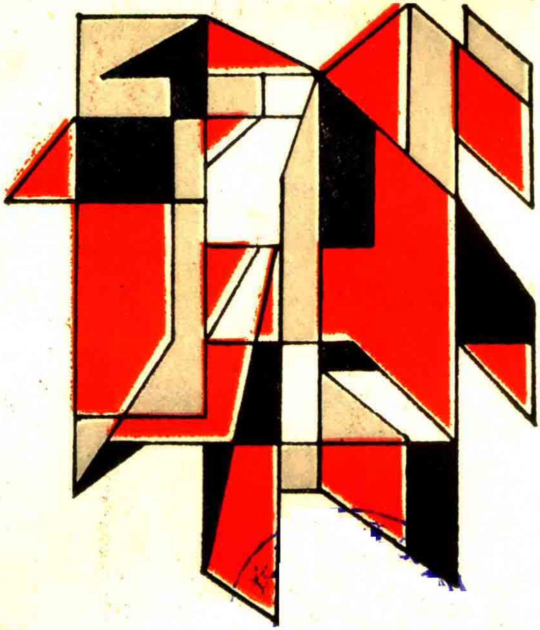
2

51



数学奥林匹克辅导丛书

从特殊性看问题

苏淳

中国科学技术大学出版社

《数学奥林匹克辅导丛书》之二

从特殊性　问题

苏　淳

中国科学技术大学出版社

1988・合肥

内 容 简 介

从特殊性看问题，是学习和研究数学时的一种重要的思想方法，培养和提高使用这种思想方法的自觉性，对提高青年学生的科学素养具有重要作用。本书通过大量生动有趣的例题，其中包括许多数学竞赛试题，从多个方面介绍了这种思想方法在初等数学中的应用。这是一本较好的中学数学课外读物，尤其适合作为培训数学竞赛选手的基本教材及数学爱好者小组的讲座材料，可供具有高中文化程度的数学爱好者、学生、中学数学教师及其他数学工作者阅读。

《数学奥林匹克辅导丛书》之二

从 特 殊 性 看 问 题

苏 淳

责任编辑 树 希 封面设计 罗 洪

*

中国科学技术大学出版社出版

(安徽省合肥市金寨路96号)

中国科学技术大学印刷厂印刷

安徽省新华书店发行

*

开本 787×1092/32 印张 3.375 字数 73千

1988年2月第1版 1989年2月第2次印刷

印数 20001-5000册

ISBN 7-312-00045-2/O·18 定价 1.00元

序

目前，有关中学生复习资料、课外辅导读物已经出版得很多了，甚至使一些中学生感到不堪负担，所以再要出版这类读物一定要注重质量，否则“天下文章一大抄”，又无创新之见，未免有误人子弟之嫌。写这类读物如何才能确保质量呢？我想华罗庚老师的两句名言：“居高才能临下，深入才能浅出”，应该成为写这类读物的指导思想，他本人生前所写的一系列科普读物，包括为中学生写的一些书，也可堪称是这方面的范本。

中国科学技术大学数学系的老师们，在从事繁重的教学和科研工作的同时，一向对中学数学的活动十分关注，无论对数学竞赛，还是为中学生及中学教师开设讲座，出版中学读物都十分热心，这也许是受华罗庚老师的耳濡目染的缘故，所以至今这仍然是中国科学技术大学数学系的一个传统和特色。

最近，他们编写了《数学奥林匹克辅导丛书》，我看了几本原稿，感到他们是按照华罗庚老师的教诲认真写作的，所以乐为之序。

龚　昇

1988年6月28日

于中国科学技术大学

前　　言

这是一本以介绍数学解题思想方法为目的的书。

如果说问题是数学的心脏，那么解题的思想方法就应当说是数学的灵魂。思想方法，不是指解答某道题的具体方法，也不是指数学归纳法之类的技术性方法，而是指如何看待数学世界，如何考察数学问题的带有指导性的普遍思想方法。例如大家所迫切关心的“拿到一道数学题后，该如何下手？”之类的问题，就属于需要思想方法指导的普遍性问题。

当代著名美国数学家波利亚（G. Polya）说过：“我们应该讨论一般化、特殊化和类比这些过程本身，它们是获得发现的伟大源泉。”本书的目的，就在于试图对“特殊化”这一认识数学世界的重要思想方法，结合大量初等数学，尤其是各类数学竞赛试题中的例子，作一番较为细致的剖析。

