函数、运算、数、方程和不等式、极限和连续、导数、积分、几何变换、向量、几何作图、测度、坐标方法、同构思想等的形成和发展。

从本书中可以看到如何对基本的数学概念、思想和方法进行逻辑分析、历史分析和心理分析，如何研究数学教育过程，而不仅是象传统数学教学法那样着眼于研究具体课题的具体教法，因而有利于揭示数学教学过程的客观规律。本书使用的数学概念、思想、方法和语言都尽量和现代数学一致或接近，因而有利于克服中

小学数学教学与现代数学科学脱节的现象，同时由于叙述比较清楚、准确、严格，所以澄清了一些在中学数学中模糊不清或容易混淆的概念。本书还比较系统、充分地阐明了苏联1969年以来实行的数学教学大纲和教材的指导思想和这次以数学教育现代化为特征的改革，从中可以了解近二十年来苏联中小学数学教学改革的实际情况。

我们翻译出版本书的目的是促进我们的数学教育的学术研究，而不是为了直接用于当前的中小学数学教学。

本书的序言、附录和第1、4、14、15、16、17、18、21、22、23、28、30讲由丁尔陞同志翻译，第5、9、10、13、19、20、24、29讲由王慧芬同志翻译，第25、26、27讲由钟善基同志翻译，第6、7、12讲由孙宏安同志翻译，第2、3讲由曹伟丽同志翻译，第11讲由王玉阁同志翻译，第8讲由梁国仪同志翻译。最后全稿由丁尔陞同志统一校订。由于我们水平有限，时间仓促，译文可能会有很多不妥之处，欢迎读者批评指正。

1984年2月

目 录

第二版序言.....	1
第一版序言.....	2
符 号.....	5

引 论

第一讲 数学教育学的对象和方法.....	8
1. 数学教育学的对象.....	8
2. 两类问题以及它们之间的联系.....	11
3. 和其他学科的联系.....	12
4. 数学教育学的方法.....	17
5. 结构简图.....	20

第一篇 数学教学的内容

第二讲 作为科学的数学和作为教学科目的数学.....	21
1. 作为科学的数学.....	21
2. 数学教学的目的.....	27
3. 作为教学科目的数学.....	29
第三讲 数学教育的现代化(I)(国际).....	33
1. 数学教育现代化运动.....	33
2. 低年级教育的现代化.....	35
3. 中年级和高年级教育的现代化.....	39
第四讲 数学教育的现代化(II)(国内).....	47
1. 我国数学教育现代化的活动.....	47
2. 低年级数学教学.....	48
3. 四—十年级新数学教学大纲.....	50

4. 新教科书.....	53
5. 加深数学学习的学校.....	57
6. 选修课.....	60

第二篇 数学教学法

A. 一般教学法

第五讲 数学的教学原则.....	63
1. 教学原则.....	63
2. 教学的科学性.....	64
3. 掌握知识的自觉性.....	66
4. 学生的积极性.....	70
5. 教学的直观性.....	71
6. 知识的巩固性.....	79
7. 个别指导.....	81

第六讲 教学过程的改进.....	83
1. 现代趋势.....	83
2. 算法逻辑方法.....	84
3. 程序教学.....	94
4. 技术手段.....	102

B. 特殊教学法

第七讲 数学活动的教学.....	104
1. 问题的提出.....	104
2. 数学活动的分析.....	107
3. 数学活动各方面的教学.....	109
4. 作为数学活动教学手段的问题.....	113

