全国成人高考——专升本

高等数学(二)

考点归纳练习及历年试题分类解析

第二版

姚唐生　主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

全国成人高考—专升本

高等数学（二）
考点归纳练习及历年试题分类解析

（第二版）

主　编　姚唐生
编　者　薛世明　曹善海
　　　　任现淼　张衍平

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容介绍

本书包含了1994年至2003年成人高考专升本的全部考题，按照成人高考考试内容的要求，重新对其进行分类编排，并逐题作了详细解答。书后还为初等数学基础薄弱的考生编写了一份补课要点，以此弥补、减轻考生复习高等数学的困难。全书编排新颖，便于记忆。本书适用于成人高考专升本考生复习冲刺使用，也可供成人高考专升本辅导班的教师参考使用。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学(二)考点归纳练习及历年试题分类解析(第二版)/ 姚唐生主编. —2版. —北京：北京理工大学出版社，2004.1

全国成人高考用书．专升本

ISBN 7-5640-0175-5

Ⅰ．高…　Ⅱ．姚…　Ⅲ．高等数学-成人教育：高等教育-升学参考资料　Ⅳ．O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第077199号

出版发行/ 北京理工大学出版社
社　　址/ 北京市海淀区中关村南大街5号
邮　　编/ 100081
电　　话/（010）68914775（办公室）　68912824（发行部）
网　　址/ http:// www.bitpress.com.cn
电子邮箱/ chiefedit@bitpress.com.cn
经　　销/ 全国各地新华书店
印　　刷/ 北京地质印刷厂
开　　本/ 787毫米×1092毫米　1/16
印　　张/ 10.25
字　　数/ 240千字
版　　次/ 2004年1月第2版　2004年1月第2次印刷
印　　数/ 4201～9200册　　责任校对/ 郑兴玉
定　　价/ 15.00元　　责任印制/ 刘京凤

前　言

本书为成人高考辅导班的一线教师根据成人高考生的特点及多年教学经验，以最新成人高考大纲为依据，特别是针对成人高考学生在复习当中经常遇到的难点和模糊问题，在对历年考题的整理、归纳、总结的基础上编写而成。书中第一部分是将 1994 年至 2003 年全国成人高考专升本高等数学（二）试卷中的试题，按成人高考数学考试大纲的考试内容和考试要求，按考试复习辅导书的四章的知识块，进行了精练、简便地分类归纳。每个知识点都有复习要点和相应的试题，还附有高等数学（一）的相应试题，使学生能够迅速扫描成人高考的知识点和考点，以及考查的内容和命题方式，将知识点和考点结合成一个整体的知识体系。第二部分是将每份试卷由按题型（选择题、填空题、解答题）的编排顺序，改为按四章的内容顺序重新编排，并且逐题（无论是选择题还是填空题以及解答题等）作了详细的解答分析。

如此编排，可使考生从横向和纵向两个角度，完整、系统、准确地了解历年数学考试的题型、题量、试题涉及的知识点和难易程度，对应考什么，怎么考的，一目了然。极大地方便了考生在复习过程中进行针对性地练习，节省了自己整理归纳的时间，提高了复习效率。帮助考生在极短的时间内，夯实基础知识，掌握考试要领，提高应试能力。

本书还为初等数学薄弱的考生编写了一份补课要点，以此弥补、减轻考生复习高等数学时的困难。

本书适用于成人高考专升本考生复习冲刺使用，也可供成人高考专升本辅导班的教师参考使用。

作　者

2003 年 12 月

目　　录

第一部分　考点归纳

第二部分　历年试题分类及解析

附　近三年考试试卷

附　初等数学补课要点

第一部分　考点归纳

第一章　一元函数、极限和连续

（约占 20%，合 30 分）

一、一元函数

（一）理解函数的概念，会求函数的定义域

定义： 设 x,y 为某变化过程中的两个变量，若 x 在允许范围内每取一个值，y 在规则 f 下总有惟一值与之对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y=f(x)$.

且称 x 为自变量，其取值范围为定义域，记作 D.

y 为因变量，其取值范围为值域，记作 Z.