从特殊性看问题的思想方法，归结起来，可以大致分为从简单情形看问题和从特殊对象看问题这样两个方面。本书将分别从不同的角度介绍这两个方面的内容。

本书内容安排上，基本保持了各节之间的相对独立性，对于书中个别带*号的例题，读者如果一时读不懂，也可先撇开不看，而不会影响后面内容的阅读。

作者关于写作这样一本书的设想，可以说是由来已久。这些年来，国内数学课外活动有了较大发展，配合一年一度的全国数学竞赛，各地纷纷举办数学讲座，开办数学夏令

营、冬令营，甚至创办数学奥林匹克业余学校．自1986年始，我国的数学奥林匹克事业，也已正式走向世界，并一举取得引人注目的好成绩．在这种形势之下，如何提高数学课外活动的科学性、系统性便成了日益尖锐的、迫切需要解决的问题．作者写这本书的一个重要目的，便是试图根据作者本人最近几年来，为全国各地中学数学教师和高中学生举办数学讲座的经验，总结出一本可为听者接受的、以讲述解题思想方法为主要内容的讲座材料．因此作者在取材上，坚持以初等数学问题作为例题，并尽量结合数学竞赛的内容需求和最新动态；在写作方法上，则坚持以例题作为线索，注意循序渐进，注意对解题经验的总结；在章节设置上，则既注意了整体上的系统性，又保持了各章节间的相对独立性．但是由于作者的能力和水平有限，错误和疏漏在所难免，还望读者批评指正．

作者应当感谢常庚哲教授的指导与帮助，他不仅向作者提供了许多资料，还向作者提供了许多写作方面的指导性意见．作者还应当向盛立人教授、严镇军和单墫副教授致谢，写作中曾不同程度地参阅了他们的著作和举办数学讲座时的讲稿，本书第七节则主要取材于单墫副教授为安徽省徽州地区数学夏令营讲课时的讲稿．最后，作者还要感谢孙立广同志，感谢我的妻子万希仁同志，是他们为我提供了寒假期间安静写作的地点和条件．

苏　　淳

1987年1月28日

于中国科学技术大学

目　　次

1 以简单情形为起点

当一个问题看不清楚时，人们就会想到先把问题简化一下。我们经常会看到这样的情形：当某个人叙述一件事情时过于啰嗦，听者就会要求他把事情尽可能讲得简单一些。我们也经常听到人们在谈论问题时说："让我们退一步来看看"。简化叙述和退一步看问题，都是为了简化问题，而简化了问题，也就有利于看清问题，这可以说是一个人所共知的伟大而朴素的真理。

生活中如此，数学的学习和研究中又何尝不是如此？许多著名的数学家都指出过：学习数学，也要学会思想方法，而首先就是要学会退一步来看问题。华罗庚教授不止一次地指出："善于'退'，足够地'退'，'退'到最原始而不失去重要性的地方，是学好数学的一个诀巧！"一语道出了退一步看问题对数学学习的重要意义。

的确，简单情形象是一把钥匙、一面镜子，可以为我们看清问题助一臂之力；为探索解题途径提供线索和积累经验；并成为解决问题的突破口。事实上，一切素有建树的人物，都是擅于简化问题、擅于以简单情形作为考察问题的起点的。马克思就是从对商品这样一种为人们所熟视无睹的简单事物的考察中发现了剩余价值规律，从而揭示出资本积累中的奥秘，入木三分地道破资本主义终将灭亡。数学上的许多伟大发现也同样如此。

当代著名美国数学家波利亚把一般化、特殊化和类比并

列地称作“获得发现的伟大源泉”。他还专门写了一本《数学与猜想》的书来论述这种思想(该书已于1984年由科学出版社出版了中译本)。波利亚在这本当代数学名著中列举了许多生动的事例，说明数学界的先辈们如何从对简单、特殊事物的考察中发现普遍的规律，导致了伟大的发现的。波利亚在书中这样说：

如果我们要考察一个关于凸多边形的命题，那么就可以先从正多边形看起，特别地，还可以从正三角形看起。

如果我们要检验某个关于素数的命题，那么就可以先从一些具体的素数，例如先从17看起。

如果我们讨论的是一列与一切正整数 n 有关的命题，那么最好还是先来看一看 $n=2$ 和 3 的情形。

……

牢记这些先辈们从自己的实践中总结出的宝贵经验，会给你学习和研究数学带来无尽的好处！

下面先从一个大家都熟悉的简单的例子讲起。

例 1 证明：对任意多个给定的正方形，都可以把它们剪成适当的形状后拚成一个大的正方形。

这是几何图形拚接问题中的一个典型问题，它曾经作为数学竞赛试题考过中学生。其实几何拚接问题并不限于正方形拚接正方形，后面我们还要讲到一些其它类型的几何图形拚接问题。现在讨论这个命题的证明。

