高等数学习题集解答

第 一 册

北京广播电视大学

79.5

目　　录

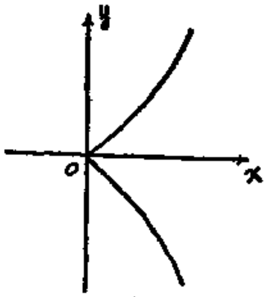
第一编　解析几何

第一编　解 析 几 何

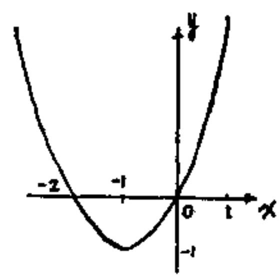
第一章　平面上的直角坐标、曲线及其方程

1.44　画出下列各方程的轨迹：

c) $y^2-x^3=0$　　　　d) $y-x^2-2x=0$ 即 $y=(x+1)^2-1$

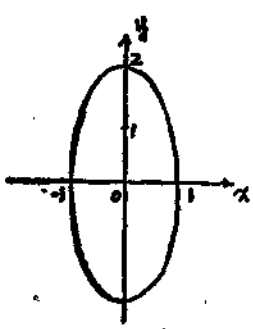


1.44图 (c)

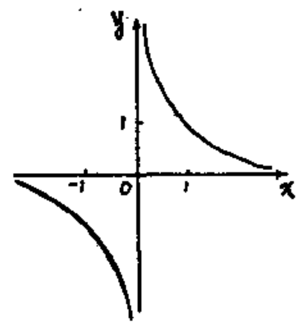


1.44图 (d)

e) $4x^2+y^2\ 4$ 即 $X^2+\frac{y^2}{4}=1$，　　　　f) $xy=1$



1.54图(e)



1.44图 (f)

1.45　方程$(x-1)^2+(y-2)^2=0$所对应的几何轨迹是什么？

解：只有当$x-1=0$ 且 $y-2=0$ 时方程成立，故对应的几何轨迹为一点 (1，2)。

1.46　一动点，它到座标原点和到点$(-5，-4)$的距离是相等的。述立其轨迹方程。

解：设动点座标为(x，y)，则

$$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x+5)^2+(y+4)^2}\qquad \text{整理得}\qquad 10x+8y+41=0$$

1.47　一动点，它到y轴的距离等于它到点c(2，0)的距离，迷立它的轨迹方程。

解：　$|x|=\sqrt{(x-2)^2+y^2}$　　得　　$y^2-4x+4=0$

1.48　一动点，它到x轴的距离是到y轴的距离的两倍，建立它的轨迹方程。

解： $|y|=|2x|$ 即 $y=2x$ 和 $y=-2x$

1.49 作到 x 轴及 y 轴的距离的乘积等于 1 的轨迹方程。

解： $|x||y|=1$ 即 $xy=\pm 1$

1.50 在两座标轴间有定长线段 AB，在 AB 上有某一点P，当点A永远在横轴上，同时点B永远在纵轴上移动时，试求点P的轨迹。

解： 设P点座标为(x, y)

P点把AB分为长是 m 和 n 的两段，则由△的相似知

$$\frac{BA}{BP}=\frac{OA}{OD},\quad \frac{AB}{AP}=\frac{OB}{DP}$$

即 $\frac{m+n}{n}=\frac{x'}{x}$ 即 $x'=\frac{m+n}{n}x$ （x' 为A的横座标）

$\frac{m+n}{m}=\frac{y'}{y}$ 即 $y'=\frac{m+n}{m}y$ （y' 为B的纵座标）

又 $x'^2+y'^2=(m+n)^2$

得 $\left(\frac{m+n}{n}\right)^2x^2+\left(\frac{m+n}{m}\right)^2y^2=(m+n)^2$ 即 $\frac{x^2}{n^2}+\frac{y^2}{m^2}=1$

1.51 枪弹以速度 V_0 而与地面成 α 角射出，试建立弹道的轨迹方程。

解： 不考虑空气阻力及其他次要因素影响，只受重力作用，得 $x=V_0t\cos\alpha$

$$或\ y=x\,\mathrm{tg}\alpha-\frac{gx^2}{2V_0^2\cos^2\alpha}$$

$$y=V_0t\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2$$

1.52 一渔轮在进行拖网时，测得它到一小岛的距离与到一直线海岸的距离之比保持为一定数 e，试建立渔轮航行的轨迹方程。

解： 取座标系 xoy，使小岛位于其原点上，取 y 轴平行于直线海岸，渔轮为P(x, y)