分类
- 初等函数
  - (1)基本函数
    - ①常量函数　$y=C$
    - ②　幂函数　$y=x^{a}$
    - ③指数函数　$y=a^{x}$
    - ④对数函数　$y=\log_{a}x$
    - ⑤三角函数　$y=\sin x,\cos x,\cdots$
    - ⑥反三角函数　$y=\arcsin x,\arccos x,\cdots$
  - (2)简单函数
  - (3)复合函数
- 分段函数
- 隐函数

思路： 1. 分式函数的分母部分不能为零(即大于或小于零)

2. 二次根式函数的被开方部分不能为负(即大于或等于零)

3. 对数函数的真数部分不能小于或等于零(即大于零)

4. 由 $f(x)$ 的定义域 $[a,b]$，确定 $f[\varphi(x)]$ 的定义域，解 $a\leqslant\varphi(x)\leqslant b$ 即可

【分类练习】

确定二次根式函数的定义域

1．(1997 年，选择 3 分)　函数 $y=\sqrt{x^{2}-5x+4}$ 的定义域为(　　).

A. $(-\infty,1]$　　B. $(-\infty,1]\cup[4,+\infty)$

C. $[4,+\infty)$　　D. $(-\infty,1)\cup(4,+\infty)$

确定对数函数的定义域

1．(1994 年，选择 3 分)　函数 $y=\sqrt{5-x}+\lg(x-1)$ 的定义域为(　　).

A. $(0,5]$　　　B. $(1,5]$

C. $(1,5)$　　　D. $(1,+\infty)$

2．(2000 年，选择 4 分)　函数 $y=\dfrac{\ln(x+1)}{\sqrt{x-1}}$ 的定义域为(　　).

A. $(-1,+\infty)$　　　B. $[-1,+\infty)$

C. $(1,+\infty)$　　　D. $[1,+\infty)$

附：高数(一)的试题

3．(1997 年，选择 3 分)　函数 $y=\dfrac{\ln(2+x)}{x}$ 的定义域为(　　).

A. $x\neq-2$ 且 $x\neq0$　　　B. $x>0$

C. $x>-2$　　　D. $x>-2$ 且 $x\neq0$

由 $f(x)$ 的定义域，确定 $f[\varphi(x)]$ 的定义域

1．(1999 年，选择 4 分)　设函数 $g(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，则 $f(2x-1)$ 的定义域为(　　).

A. $\left[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right]$　　B. $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$　　C. $[0,1]$　　D. $\left[-\dfrac{1}{2},1\right]$

(二) 会求函数的表达式

1. 由 $f(x)$ 的表达式确定 $f[\varphi(x)]$ 的表达式，用代入法

【分类练习】

1．(1996 年，填空 3 分)　设 $f(x)=3x+5$，则 $f[f(x)-2]=$ ________.

2．(2002 年，填空 4 分)　设 $f(x)=\ln x$，$g(x)=e^{2x+1}$，则 $f[g(x)]=$ ________.

附：高数(一)的试题

3．(1999 年，填空 4 分)　设 $y=3^u$，$u=v^2$，$v=\tan x$，则 $y=f(x)=$ ________.

4．(2002 年，填空 4 分)　设 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，则 $f[f(x)]=$ ________.

2. 由 $f[\varphi(x)]$ 的表达式确定 $f(x)$ 的表达式，用换元法或拼凑法

【分类练习】

附：高数(一)的试题

1．(1994 年，填空 3 分)　设 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2$，则 $f(x)=$ ________.

2．(1996 年，填空 3 分)　设 $f(x^2+1)=x^4+3x^2+2$，则 $f(x)=$ ________.

3．(1998 年，填空 4 分)　设 $f(x+1)=x^2+3x+5$，则 $f(x)=$ ________.

4．(2001 年，填空 4 分)　设 $f\left(\dfrac{1}{x}\right)=x+\dfrac{1}{x^2}$，则 $f(x)=$ ________.

（三）会求分段函数的函数值

【分类练习】

附：高数(一)的试题

1．(2000 年，填空 4 分)　设 $f(x)=\begin{cases}\cos x & x\leqslant 0\\ \sqrt{x} & x>0\end{cases}$ 则 $f(0)=$________.

2．(2003 年，选择 4 分)　设 $f(x)=\begin{cases}e^{2} & x<-1\\ x^{2}-1 & x\geqslant -1\end{cases}$ 则 $f(0)=$(　　).

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

（四）理解函数的奇偶性

定义：在对称区间$(-\infty,+\infty)$或$(-a,a)$内

若 $f(-x)=-f(x)$，则 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$或$(-a,a)$内是奇函数.

若 $f(-x)=f(x)$，则 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$或$(-a,a)$内是偶函数.

图像：奇函数的图像与原点对称，偶函数的图像与 y 轴对称.

运算：奇函数与奇函数的和，差仍是奇函数，而积，商是偶函数.