将所给出的正方形数目记作 n，你便会自然地想到可对 n 施用数学归纳法。我们曾发现有的考生这样来运用归纳法：

当 $n=1$ 时命题显然成立。假设当 $n=k$ 时命题成立，于是当 $n=k+1$ 时，只要先将其中 k 个正方形剪成适当形状后

拚为一个较大的正方形，再将所得的正方形同剩下的一个剪拚成一个更大的正方形，即知命题也可成立。于是由数学归纳法原理知命题获证。

但这只是一种貌似正确的证明！明眼人一看，便会发现它的似是而非之所在。要指出它的漏洞并不是什么困难的事情，我们只要对 $n=2$ 来考查这个“证明”就可以了。因为从证明过程看，它是一种构造性的证明办法，如果它要是正确的话，那么在 $n=2$ 的场合下也应当是正确的。但这个“证明”却恰恰未能保证这一点。

由此看来，考察简单情形的意义除了前面已经提到的启迪智慧、发现规律之外，还应加上一条，就是可以帮助我们检验自己的证明。这同样是考察简单情形的重要目的之一。非但如此，考察简单情形还可以帮助我们核实猜测，或是从几种猜测之中帮助选择一种。核实猜测，是数学研究中的必要环节，非常重要。而选择答案，则是学生们解答选择题时经常遇到的问题。对于这些我们不打算细究，下面还是继续刚才的讨论。

如何来补救上述证明的不足呢？办法是有的，这就是在“假设 $n=k$ 命题成立”之前补上如下的一段话：

当 $n=2$ 时，可以先将所给出的两个正方形（设其边长分别是 a 和 b）按图 1（a）的方式靠拢，并沿虚线剪开，再按图 1（b）的方式将碎片拚成一个大正方形。

在作了这样的补充过后，证明就完整了。事实上，不论 n 代表怎样的一个正整数，都可以由答案中找到拚接的具体办法。例如对 $n=3$，就可以先将其中两个拚为一个，再将拚出的正方形同剩下的一个拚为一个更大的正方形即可，对其余情形均可照此类推。

前面已经讲过，以简单情形作为考察问题的起点的目的之一，便是为了向简单情形寻求启示，再以所获得的启示作为钥匙，打开问题的答案之门。当我们所遇到的问题较为复

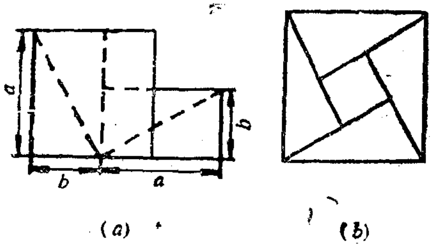


图 1

杂，而一时无从下手时，就可以采用这种办法：先考虑一些较为简单的、易于下手的情形，通过它们摸索出一些经验，或是对答案作出一些估计，然后再设法解决问题本身。下面将通过一系列的例题来说明简单情形的启发作用，这些例题中有许多是各国中学生数学竞赛试题。

例 2 （1985 年奥地利和波兰联合数学竞赛试题）

证明：任何面积等于 1 的凸四边形的周长及两条对角线的长度之和不小于 $4+\sqrt{8}$。

尽管这是一道普通类型的题目，而且容易使人想到需要使用算术—几何平均不等式，但是却有一个令人感觉棘手之处，就是难以将周长和对角线之长放在一起考虑。我们知道，这两者之间虽然可通过余弦定理建立联系，但却为使用平均不等式带来不便。因此，一个自然地闪入脑际的想法便是“能否将两者分开考虑、各算各的账？”而要分开，当然就有一个能否分和怎样分的问题。为了做到心中有数，还是

先来考察一下面积为1的正方形和菱形吧(图2)！

在正方形中，刚好有：周长＝4；对角线之和$=2\sqrt{2}=\sqrt{8}$.

在菱形中：如果记两条对角线的长度分别为l_1和l_2，则因有$S=\frac{1}{2}l_1l_2=1$（其中S表示面积），故知：

$$l_1+l_2\geqslant 2\sqrt{l_1l_2}=2\sqrt{2}=\sqrt{8};$$

$$\text{周长}=4\sqrt{\left(\frac{1}{2}l_1\right)^2+\left(\frac{1}{2}l_2\right)^2}=2\sqrt{l_1^2+l_2^2}\geqslant 2\sqrt{2l_1l_2}=4.$$

既然这两种最简单的凸四边形都表明了可将周长和对角线分开考虑，可以相信，分开考虑的想法确实是有一定的道理的，何况这些简单情形还启示了如何分开的具体方式。那么我们就按照这种分开考虑的方式来试一试吧！