则 $$\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{|X-a|}=e$$

得 $(1-e^2)x^2+y^2+2ae^2x-a^2e^2=0$

1.53 一枢轴 RQ 绕定点P旋转，并推动直角三角形 ACB 使沿直线 KL 滑动，求枢轴 RQ 与斜边 AB 的延长线的交点M的轨迹方程。

解：由 △OPC～△NMC　　△NMB～△CAB

$$得\ \begin{cases}\dfrac{y}{d}=\dfrac{\overline{CN}}{x+\overline{CN}} & ①\\[2ex] \dfrac{b}{y}=\dfrac{a}{a+\overline{CN}} & ②\end{cases}$$

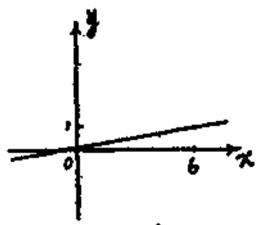
由②得 $\overline{CN}=\frac{a}{b}(y-b)$

代入①得$\frac{d}{y}=1+\frac{x}{CN}$ 即 $\frac{d}{y}=1+\frac{bx}{a(y-b)}$

得 $ay^2+bxy-a(b+d)y+abd=0$

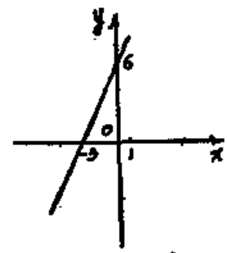
1.54 作出下列参数方程的图形：

a) $x=2t$, $y=\frac{t}{3}$



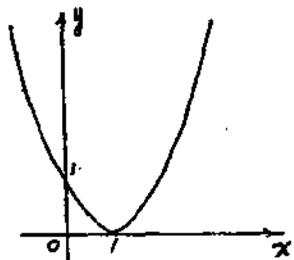
1.54图(a)

b) $x=5t^2-1$, $y=10t^2+4$



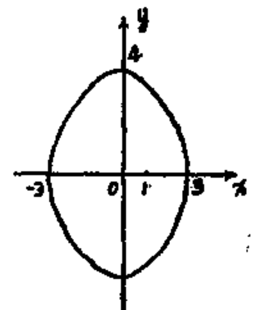
1.54图(b)

c) $x=2t+1$, $y=4t^2$



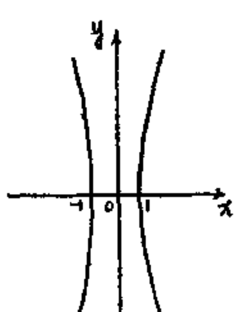
1.54图(c)

d) $x=3\text{sine}\theta$, $y=4\cos\theta$



1.54图(d)

e) $x=\csc\theta$, $y=5\text{ctg}\theta$



1.54图(e)

1.55 求圆 $x^2+y^2=8$ 与直线 $x-y=0$ 的交点

解：$\begin{cases}x^2+y^2=8\\x-y=0\end{cases}$

解之 $\begin{cases}x=2\\y=2\end{cases}$ $\begin{cases}x=-2\\y=-2\end{cases}$

即交点M(2, 2)，M_2(−2, −2)

1.56 求曲线 $4x^2+y^2=32$ 和 $y^2=8x$ 的交点

解：$\begin{cases}4x^2+y^2=32\\y^2=8x\end{cases}$ 解之 $\begin{cases}x=2\\y=4\end{cases}$ $\begin{cases}x=2\\y=-4\end{cases}$

即M_1(2, 4)，M_2(2, −4)

（注意：此题 x 只取正值）

1.58　下列各曲线方程，如平移座标轴至其后所示的新原点，应变为何种形式？

b)　$5x-y+2=0$，$(3,\ -2)$

解：$5(x-3)-(y+2)+19=0$　　即　$5x'-y'+19=0$

c)　$x^2+y^2-4x-2y=0$，$(2,\ 1)$

解：$(x-2)^2+(y-1)^2=5$　　即　$x'^2+y'^2=5$

e)　$y^2=x^3$　$(-2,-3)$

解：由座标平移公式得

$(y'-3)^2=(x'-2)^3$

展开得　$y'^2-6y'-x'^3+6x'^2-12x'+17=0$

1.59　下列各曲线方程，如依其后注角度将座标轴依逆时针方向旋转，应变为如何？

a)　$x+y=0,\ \frac{\pi}{4}$

解：显然，此时 y' 重合于直线，故新方程为 $x'=0$（即新 y' 轴）

b)　$x+2y=1$，$\frac{\pi}{3}$

解：按公式

$$\begin{cases} x=x'\cos\frac{\pi}{3}-y'\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}x'-\frac{\sqrt{3}}{2}y' \\ y=x'\cos\frac{\pi}{3}+y'\cos\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}x'+\frac{1}{2}y' \end{cases}$$