第八讲 经验材料的数学组织化.....	116
1. 问题的提出.....	116
2. 观察和实验.....	117
3. 归纳.....	122

4. 类比.....	125
5. 一般化和抽象化.....	128
第九讲 数学材料的逻辑组织化 (I).....	132
1. 概念的外延和内涵.....	132
2. 定义.....	132
3. 分类.....	141
4. 概念的体系.....	145
第十讲 数学材料的逻辑组织化 (II).....	148
1. 归纳和演绎.....	148
2. 数学命题的证明.....	151
3. 证明的教学.....	153
4. 局部逻辑组织化.....	162
第十一讲 数学教学中的公理方法.....	165
1. 问题的提出.....	165
2. 作为学校课程构成法的公理方法 (A_1).....	166
3. 作为学习对象的公理方法 (A_2).....	169
第十二讲 理论的应用.....	182
1. 理论应用的类型.....	182
2. 学校教学中数学和物理的联系.....	184
3. 问题.....	187
4. 数学问题.....	192
5. 解问题教学的一般方法.....	198
6. 特殊方法.....	199
第十三讲 数学教学和学生逻辑思维的发展.....	202
1. 传统教学和学生逻辑思维的发展.....	202
2. 逻辑初步知识在数学教学中的作用和地位.....	208
3. 阐明逻辑运算的意义和性质的教法.....	210
4. 推理的分析的教法.....	215

第三篇 学校教学中数学思想的形成和发展

第十四讲 语言	221
1. 数学语言	221
2. 数学语言和数学教学	224
3. 变元	226
4. 项和式	228
5. 学校教学中的现代数学语言	232
第十五讲 集合和关系	235
1. 集合论概念的作用	235
2. 内容和方法	236
3. 关系	241
4. 等价关系	245
5. 顺序关系	247
第十六讲 函数 (I)	252
1. 一般函数概念的各种解释	252
2. 现代函数概念的逻辑分析	254
3. 学校教学中函数概念形成和发展的历史途径	258
4. 逻辑方法	260
第十七讲 函数 (II)	265
1. 用初等方法研究函数	265
2. 研究函数 $f: x \rightarrow ax + b, x \in R$	266
3. 研究函数 $f: x \rightarrow ax^2, x \in R$	271
4. 作图象的教法	273
第十八讲 运算	277
1. 传统的教学	277
2. 各种解释	278
3. 一般运算概念的形成	279
4. 代数结构	282

第十九讲 数 (I)	284
1. 传统的教法	284
2. 数概念发展的各种模式	284
3. 学校教学中揭示数的概念发展的思想	286
4. 引入新数的一般教法	288
第二十讲 数 (II)	291
1. 数集的结构	291
2. 自然数	292
3. 整数	296
4. 有理数	297
5. 实数	299
第二十一讲 方程和不等式	302
1. 各种解释	302
2. 在逻辑函数思想基础上形成方程和不等式的一般概念	305
第二十二讲 极限和连续	312
1. 总论	312
2. 序列的极限	313
3. 函数的极限	318
4. 函数的连续性	320
第二十三讲 导数	324
1. 大纲中的微分初步	324
2. 导数的概念	324
3. 导数的应用	330
第二十四讲 积分	334
1. 积分概念的引入	334
2. 积分的应用	340
第二十五讲 几何变换	345
1. 各种处理方法	345
2. 平面几何中的几何变换	349

3. 立体几何中的几何变换	353
---------------	-----

第二十六讲 向量 356

1. 两种处理方法	356
2. 关于立体几何的向量建立法	357
3. 关于七年级和九年级中向量概念的引入	364
4. 应用	367

第二十七讲 几何作图 372

1. 五年级几何作图	372
2. 平面几何系统课程中的几何作图	373
3. 立体几何中的几何作图	378

第二十八讲 测度 383

1. 集合测度的一般概念	383
2. 有限集元素的个数	384
3. 几何量	385

第二十九讲 坐标方法 390

1. 大纲中的坐标方法	390
2. 引入坐标系的几个阶段	391
3. 空间直角坐标系	392

第三十讲 同构思想 399

1. 问题的提出	399
2. 同构概念的形成和发展	399
3. 在教学中应用同构思想的可能性	405

参考文献 408

推荐文献 412

大纲指南 413

附录 417

第二版序言

本版《数学教育学》和第一版有很大的不同。第一版出版后的这四年中,中学数学新大纲已经成了正式大纲,四至七年级正在按这个大纲进行教学。已经出版了这几个年级的新教科书和其余各年级的实验课本。考虑到这些情况,因此本版对各讲作了很大修改,并且补充了大量材料。