设$ABCD$是任意一个面积是1的凸四边形，按图3的

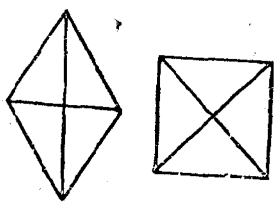


图 2

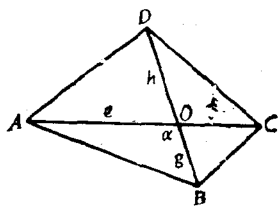


图 3

方式将有关线段、角和点标上字母，于是就有

$$1=S_{ABCD}=\frac{1}{2}(eg+gf+fh+he)\sin\alpha\leqslant\frac{1}{2}(e+f)(g+h)$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{e+f+g+h}{2}\right)^2,$$

即有对角线长度之和$=e+f+g+h\geqslant 2\sqrt{2}=\sqrt{8}$；再按图4的方式重新将图形中的有关线段和角标上字母，于是就又有

$$2=2S_{ABCD}=\frac{ab}{2}\sin\beta_1+\frac{bc}{2}\sin\beta_2+\frac{cd}{2}\sin\beta_3+\frac{da}{2}\sin\beta_4$$

$$\leqslant\frac{1}{2}(ab+bc+cd+da)=\frac{1}{2}(a+c)(b+d)$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{a+c+b+d}{2}\right)^2,$$

从而又知 周长$=a+b+c+d\geqslant 4$。

综合上述两个方面，即知周长与两条对角线长度之和不小于$4+\sqrt{8}$，完全达到了预想的目的。

这样一来，我们就可以正式在卷面上为这道试题作解答了。当然，解答中是不用写出前面一段探索过程的。

例2不过是初等数学中的一种常见的题型，解答并不复杂，由它已能够品味到向简单情形寻求启示的好处，那么这种启示对于解决复杂问题的作用，则是可想而知了。

例 3（第二届全国中学生数学冬令营竞赛试题）

如图5，把边长为1的正三角形ABC的各边都n等分，过各分点作平行于其它两边的直线，将这个三角形等分成小

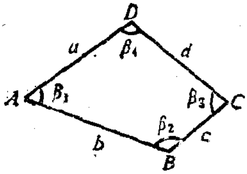


图 4

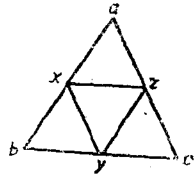


图 5

三角形．各小三角形的顶点都称为结点，在每一结点上放置了一个实数．已知

（1）A,B,C 三点上放置的数分别是 a,b,c；

（2）在每个由有公共边的两个最小三角形组成的菱形之中，两组相对顶点上放置的数之和相等．

试求：1）放置最大数的点与放置最小数的点之间的最短距离 r；

2）所有结点上的数的总和 S．

这个题目的文字叙述很长，为了能正确理解题意，可以多看上几遍．题意弄明白后，一般会自然地想到先从$n=2$的情形看起．这种想法是可取的，因为它有利于看清问题．事实上很多营员正是这么做的．

当 $n=2$ 时，$\triangle ABC$ 的各边上都只有中点这样一个分点，如图5所示，我们依次记 AB，BC，CA 的中点上放置的数为 x,y,z．于是就可由题意得到 $x+y=b+z$，$y+z=c+x$，将这两个式子相加，并消去等式两端相同的项，就有 $2y=b+c$，也就是

$$y=\frac{b+c}{2}.$$

根据同样的道理，也可以知道

$$x=\frac{a+b}{2},\qquad z=\frac{c+a}{2}.$$

这就说明 x,y,z 全都界于 a,b,c 中的最大数和最小数之间，所以图形中所放的6个数中的最大数和最小数也就是 a,b,c 中的最大数和最小数．因此知，如果 a,b,c 互不相等，则有 $r=1$；如果 $b=c$，而 a 与它们不等时，则有 $r=\frac{\sqrt{3}}{2}$，其它

有两者相等，一者与它们不等的情形与此类似；而最后，如果$a=b=c$，则有$r=0$。并且不难算出（将S记作S_2）有

$$S_2=2(a+b+c).$$

对于$n=2$情形的考察到此即已告终，剩下的问题是如何进一步解答一般场合下的问题，特别是如何求出S_n？于是有些营员继续对$n=3,4,5,\cdots$作考察，试图由$S_2,S_3,S_4,S_5,\cdots$之中发现规律，求得关于S_n的表达式后再用归纳法证明。这固然不失为一种办法，但却未必很佳。考察简单情形并不是考察得越多越好，更重要的是注意从中寻求启示。