代入原方程可得

$$(1+2\sqrt{3})x'+(2-\sqrt{3})y'=2$$

c)　$x^2+4xy+y^2=16,\ \frac{\pi}{4}$

解：代公式　$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y') \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y') \end{cases}$　　代入原方程

可得　$3x'^2-y'^2=16$

杂　　题

1.61　P为一动点，它到原点O的距离的平方等于它的两座标的和，求点P的轨迹。

解：　设$P(x,\ y)$，则$x^2+y^2=x+y$

即　　$(x-\frac{1}{2})^2+(y-\frac{1}{2})^2=\frac{1}{2}$

知P的轨迹为中心在点（$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$），半径为 $\sqrt{\frac{2}{2}}$ 的圆

1.62　给定直线 ox 及与它距离为 a 的点A，经过点A作一切可能的直线，且在每条直线上，在它与基线 ox 的交点 B的两侧，取长度等于 b 的线段 MB 和M_1B。求点 M_1 和点M的轨迹方程（蚌线）。

解：

由△的相似，可得

$$\begin{cases} \dfrac{a}{-y}=\dfrac{b+\overline{AM}}{b} & ① \\ \overline{AM}=\sqrt{x^2+(a+y)^2} & ② \end{cases}$$

由①得　$\overline{AM}=-\dfrac{b(a+y)}{y}$　　代入②得　$x^2+(a+y)^2=\dfrac{b^2(a+y)^2}{y^2}$

即　$(a+y)^2(b^2-y^2)=x^2y^2$，此为蚌线方程

考察　$M_1(x_1,\ y_1)$得到同一方程

1.64　试用三角形的顶点座标来表示其形心的座标。

解：形心分中线为 2：1　　BE为边AC的中线，交于E，其座标为：

$\left(\dfrac{x_1+x_3}{2},\ \dfrac{y_1+y_3}{2}\right)$，M（形心）把 BE 分为两段，

$$\overline{BM}=2\,\overline{ME}$$

由定比分点公式知

$$x=\frac{x_2+2\cdot\dfrac{x_2+x_3}{2}}{1+2}=\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\qquad 同样 y=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

1.66　在A（−1，0），B(−2，4)，C(4，5)三点上分别放置 30 克，50 克和 70克重量的物体，试求这一物系的重心的位置。

解：由上公式，重心座标为：

$$x=\frac{-1\times30-2\times50+4\times70}{30+50+70}=1\qquad y=\frac{4\times50+5\times70}{30+50+70}=\frac{11}{3}$$

曲线的参数方程

1.69　设动点在 xoy 平面上沿一直线作等速运动，开始一秒钟后它从点(1，2)移动到点(2，1)，问 t 秒钟后动点的位置(x，y)又是怎样？

解：求VxVy：

$$\begin{cases} Vx=\dfrac{x_1-x_0}{t}=1 \\ Vy=\dfrac{y_1-y_0}{t}=-1 \end{cases}$$

由$(x_0, y_0)=(1, 2)$得　$x=1+t$　$y=2-t$

1.69　描出下列参数方程的图形：

a)　$x=2t^2$，$y=3t-t^3$

解：由方程看出$x\geqslant 0$，且关于X轴对称（∴当t变号，y变号而x不变号）

t	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	$\sqrt{5}$	$\sqrt{6}$
x	0	2	4	6	8	10	12
y	0	2	$\sqrt{2}$	0	2	$2\sqrt{5}$	$3\sqrt{6}$

b)　$x=2t+3$　　$y=\dfrac{t^2}{2}-4$

解：可变为：　$y=\dfrac{(x-3)^2}{8}-4$

1.70　消去曲线的参数方程

$\begin{cases} x=3+4\cos\theta \\ y=3\sin\theta \end{cases}$ 中的参数θ而将曲线方程表示为。$F(x, y)=0$　的形式