本版共有 30 讲课文(而不是第一版的 24 讲)。有两讲阐述了数学教育现代化问题(I——国际,II——国内),新增加了几讲(《极限和连续》,《导数》,《积分》,《几何作图》,《坐标方法》)。

对第一版的改写与补充主要是按具体化的方向进行的。保留了数学教育学概念结构的科学体系,补充了具体的解释性的材料。

为了便于把本书用作数学教学法课程的教材,在书末增加了大纲指南,其中指明这门课程的大纲中的哪些课题在第几讲中讲授,哪些问题在课堂讨论中或在实习作业中还要研究。

第一版序言

1. 对中等数学教育的深刻改革——引进新大纲和改进教学方法——只有在大大改进教师培训，特别是提高教学水平的条件下才能实现。

只有教师才能把一切新的教学内容和新的教学方法在学校的实践中加以贯彻，因此首先必须使所有这些新东西变成教师自己的财富。

学校数学教育现代化(现代化运动普及到了世界上一切发达国家)要求教师掌握一些新课题的教法，而且要求重新审查传统章节的教法措施。

数学教育现代化与其说是在中学学习现代数学，毋宁说是现代的数学教学。

传统教学法在教传统教材方面也过时了，因为在今天，这些教材也要在现代的基础上加以阐述。数学教学落后于现代数学科学与其说在于内容(中学课的传统内容能删去的不多，而且可以增加的现代数学内容也很少)，倒不如说在于思想基础和内容的逻辑结构。要克服这种落后现象，不是采取在中学大纲中增加新课题的办法(这也必要，但不充分)，而是把教学建立在现代数学的思想基础上，使中学课程的风格和语言接近于现代数学的风格和语言，使学生的思维向现代数学思维发展。

2. 现行(高等师范院校所讲授的)数学教学法课的内容、风格和结构都过时了，必须加以现代化和改善，实质上是要建立一门新的课程。

这门课程和传统课程应当有下列区别：

a) 其对象应当包括学校数学教学内容和方法的广泛课题。

b) 其结构应当反映一定的科学体系。

b) 其方向应当是培养未来的教师,使他们理解学校教学与现代数学、教育学、逻辑学和心理学的关系,从而创造性地处理数学教学问题。

r) 引导学生独立分析教材,提出并解决教学法的问题。

л) 保证学生得到更一般、更灵活的教学法训练,其中包括实现现行大纲的具体教法知识,理解教学内容和方法进一步发展的前景,并且会根据教学法的一般思想制订新课题的具体教法。

3. 《数学教育学》这个名称比传统的名称《数学教学法》更恰当地表达了这门课所包括的课题,它指明了数学教学的理论和实践的两个基本来源(教育学和数学)。

《教学法》这个术语理所当然仅仅是指中学课程的单个具体问题的讲法(如《解线性方程和线性不等式的教法》,《用初等方法和导数研究函数的教法》等等)。但是它不适于表达数学教学的所有内容和方法问题。近来,在数学教育现代化提出了一系列与传统的《数学教学法》无关的课题的时候,这一点是特别明显的。

《数学教育学》这个术语在现代科学术语中已经被广泛使用了,因此在相应的教学科目中使用它完全是自然的。

4. 数学教育学作为教学科目由四部分组成:讲授课程,课堂讨论,实习课和实验课。

讲授课程考察《教什么》和《如何教》等教育学的课题,即数学教学的内容和方法。其中没有所谓的“分论”,但是包括在学校教学中的数学的一般思想和重要概念的教法分析①。

分论(或具体的教学法)中的主要问题都包含在课堂讨论的课

① 在正在编写的课堂讨论和实习课用的教学参考书中,在数学教育学实习课中将叙述学校课程的重要课题的具体教法的讨论。

题中了,就是说属于学生独立工作的范围,这是本课程和传统课程的本质区别之一。学校课程的某个课题的某种教学方案不由教师讲授,而是让学生独立地去研究教科书和教学法文献中已有的各种教学方案,进行分析对比,从中选出最合适的一种,并论证这种选择的合理性,或者设计出自己的教学方案,在教育实习的时候作实验验证。