如果我们注意到，刚才对x,y,z,b,c所作的推导，对任何如图6排列的3个最小三角形顶点处的5个数α,β,t,u,v，也都可以进行的话，那么就可以预见不必再对$n=3,4,5$之类作过多的考察了。事实上，只要经过完全类似的推导便可知道$2u=t+v$，也就是说，图形中任何一条直线上的数，都依次构成了等差数列。从而立刻知道，不论n为何值，图形中的最大数和最小数也都是a,b,c中的最大数和最小数，

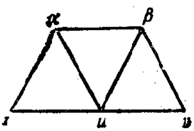


图 6

也就是说，只要a，b，c互不相等，就有$r=1$；如果$a=b=c$，就有$r=0$；而当a，b，c中有两个相等，另一个不等时，则$\triangle ABC$的一条边上所有各数相等，因此当n为偶数时，r就是该边中点到相对顶点的距离值，而当n为奇数时，r是该边上最靠近中点的分点到相对顶点的距离值，这些值都不难通过简单计算来求出。所以剩下的问题仅在于求出S_n。但由于我们已经对数的排列规律了解清楚，所以求出S_n也就已经没有原则性的困难了。不过如果我们只是停留在这种认识水平上，那么就还需

要求出这些等差数列的和，因而需要面对较大的计算量，并需考虑各种细节。

能不能有更好的解决办法？当然有，这就要看我们能不能坚持由简单情形考虑起，并从中寻求启示了。我们可以设想：如果 $a=b=c$，那么显然只要求出图形中的结点数目，就可以求出 S_n，因为这时图形中放置的数全都相等。而结点的数目是容易求的。由图 7 立即看出它们共有 $1+2+\cdots+(n+1)=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ 个，所以知道此时有 $S_n=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)a$，或者写成

$$S_n=\frac{1}{6}(a+b+c)(n+1)(n+2).$$

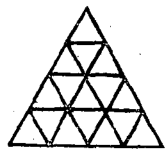


图 7

上述情形处理中的简洁明瞭的特点是十分诱人的，它使我们想到："能否将 a,b,c 不全相等的情形化归上述简单情形？"不要以为这只是一种不可能实现的天方夜谭，问题是要找到办法把它化为现实。

我们来观察图 8 中的 3 个正三角形，它们都是同一个三

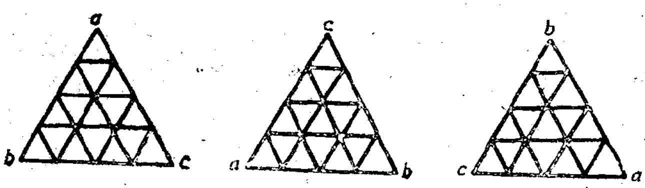


图 8

角形，不过放置的角度有所不同。它们中的数字之和当然都是 S_n。如果设想将这 3 个三角形迭置起来，迭置时不改变它们原来的放置角度，然后将这 3 个三角形每一相迭结点上

的 3 个数都加起来，显而易见，其和都是 $a+b+c$，于是我们就得到了一个与简单情形完全类似的三角形。利用前面的计算结果就立即可以知道，该三角形中所有数字之和为 $3S_n=\frac{1}{2}(a+b+c)(n+1)(n+2)$，这样我们也就求得了

$$S_n=\frac{1}{6}(a+b+c)(n+1)(n+2).$$

于是，我们完成了例 3 的全部解答。

回顾例 3 的解答过程，我们有许多体会可谈，概括起来，最主要的有以下 3 点：

1）考察简单情形的一个重要目的是为了寻求启示，而要觅得启示，就要对考察过程多作分析。

2）何谓简单情形？本没有一个明确的含义，大凡易于入手，而又对解决问题有益的情形都可算入其列。因此在考察中就又有一个如何选择的问题。拿例 3 来说，我们先后考察过两种不同意义上的简单情形，一种是 $n=2$ 的情形，还有一种就是 $a=b=c$ 的情形。两种情形各有各的用处，在解答中都不可缺少。在其它问题中该作何种选择，当以解题的需要为准则。

3）将一般情形化归简单情形，是以简单情形为钥匙解决问题的一种重要形式，要用好这把钥匙，就要在转化上狠下功夫，而这往往需要有一番精巧的构思，例如将 3 个三角形迭置等等。

在数学竞赛中常有一些以"开放型问题"（Open problems）形式出现的试题，要求应试者自行寻求答案。我们知道，学习数学，主要是学习解决由他人提出并已有了答案的问题；而独立从事数学研究的阶段，则是试图解决自己提