解：　$\begin{cases} \dfrac{x-3}{4}=\cos\theta \\ \dfrac{y}{3}=\text{sixn}\theta \end{cases}$　得　$\dfrac{(x-3)^2}{4^2}+\dfrac{y^2}{3^2}=1$

第二章　直　　线

杂　　题

2.46　已知一直线方程为$y=\sqrt{3}x-2$，先将坐标轴平移，使新原点为$(\sqrt{3}, 1)$再将坐标轴依逆时针方向旋转$\dfrac{\pi}{6}$，求此直线在新坐标系下的方程。

解：把公式　$\begin{cases} x=x'+\sqrt{3} \\ y=y'+1. \end{cases}$　代入原方程得　$y'=\sqrt{3}x'$

再把转轴公式　$\begin{cases} x'=x'\cos\dfrac{\pi}{6}-y'\sin\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x'-\dfrac{2}{1}y' \\ y'=\dfrac{1}{2}x'+\dfrac{\sqrt{3}}{2}y' \end{cases}$

代入上方程，得　$x'=\sqrt{3}y'$

2.47　直线l经过定点$(-3, 4)$，并且有下列条件之一，求l的方程：

b) 垂直于经过两点(4，1)和(7，3)的直线

解：过两点的直线斜率为 $K=\frac{3-1}{7-4}=\frac{2}{3}$

得 $K=-\frac{3}{2}$，所求为方程 $y-4=-\frac{3}{2}(x+3)$ $3x+2y+1=0$，即

d) 在两轴上的截距之和等于12。

解 $\begin{cases} a+b=12 \\ -\frac{3}{a}+\frac{4}{b}=1 \end{cases}$ 解得：$\begin{cases} a=-4 \\ b=16 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=9 \\ b=3 \end{cases}$