偶函数与偶函数的和，差，积，商仍是偶函数.

奇函数与偶函数的和，差是非奇非偶函数，而积，商是奇函数.

【分类练习】

1．(1995 年，填空 3 分)　偶函数 $f(x)$的图形的对称轴是________.

2．(1997 年，选择 3 分)　设 $f(x)$是奇函数，则 $F(x)=f(x)\left(\dfrac{1}{a^{x}+1}-\dfrac{1}{2}\right)$是(　　)函数.

A. 奇　　B. 偶　　C. 非奇非偶　　D. 奇偶性与 a 有关

3．(2002 年，选择 4 分)　$f(x)=x^{3}\sin x$ 是(　　)函数.

A. 奇　　B. 偶　　C. 有界　　D. 周期

附：高数(一)的试题

4．(1995 年，选择 4 分)　函数 $f(x)=\cos x^{3}$ 的图形关于(　　)对称.

A. x 轴　　B. y 轴　　C. 原点　　D. 直线 $y=x$

5．(1999 年，解答 6 分)　设 $f(x)$是奇函数，判定 $F(x)=f(x)(2^{x}+2^{-x})$的奇偶性.

（五）会求单调函数的反函数，了解函数 $y=f(x)$与反函数 $y=f^{-1}(x)$之间的关系(定义域，值域，图像)

将单调函数 $y=f(x)$看作自变量 x 的一元方程，其解为 $x=f^{-1}(y)$，即 $y=f(x)$的反函数，再将 x 与 y 对调，得 $y=f^{-1}(x)$，即 $y=f(x)$的习惯反函数.

函数 $y=f(x)$的定义域(或值域)即反函数 $y=f^{-1}(x)$的值域(或定义域).

函数 $y=f(x)$与反函数 $y=f^{-1}(x)$的图像关于直线 $y=x$ 对称.

【分类练习】

1.（1994 年、选择 3 分） 设 $f(x)=2^{x-1}$，则 $f^{-1}(x)=($　　$)$.

A. $\log_2(x+1)$　B. $\log_2 x+1$　C. $\frac{1}{2}\log_2 x$　D. $2\log_2 x$

二、极限

（一）数列的极限

1. 会用已知极限 $\lim\limits_{n\to\infty}C=C$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ 及下列运算法则求数列的极限

若 $\lim a_n=A,\lim b_n=B$.

则 $\lim(a_n\pm b_n)=\lim a_n\pm\lim b_n=A\pm B$.

$\lim(a_n\cdot b_n)=\lim a_n\lim b_n=AB$，$\lim ka_n=k\lim a_n=kA$

$$\lim\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim a_n}{\lim b_n}=\frac{A}{B}\quad(B\neq0)$$

【分类练习】

1.（1998 年，填空 4 分） $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2+3n}=$________.

2.（2001 年，解答 6 分） 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-3n}}{2n+1}$.

2. 会用重要极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$ 求数列的极限

【分类练习】

（1994 年，解答 5 分） 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-n}$.

（二）函数的极限

1. 会用已知极限 $\lim\limits_{x\to\infty}C=C$ 和 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ 及下列运算法则求极限

若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A,\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=B$.

则 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)+\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=A\pm B$

$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)g(x)]=\lim\limits_{x\to\infty}f(x)\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=AB$，$\lim\limits_{x\to\infty}kf(x)=k\lim f(x)=kA$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}f(x)}{\lim\limits_{x\to\infty}g(x)}=\frac{A}{B}\quad(B\neq0)$$

【分类练习】

附：高数(一)的试题

（1995 年，填空 3 分） $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x^2+1}{(x+2)^3}=$ ________.

2．用结论：$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}0 & n<m\\ \dfrac{a_0}{b_0} & n=m\\ \infty & n>m\end{cases}$ 确定极限

【分类练习】

1．（2003 年，填空 4 分） $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{3x^2+x}=$ ________.

附：高数（一）的试题

2．（1995 年，填空 3 分） （同前）.

3．会用已知极限 $\lim\limits_{x\to x_0}C=C$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0}x=x_0$ 及下列运算法则求极限

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$.

则 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\pm g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\pm\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A\pm B$.

$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)g(x)]=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=AB$，$\lim\limits_{x\to x_0}kf(x)=k\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=kA$.

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)}=\frac{A}{B}\quad(B\neq 0).$$

【分类练习】

对有理分式的极限，先分解因式，约去极限为 0 的因子

1．（1994 年，解答 5 分） 求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$.