讲授课计划约 60 课时(根据现行教学计划)。

实习课用来作教材的安排方案,作课时计划,提出并解决教学法问题。

实验课用来到学校去观察和分析课堂教学,用来熟悉数学教学的直观教具和技术手段,熟悉大地测量和模型制作。

本数学教育学教材包括了讲授课程的讲授提纲。

5. 《数学教育学》课程预备给三、四年级大学生讲授,他们已经听过了基本数学课程,具有一定的逻辑学和教育学、心理学的训练。

从这个前提出发,在本教材中作者不提供读者应当知道的数学材料或逻辑学材料,有时讲一小段材料,只是为了说明这段材料在学校的讲法。

在讲课中不是所有问题都讲得一样完整。那些在教学法文章中讲得少或者讲得不满意的问题讲得更细致些。

6. 本书末尾列的书目,除了包括编写本书时使用过的参考文献以外,还包括建议读者参考的以及准备课堂讨论和实习时要用到的推荐文献。在课文中引用的文献用在方括号内写出参考书目中该书的序号的办法表示。

在本书中引用了作者的其他著作中,特别是[25]和[27]中的某些材料。

作者对 И. Е. Щиманский 教授, В. Л. Минковский 和 Г. П. Бевзу 副教授致谢,他们读了原稿并且提了许多宝贵的意见。

符 号

本书采用现代数学语言(建议在学校教学中也适当使用它们).

现在把使用过的符号(不包括传统的)列在下面:

$\overline{Df}$ 等于按定义;

$\in$ 为元素属于;

$\subseteq$ 是子集, 部分, 包含于;

$\emptyset$ 空集;

$\{a, b, c\}$ 由元素 a, b, c 所组成的集合;

$M[P(x)]$ 具有性质 P 的一切 x 的集合^①;

$\cup$ 并;

$\cap$ 交;

(a, b) 序偶;

$(a_1, a_2, \dots, a_n)$ n 序组 (n 个元素的有序组);

$A \times B$ A 和 B 二集合的积;

$A^2 = A \times A$ 集合 A 与 A 的积 (A 中元素的一切序偶的集合);

A^n n 个集合 A 的积 (A 的元素的一切 n 序组的集合);

$\bar{A}$ A 的补集; 命题 A 的否定;

N 一切自然数的集合 $\{1, 2, 3, \dots\}$;

N_0 一切非负整数的集合 $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$;

Z 一切整数的集合;

Q 一切有理数的集合;

① 也用符号 $\{x | P(x)\}$.

R 一切实数的集合;

R^2 一切实数序偶的集合(实平面);

R^3 一切三实数序组的集合(三维实空间);

$$\left. \begin{array}{l} A \xrightarrow{f} B \\ \text{或 } x \rightarrow f(x), \\ x \in A, f(x) \in B \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{集合 } A \text{ 到 } B \text{ 的映射, 或定义域为 } A, \\ \text{从 } B \text{ 取值的函数 } f; \end{array}$$

$B \xrightarrow{f^{-1}} A$ f 的逆映射;

$[a, b]$ 闭区间;

$]a, b[$ 开区间;

$]a, b]$ 下闭上开区间;

$[a, b[$ 下开上闭区间;

T 真值, 真命题;

F 假值, 假命题;

$\wedge$ 合取;

$\vee$ 析取;

$\Rightarrow$ 蕴涵;

$\Leftrightarrow$ 等价;

$(\forall x)$ 对于一切 x (全称量词);

$(\forall x) \in N$ 对于 N 中一切 x (全称限制量词)①;

$(\exists x)$ 存在 $x, \dots$ (存在量词);

$(\exists x) \in N$ N 中存在 $x, \dots$ (存在限制量词)②;

$$\left. \begin{array}{l} A \xrightarrow{P} \{T, F\} \\ \text{或 } x \rightarrow P(x), x \in A, \\ P(x) \in \{T, F\} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{定义在集合 } A \text{ 上的单空位谓词 } P \text{ (单} \\ \text{元逻辑函数);} \end{array}$$

① 也用 $(\forall x \in N)$.

② 也用 $(\exists x \in N)$.