故方程为 $-\frac{x}{4}+\frac{y}{16}=1$ 即 $4x-y+16=0$

或 $\frac{x}{9}+\frac{y}{3}=1$ 即 $x+3y-9=0$

e) 与点(12，9)相距5单位。

解：设方程为 $y-4=K(x+3)$ 即 $y-Kx-(4+3K)=0$

由点到直线距离公式知 $\frac{|9-12K-(4+3K)|}{\sqrt{1+K^2}}=5$

$$1+K^2=(1-3K)^2 \qquad K(4K-3)=0 \qquad K=0\text{或}K=\frac{3}{4}$$

方程为 $y=4$ 或 $y-4=\frac{3}{4}(x+3)$ 即$3x-4y+25=0$

f) 到两点(2，2)和(0，-6)的距离相等

解：设方程为 $y-Kx-(4+3K)=0$ 点(2，2)到直线的距离

为 $\frac{|2-2K-(4+3K)|}{\sqrt{1+K^2}}$

点(0，-6)到直线的距离为 $\frac{|-6-(4+3K)|}{\sqrt{1+K^2}}$

知 $|5K+2|=|3K-10|$ $K=4$ 或 $K=-\frac{3}{2}$

得方程 $4x-y+16=0$ 或$3x+2y+1=0$

2.48 直线 l 的斜率为 $-\frac{3}{4}$，并且具有下列各条件，求 l 的方程：

b) 距点(10，2) 4单位

解：设方程为 $y=-\frac{3}{4}(x-x_0)$

即 $3x+4y-3x_0=0$ 则 $\dfrac{|30+8-3x_0|}{5}=4$

$38-3x_0=20$ 或 $38-3x_0=-20$

$x_0=6$ $x_0=\dfrac{58}{3}$

方程为 $3x+4y-18=0$ $3x+4y-58=0$

c) 到两点(2, 7)和(3, -8)的距离相等。

解：设方程为 $3x+4y+c=0$

由距离公式， $|6+28+c|=|9-32+c|$

解之， $c=-\dfrac{11}{2}$ 故方程为 $3x+4y-\dfrac{11}{2}=0$ $6x+8y-11=0$

2.49 直线l经过下列各对直线的交点，并且有其后所给的另一条件，求它的方程。

b) $4x+y-7=0$和$3x-2y=10$，，平行于直线$x-3y=6$

解：$K=\dfrac{1}{3}$， 交点 $\left(\dfrac{24}{11}, \quad -\dfrac{19}{11}\right)$

方程 $y+\dfrac{19}{11}=\dfrac{1}{3}\left(x-\dfrac{24}{11}\right)$ $11x-33y-81=0$

c) $3x+5y-13=0$和$x+y-1=0$，垂直于直线$7x-5y=10$

解： $K=\dfrac{-5}{7}$ 交点，$(-4, 5)$

故方程 $y-5=\dfrac{-5}{7}(x+4)$，$5x+7y-15=0$

2.50 三角形三边的中点在点(1, 2)、(7, 4)和(3, -4)处，求各边的方程。

解：由几何知，二边中点联线平行于第三边，故(1, 2)所在边的方程为：

$K_1=\dfrac{4-(-4)}{7-3}=2$ $y-2=2(x-1)$ $2x-y=0$

点(7, 4)所在边的方程：

$K_2=\dfrac{6}{-2}=-3$ $y-4=-3(x-7)$ $3x+y-25=0$

点(3, -4)所在边的方程：

$K_3=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$ $y+4=\dfrac{1}{3}(x-3)$ $x-3y-15=0$

2.55 求平行于直线$5x+12y-13=0$并与它相距2单位的直线方程。

解：方程为$5x+12y+c=0$，C待定

点 $\left(0, \frac{13}{12}\right)$在直线 $(5x+12y=13=0$ 上，它与所求直线的距离

为2，即

$$\frac{\left|12\times\frac{13}{12}+c\right|}{\sqrt{5^2+12^2}}=2$$

$|13+c|=26$ $c=13$ 或 $c=-39$

$\therefore$ $5x+12y+13=0$ $5x+12y-39=0$ 为所求方程。

2.52 过原点和点M(1, 3)分别作两平行线，如已知这两直线间的距离为$\sqrt{5}$，求它们的方程。

解：设过原点的直线为 $y=Kx$

过M点的直线为 $y-3=K(x-1)$ $y-Kx-(3-K)=0$

则原点到过M的直线的距离为$\sqrt{5}$，即

$\frac{|3-K|}{\sqrt{1+K^2}}=\sqrt{5}$ 解得$K=-2$，或 $K=\frac{1}{2}$

故方程分别为 $x-2y=0$ 和 $x-2y+5=0$

或 $2x+y=0$ 和 $2x+y-5=0$

2.53 求与点C(4, 3)距离为5单位，且在两座标轴上的截距相等的直线的方程。

解：设方程为， $x+y=a$，a待定

则 $\frac{|4+3-a|}{\sqrt{1+1}}=5$ $a=7-5\sqrt{2}$ 或 $a=7+5\sqrt{2}$

$\therefore$ 方程为 $x+y-7+5\sqrt{2}=0$ 或 $x+y-7-5\sqrt{2}=0$

2.54 求过点(1, 2)并与圆$x^2+y^2=5$相切的切线方程。

解：(1, 2)在圆上，切线的斜率为$-\frac{1}{2}$

$\therefore$ 方程为 $y-2=-\frac{1}{2}(x-1)$ $x+2y-5=0$

2.55 求垂直于直线$4x-y=7$，，而其垂足的横标等于1的直线方程。

解： $K=-\frac{1}{4}$

又当$x=1$时，纵标应满足： $4-y=7$ $y=-3$

即垂足为(1, -3) 故方程为 $y+3=-\frac{1}{4}(x-1)$ $x+4y+11=0$

2.56 一光线，在穿透厚一厘米的玻璃片以前，它的方程是$y=x+3$，设横轴位于这玻璃片的表面上，而纵轴垂直于此片，试求在此玻璃片内和出玻璃片后的光线方程，以及光线在玻璃片内的行程。

解：玻璃折射率为1.5， $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=1.5$

设光线在穿过玻璃片前、后的三种直线各以 l_2、l_1、l_3 代表，则

$$l_1: y=x+3 \quad \alpha=\frac{\pi}{4}$$

故 $\sin\beta=\dfrac{\sin\frac{\pi}{4}}{1.5}=\sqrt{\dfrac{2}{3}} \quad \cos\beta=\sqrt{\dfrac{7}{3}} \quad \operatorname{ctg}\beta=\sqrt{\dfrac{7}{2}}$

$$l_2: K_2=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)=\operatorname{ctg}\beta=\sqrt{\frac{7}{2}} \qquad y=\sqrt{\frac{7}{2}}(x+3)$$

l_3：先求(x_0, y_0)：$x_0=-3-\operatorname{tg}\beta=-\left(3+\sqrt{\dfrac{2}{7}}\right)$ $y_0=-1$ $K=1$