2．（1995 年，解答 5 分） 求 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2+x-6}$.

3．（2002 年，填空 4 分） 求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-6}{x^2-4}$.

对无理分式的极限，先分母或分子有理化，约去极限为 0 的因子

1．（1996 年，解答 5 分） 求 $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$.

2．（1998 年，解答 6 分） 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{\sqrt{x}-1}$.

3．（1999 年，解答 6 分） 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2}$.

4．（2000 年，解答 6 分） 求 $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{1-x}-\sqrt{3}}{x^2+x-2}$.

5．（2001 年，解答 6 分） 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$.

6．（2003 年，解答 6 分） 求 $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}$.

4．熟练掌握用两个重要极限求极限的方法

【分类练习】

会用重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$（可扩大理解为 $\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$）求极限

1．（1994年，解答5分） 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sin 2x}$.

2．（1998年，解答6分） 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x^2}{\sqrt{x^2+1}-1}$.

3．（2000年，填空4分） $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{x^2+5x-6}=$________.

4．（2001年，选择4分） $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-4}=$（　　）.

A. 0　　B. $\dfrac{1}{4}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 1

5．（2002年，填空4分） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}=$________.

6．（2003年，选择4分） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{5x}=$（　　）.

A. 0　　B. $\dfrac{2}{5}$　　C. 1　　D. $\dfrac{5}{2}$

会用重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$（可扩大理解为 $\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}[1+\varphi(x)]^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\mathrm{e}$）求极限

1．（1995年，解答5分） 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{1+x}\right)^{\frac{1}{2x}+1}$.

附：高数（一）的试题

2．（1994年，解答10分） 求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+mx)^{\frac{n}{x}}$.

3．（2000年，解答6分） 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

4．（2002年，解答6分） 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

会用重要极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$（可扩大理解为 $\lim\limits_{\varphi(x)\to\infty}\left[1+\dfrac{1}{\varphi(x)}\right]^{\varphi(x)}=\mathrm{e}$）求极限

1．（1997年，解答5分） 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{\frac{x}{2}+4}$.

2．（1999年，填空4分） $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{x+1}=$________.

3．（2000年，解答6分） 设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+k}{x-2k}\right)^{x}=8$，求常数 k.

4．（2001年，解答6分） 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x}\right)^{3x}$.

5．（2001年，选择4分） 下列极限（　　）正确.

A. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$　　B. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$

C. $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{-\frac{1}{x}}=e$ D. $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

6.（2003 年，填空 4 分） $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{2x}\right)^{x}=$ ________.

附：高数(一)的试题

7.（1996 年，选择 4 分） $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^{bx+c}=$ (　　).

A. e B. e^{a} C. e^{ab} D. e^{ab+c}

8.（1998 年，解答 6 分） 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)^{x}$.

9.（2001 年，填空 4 分） 若 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^{2x}=e$，则常数 $k=$ ________.

5. 会用以下基本初等函数的极限确定极限

幂函数极限：$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}x=\infty$，$\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}=\infty$，$\lim\limits_{x\to0}x=0$.

指数函数极限：$\lim\limits_{x\to0}e^{x}=1$，$\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x}=0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}=\infty$，$\lim\limits_{x\to\infty}e^{x}$ 不存在.

对数函数极限：$\lim\limits_{x\to1}\ln x=0$，$\lim\limits_{x\to0^{+}}\ln x=-\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

三角函数极限：$\lim\limits_{x\to0}\sin x=0$，$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\sin x=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ 振荡不存在.

$\lim\limits_{x\to0}\cos x=1$，$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos x=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}\cos x$ 振荡不存在.

反三角函数极限：$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2}$，$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$ 不存在.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\operatorname{arccot} x=\pi$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arccot} x=0$，$\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arccot} x$ 不存在.

6. 无穷小量与无穷大量

【分类练习】

理解无穷小量的概念；称以零为极限的变量为无穷小量

1.（1996 年，选择 3 分） 在指定的变化过程中，下列(　　)是无穷小量.

A. $x\to0$ 时，$\sin\frac{1}{x}$ B. $x\to0$ 时，$e^{\frac{1}{x}}$

C. $x\to0$ 时，$\ln(1+x)$ D. $x\to3$ 时，$\frac{x-3}{x^{2}-9}$

附：高数(一)的试题

2.（2001 年，选择 4 分） 当 $x\to0$ 时，下列(　　)是无穷小.

A. $\frac{\sin x}{x}$ B. $x^{2}+\sin x$ C. $\frac{\ln(1+x)}{x}$ D. $2x-1$

掌握无穷小量的运算性质

(1)两个以至有限个无穷小量的代数和仍是无穷小量；

(2)两个以至有限个无穷小量的积仍是无穷小量；

(3)一个无穷小量与一个常量或有极限的变量之积仍是无穷小量；

(4)一个无穷小量与一个有界变量之积仍是无穷小量.

1．(1994 年，选择 3 分)　下列极限(　　)正确．

A．$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1$　　B．$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=1$

C．$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=1$　　D．$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$

2．(1996 年，选择 3 分)　下列极限(　　)正确．

A．$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{x}=1$　　B．$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$

C．$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x^2}=1$　　D．$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=1$

附：高数(一)的试题

3．(2002 年，选择 4 分)　$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin 2x}{x}=($　　$)$．

A．0　　B．$\frac{1}{2}$　　C．1　　D．2

会进行无穷小量阶的比较

设 $\lim f(x)=0,\lim g(x)=0$．

若 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=0$，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相比是较高阶的无穷小量，记作 $f(x)=o(g(x))$．

若 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=C\neq 0$，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相比是同阶的无穷小量．

若 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=1$，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相比是同阶等价的无穷小量，记作 $f(x)\sim g(x)$．

若 $\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 相比是较低阶的无穷小量．

1．(1994 年，选择 3 分)　当 $x\to 0$ 时，$\sin(2x+x^2)$ 与 x 相比较是(　　)的无穷小量．

A．高阶　　B．同阶非等价　　C．等价　　D．低阶

2．(1995 年，选择 3 分)　当 $x\to 0$ 时，x^2 与 $\sin x$ 相比较是(　　)的无穷小量．

A．高阶　　B．同阶非等价　　C．等价　　D．低阶

3．(2002 年，选择 4 分)　当 $x\to 0$ 时，$\ln(1+x)$ 与 x 相比较是(　　)的无穷小量．

A．高阶　　B．同阶非等价　　C．等价　　D．低阶

附：高数(一)的试题

4．(1994 年，选择 4 分)　当 $x\to 0$ 时，$e^{-x^2}-1$ 与 x^2 相比较是(　　)的无穷小量．

A．高阶　　B．同阶非等价　　C．等价　　D．低阶

5．(2000 年，选择 4 分)　当 $x\to 0$ 时，$x^2-\sin x$ 与 x 相比较是(　　)的无穷小量．

A．高阶　　B．同阶非等价　　C．等价　　D．低阶

会用等价无穷小量的代换求极限

常见的等价无穷小量有 $x\to 0$ 时，无穷小量 $e^x-1,\ln(1+x),\sin x,\tan x,\arcsin x,\arctan x$ 均与 x 等价．

$x\to\infty$ 时，无穷小量 $e^{\frac{1}{x}}-1,\ln\left(1+\frac{1}{x}\right),\sin\frac{1}{x},\arcsin\frac{1}{x}$ 均与 $\frac{1}{x}$ 等价．

扩大理解为

$\varphi(x)\to0$ 时，无穷小量 $e^{\varphi(x)}-1$, $\ln(1+\varphi(x))$, $\sin\varphi(x)$, $\arcsin\varphi(x)$ 均与 $\varphi(x)$ 等价.

在求极限时，可将乘除结构中以上的无穷小量用 x 或 $\frac{1}{x}$ 或 $\varphi(x)$ 等价代换.

1.（1996 年，填空 3 分） $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+\sin 2x)}{\arcsin(x+x^2)}=$ ________.

2.（1997 年，解答 5 分） 求 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1-3x)}{\sin 2x}$.

3.（1998 年，解答 5 分） 求 $\lim\limits_{x\to\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)$.

4.（2001 年，填空 4 分） $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(1+2x)}{\sin x}=$ ________.

7. 会求函数在一点的左、右极限，了解函数在一点极限存在的充分必要条件

若 x 从 x_0 的左(或右)侧趋于 x_0 时，$f(x)$ 趋于 A，则称 A 为 x 趋于 x_0 时的左(或右)极限.

记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

若 x 向左(或右)趋于∞时，$f(x)$ 趋于 A，则称 A 为 x 趋于∞时的左(或右)极限.

记作 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 或 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的充要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 均存在且相等.

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在的充要条件是 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 与 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 均存在且相等.

【分类练习】

1.（1995 年，选择 3 分） 设 $f(x)=\begin{cases}x-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ x+1 & x>0\end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)$(　　).