故方程 $y+1=x+3+\sqrt{\dfrac{2}{7}} \qquad y=x+2+\sqrt{\dfrac{2}{7}}$

光线在玻璃中的行程为$\dfrac{1}{\cos\beta}=\dfrac{3}{\sqrt{7}}=\dfrac{3\sqrt{7}}{7}$

2.57 设直线$y=mx-7$分两点$M_1(3, 2)$，$M_2(1, 4)$的连线 $\overline{M_1M_2}$ 成两段，其比为 $\dfrac{3}{2}$，求m。

解：M_1M_2的分点座标为 $x_0=\dfrac{3+\frac{3}{2}}{1+\frac{3}{3}}=\dfrac{9}{5} \qquad y_0=\dfrac{2+\frac{3}{2}\times 4}{1+\frac{3}{2}}=\dfrac{16}{5}$

它在直线上，故 $\dfrac{16}{5}=\dfrac{9}{5}m-7 \qquad m=\dfrac{17}{3}$

2.58 过点P(0, 1)作直线，使它括在二已知直线$x-3y+10=0$及$2x+y-8=0$间的线段平分于点P。

解：设直线方程为 $y-1=Kx$

它与$x-3y+10=0$的交点P_1为 $\begin{cases} x=\dfrac{-7}{1-3K} \\ y=\dfrac{1-10K}{1-3K} \end{cases}$

它与$2x+y-8=0$的交点P_2为 $\begin{cases} x=\dfrac{7}{2+K} \\ y=\dfrac{2+8K}{2+K} \end{cases}$

由题意 $PP_1=P_2P$

即得 $\left(\dfrac{-7}{1-3K}\right)^2+\left(\dfrac{1-10K}{1-3K}-1\right)^2=\left(\dfrac{7}{2+K}\right)^2+\left(\dfrac{2+8K}{2+K}-1\right)^2$

解之 $K=-\dfrac{1}{4}$

$\therefore \quad y-1=-\frac{1}{4}x \quad$ 即 $\quad x+4y-4=0$ 为其方程

2.59 求直线方程，已知它包含在第一象限的座标轴间的线段的长为它与原点的距离的两倍，而且所求直线与轴构成的三角形的面积等于 4.5 平方单位。

解：设直线的截距为 a，b，则方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

$$\text{则} \quad \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2}}=\sqrt{a^2+b^2} \\ \dfrac{1}{2}ab=4.5 \end{cases}$$

解得 $\quad a=3 \quad b=3$

故方程为 $\quad \frac{x}{3}+\frac{y}{3}=1 \quad$ 即 $\quad x+y-3=0$

2.60 光线通过点(2，3)，在直线 $x+y+1=0$ 上反射，反射线通过点(1，1)，求光线入射线和反射线的方程。

解： $l_2 \perp l_1 \quad \therefore \quad tg\alpha=K_2=+1 \quad \alpha=\frac{\pi}{4}$

$$K_3=tg(\alpha+\beta)=\frac{1+tg\beta}{1-tg\beta} \qquad K_4=tg(\alpha-\beta)=\frac{1-tg\beta}{1+tg\beta}$$

$$\therefore K_3 \cdot K_4=1$$

设光线入射点为$(x_0,\ y_0)$，则 $K_3=\frac{y_0-3}{x_0-2}$，$K_4=\frac{y_0-1}{x_0-1}$

$$\text{故由} \quad \begin{cases} x_0+y_0+1=0 \\ \dfrac{y_0-3}{x_0-2}\cdot\dfrac{y_0-1}{x_0-1}=1 \end{cases} \qquad \text{解出} \quad \begin{aligned} x_0&=-\frac{2}{3} \\ y_0&=-\frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad K_3=\frac{5}{4}, \quad K_4=\frac{4}{5}$$

入射线方程为 $\quad y-3=\frac{5}{4}(x-2) \quad 5x-4y+2=0$

反射线方程为 $\quad y-1=\frac{4}{5}(x-1) \quad 4x-5y+1=0$

2.61 一动点与原点的距离常等于这点与原点联线的斜率，求其轨迹方程。

解：依题意　　$\sqrt{x^2+y^2}=\frac{y}{x}$　　即　　$y=x\sqrt{x^2+y^2}$

$$x^2(x^2+y^2)=y^2$$

2.62　P为一动点，但知它到互相垂直的两直线的距离之和是一常数，求它的轨迹。

解：选 x、y 轴分别为此二直线，则轨迹是一个正方形的周界

$$|x|+|y|=C$$

即　　$x\pm y=C$，$x\pm y=-C$

为正方形四边的方程，边长$\sqrt{2}\,C$

2.63　P为一动点，它和两定点$(a,0)$和$(-a,0)$的联线总是互相垂直的，求P点的轨迹。

解：　设P的座标，(x,y)，$\frac{-y}{x-a}=-\frac{1}{\frac{y}{x+a}}$　即　$x^2+y^2=a^2$

为以原点为中心，a 为半径的圆。

2.46　设有一直线，它平行于两平行直线$3x+4y=10$ 和 $3x+4y=35$，并且分这两平行直线间的距离成2：3，求它的方程

解：　由几何知直线也把$\overline{P_1P_2}$分为比值为 2：3 的两段

$P_1\left(0,\frac{5}{2}\right)$，$P_2\left(0,\frac{35}{4}\right)$　由公式，$P(x,y)$为：

$$y=\frac{\frac{5}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{35}{4}}{1+\frac{2}{3}}=5\qquad x=0$$

故方程为　　$y-5=-\frac{3}{4}x$　　$3x+4y-20=0$

若P把P_1P_2分为比值为 3：2 的两段，则同样推及方程

$$3x+4y-25=0$$

2.65　求这样的点，它与点$M_1(4,-3)$及$M_2(2,-1)$的距离相等，且离直线$4x+3y-2=0$的距离为 2 单位。

解：设此动点座标为(x,y)

$$\begin{cases}(x-4)^2+(y+3)^2=(x-2)^2+(y+1)^2\\ \frac{4x+3y-2}{\sqrt{3^2+4^2}}=\pm 2\end{cases}$$

解出$(1,-4)$ 和 $\left(\frac{27}{7},-\frac{8}{7}\right)$

2.66　三角形两高线的方程是$2x-3y+1=0$，$x+y=0$点$M(1,2)$是它的一个顶点，求各边的方程。

解：M不在二高线上，故以M为顶点的二边的方程的斜率为

$$K_1=-\frac{3}{2}\quad ,K_2=1$$

$$(l_1)\ y-2=-\frac{3}{2}(x-1)\ ,\ (l_2)\ y-2=x-1$$

即　$3x+2y-7=0$，即$x-y+1=0$

求B，C点座标（(△MBC的二顶点)：$\begin{cases}x-y+1=0\\ 2y-3y+1=0\end{cases}$

解之 B(-2,-1)　$\begin{cases}3x+2y-7=0\\ x+y=0\end{cases}$

解之　C(+7,-7)　BC的方程　$K=\frac{6}{-9}=-\frac{2}{3}$

$$y+1=-\frac{2}{3}(x+2)\quad 2x+3y+7=0$$

2.67　已知三角形的两个顶点 A(-10，2)和B(6，4)，它的垂心座标为，N(5，2)，试求第三顶点C的座标。

解：设C的座标为(x，y)AN的方程为$y=2$，而AN为BC的垂线，故BC的方程为$x=6$

又AB的斜率为$\frac{1}{8}$，CN⊥AB，故CN的方程为：$K=-8$

$y-2=-8(x-5)$　　$8x+y-42=0$

与$x=6$　联立解出得　C(6,-6)

2.68　设一直线经过点(-1，1)，它被二平行直线 $x+2y-1=0$，$x+2y-3=0$ 所截线段的中点在直线 $x-y-1=0$ 上，求其方程。

解：由几何知，P也是直线$x-y-1=0$在二平行直线间线段的中点，

D点座标 $\begin{cases}x-y-1=0\\ x+2y-3=0\end{cases}$　　解出得 $D\left(\frac{5}{3},\ \frac{2}{3}\right)$

C点座标 $\begin{cases}x-y-1=0\\ x+2y-1=0\end{cases}$　　解之　C(1，0)

P为CD之中点，座标 $\left(\frac{4}{3},\ \frac{1}{3}\right)$　　故直线l的方程为

$$K=-\frac{2}{7}\qquad y-1=-\frac{2}{7}(x+1)\qquad 2x+7y-5=0$$

2.69　已知一直线被二平行直线$3x+4y-7=0$，$3x+4y+8=0$所截线段的长为$3\sqrt{2}$单位，并过点(2，3)，求其方程。

解：设方程为　　$y-3=K(x-2)$

它与二平行直线的交点为A和B，

A：$\begin{cases} y-Kx=3-2K \\ 3x+4y=7 \end{cases}$　　解之　$\begin{cases} x=\dfrac{8K-5}{3+4K} \\ y=\dfrac{K+9}{3+4K} \end{cases}$