A. 等于 -1　　B. 等于 0　　C. 等于 1　　D. 不存在

2.（1996 年，选择 3 分） 当 $f(x)=$(　　)时，$\lim\limits_{x\to0}f(x)$ 存在.

A. $\begin{cases}\dfrac{1}{2-x} & x<0\\ 0 & x=0\\ x+\dfrac{1}{2} & x>0\end{cases}$　　B. $\begin{cases}x^2+2 & x<0\\ 3 & x=0\\ 2^x & x>0\end{cases}$

C. $\begin{cases}\dfrac{|x|}{x} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$　　D. $\begin{cases}\dfrac{|x|}{\sin x} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$

3.（2003 年，填空 4 分） 设 $f(x)=\begin{cases}2x+1 & x<0\\ \ln(1+x) & x\geqslant0\end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=$ ________.

8. 会用极限确定曲线的水平渐近线与垂直渐近线

若 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 或 $(-\infty,b)$ 或 $(a,+\infty)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=b$，或 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=b$，或 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=b$，则曲线 $y=f(x)$ 有水平渐近线 $y=b$.

若 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处无定义,且 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\infty$ 或 $\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=\infty$,或 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\infty$,则曲线 $y=f(x)$ 有垂直渐近线 $x=a$.

【分类练习】

附:高数(一)的试题

1.(1997年,选择4分) 曲线 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$ 的渐近线( ).

A. 只有水平的　　B. 水平和垂直的都有

C. 只有垂直的　　D. 水平和垂直的都没有

2.(1999年,解答6分) 求曲线 $y=\dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$ 的渐近线.

3.(2001年,填空4分) 曲线 $y=\dfrac{1}{x^2+1}-3$ 的水平渐近线方程为________.

三、连续

理解函数在一点连续与间断的概念,掌握判断函数在一点连续的方法.

定义:若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 与 $f(x_0)$ 均存在并且相等,既 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,则 $f(x)$ 在 x_0 处连续,否则 $f(x)$ 在 x_0 处间断.

【分类练习】

判定函数在一点连续或间断

(1994年,选择3分) 函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-1 & x<0\\ x & 0\leqslant x\leqslant 1\\ 2-x & 1<x\leqslant 2\end{cases}$ ( ).

A. 在 $x=0$ 与 $x=1$ 处均连续　　B. 在 $x=0$ 处间断,在 $x=1$ 处连续

C. 在 $x=0$ 与 $x=1$ 处均间断　　D. 在 $x=0$ 处连续,在 $x=1$ 处间断

据函数在一点连续,由函数在一点的极限确定此点的函数值

附:高数(一)的试题

(1999年,选择4分) 若函数 $f(x)=\dfrac{1-\cos^2x}{x^2}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $f(0)=($ $)$.

A. -1　　B. 0　　C. 1　　D. 2

据函数在一点连续,确定函数式中的待定常数

1.(1995年,填空3分) 设 $f(x)=\begin{cases}3x & x<0\\ a & x=0\\ 3x^2 & x>0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续,则常数 $a=$________.

2.(1996年,解答5分) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin x & x<0\\ k & x=0\\ 1+x\sin\dfrac{1}{x} & x>0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续,求常数 k.

3. (1997 年,选择 3 分) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x} & x\neq 0\\ k & x=0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续,则常数 $k=($　　$)$.

A. 0　　B. $\dfrac{1}{4}$　　C. $\dfrac{1}{2}$　　D. 2

4. (1998 年,选择 4 分) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 3x}{x} & x\neq 0\\ a & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则常数 $a=($　　$)$.

A. -1　　B. 1　　C. 2　　D. 3

5. (2000 年,填空 4 分) 设 $f(x)=\begin{cases}k e^{2x}\\ 1+\cos x\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续,则常数 $k=$________.

附:高数(一)的试题

6. (1994 年,填空 3 分) 设 $f(x)=\begin{cases}a e^{x} & x<0\\ 2+x & x\geqslant 0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续,则常数 $a=$________.

7. (1996 年,填空 3 分) 设 $f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0\\ a+2 & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则常数 $a=$________.

8. (2000 年,解答 6 分) 设 $f(x)=\begin{cases}x^2+b & x\neq 1\\ 2 & x=1\end{cases}$ 在 $x=1$ 处连续,求常数 b.

9. (2002 年,解答 6 分) 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\tan ax}{x} & x<0\\ x+a & x\geqslant 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,求常数 a.