B：$\begin{cases} y-Kx=3-2K \\ 3x+4y=-8 \end{cases}$　　解之得　$\begin{cases} x=\dfrac{8K-20}{3+4K} \\ y=\dfrac{9-14K}{3+4K} \end{cases}$

则　$|AB|=3\sqrt{2}$

由距离公式，可解出 $K=-\dfrac{1}{7}$　或　$K=-7$

方程为　　$y-3=-\dfrac{1}{7}(x-2)$　　或　$y-3=-7(x-2)$

$7x+y-17=0$

$x-7y+19=0$

2.70　直线 $2x+y-1=0$ 是三角形的一条内分角线，而点 $(1,2)$ 和点 $(-1,-1)$ 是三角形的两个顶点，求第三个顶点。

解：设第三个顶点为 $C(x_0,y_0)$，令 $A(-1,-1)$，$B(1,2)$

则　AC的斜率为 $\dfrac{y_0+1}{x_0+1}$

BC的斜率为 $\dfrac{y_0-2}{x_0-1}$　而分角线的斜率为 -2

由夹角公式可得

$$\frac{\dfrac{y_0+1}{x_0+1}-(-2)}{1+(-2)\cdot\dfrac{y_0+1}{x_0+1}}=\frac{-2-\dfrac{y_0-2}{x_0-1}}{1+(-2)\cdot\dfrac{y_0-2}{x_0-1}}\qquad \text{又}\qquad 2y_0+y_0-1=0$$

解方程组得　$\begin{cases} x_0=-\dfrac{13}{5} \\ x_0=\dfrac{31}{5} \end{cases}$　　故　$C\left(-\dfrac{13}{5},\dfrac{31}{5}\right)$

2.71　等腰三角形底边的方程是 $x+y-1=0$，一腰的方程是 $x-2y-2=0$，点 $(-2,0)$ 在另一腰上，求此腰的方程

解：AC斜率 $K_1=-1$　　BC斜率 $K_2=\frac{1}{2}$　　AB斜率 $K_3=\dfrac{y_0}{x_0+2}$

由夹角公式 $\dfrac{\dfrac{1}{2}+1}{1-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{-1-\dfrac{y_0}{x_0+2}}{1-\dfrac{y_0}{x_0+2}}$ 解之 $\begin{cases} x_0=-1 \\ y_0=2 \end{cases}$

得 AB的方程为 $y=K_3(x+2)$ $K_3=2$ 得 $2x-y+4=0$

2.72 设a、b、K、P分别为同一直线的截距，斜率及原点到直线的距离，证明下面的关系：

a) $b=-Ka$ b) $a^2K^2=P^2(1+K^2)$ c) $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{P^2}$

证：a) $y-b=K(x-0)$为直线方程

对点B(a，0)得 $O-b=K(a-O)$即 $b=-Ka$

b) $y-Kx-b=0$

得 $P=\dfrac{|b|}{\sqrt{1+K^2}}$ 即 $P^2(1+K^2)=b^2$

由 a) 知 $P^2(1+K^2)=K^2a^2$

C) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$为直线方程

$P=\dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}}}$ 即 $\dfrac{1}{P^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}$

第三章 二 次 曲 线

圆

3.1 求下列各圆的圆心和半径，并将它们画出来：

a) $x^2+y^2-8x+4y=5$

解 a) 原方程经配方后化为：$(x-4)^2+(y+2)^2=25$

故圆心为(4，-2)，半径为5；

3.2 分别写出下列各圆的方程：

b) 圆心位于(2，-3)，且通过点(5，1)；

d) ，圆心位于点(3，4)，而切于直线 $8y=15-6x$；（提示：圆的半径等于从圆心到切线的距离）

e) 经过(0，0)，(10，0)，(6，8)三点；

f) 经过点(8，3)，而和直线$x=6$及$x=10$相切；

解：b)因为圆通过点(5，1)，且以(2，-3)为圆心，故求得圆半径平方：$R^2=(5-2)^2+(1+3)^2=25$ 所求圆方程：

$(x-2)^2+(y+3)^2=25$

d) 直线方程可写成 l: $6x+8y-15=0$