中等数学解题研究

北京师范学院数学系
教材教法教研室 编著

河南教育出版社

中等数学解题研究

李建才　杨文智
周春荔　方运加　吴建平　编著
张景斌　孔国平
审校

河南教育出版社

中等数学解题研究

北京师范学院数学系
教材教法教研室编著

责任编辑　张国旺

河南教育出版社出版
河南郑州解东印刷厂印刷
河南省新华书店发行

850×1168毫米 32开本　15.125印张　375千字
1988年8月第1版　　1988年8月第1次印刷

印数1—4,320册
ISBN7—5347—0117—1/G·99
统一书号7356·519　　定价　3.50

前　言

北京师范学院数学系教材教法教研室在全系教师们及系主任梅向明教授的支持下，从1984年开始，为本科一、二年级学生开设了一门数学教育专业课《中等数学解题研究》．此课程荣获1987年北京市高教局优秀教学成果一等奖．本书是在所用讲义的基础上，经过逐年修订充实，研究讨论后写成的．

课堂或课外做练习是各科教学过程中不可缺少的重要环节，解数学题更是数学特有的训练，对数学基础知识的复习与巩固，对培养和发展解决问题的能力，都有积极的意义．近年来，解数学问题作为数学教学论的一个科研专题，受到国内外数学工作者和数学教育专家的普遍关注，大有使这一课题科学化、理论化的趋势．著名的美国数学家和数学教育家波利亚（G·Polya），对数学解题的研究形成的理论和一系列专著，深得中外数学教育家的赞许．

本书既是一本数学问题的选集，也是一本数学解题训练的手册．内容包括初等代数与函数、几何、综合问题三篇，数百个例题和习题，具有一定的代表性，着重探索解题的思想方法，所涉及的知识，对于大专院校的学生，中等学校数学教师，以及具有中等数学基础知识的读者，都是易于接受的．通过这些数学问题的钻研和练习，以期解决数量更多的各种问题．同时，有助于理解并掌握数学的精神实质，在科技，管理，特别是数学教学工作中，发挥数学这一普遍适用的工具作用．本书还可以作为中等学校学生课外活动小组，或参加数学竞赛培训小组的参考书．

为了便于读者阅读，各部分自成体系，凡与解题有直接关系

的重要概念和定理等知识，给出了适当的讲解或罗列. 要求读者把主要精力放在灵活运用数学方法，培养逻辑思维和概括抽象能力上，从而掌握解题的思想方法.

本书是集体研究讨论的结果. 代数部分由李建才、吴建平编写，初等函数部分由杨文智、孔国平、张景斌编写. 几何部分由胡杞、李延林编写，综合问题部分由周春荔、方运加编写. 最后全稿由米道生先生统一校订. 全书由南宫慈云配图.

本书的编写是一次尝试，尚待通过今后教学实践的检验，考虑不周之处，在所难免，敬希广大读者尤其专业同行不吝指正.

在本书的编写中，我们曾参阅了一些有关的书籍和期刊，谨向原编著者致谢.

编者

1987年3月于北京

目　　录

第一篇　初等代数与初等函数

第二篇　初等几何

第三篇　综合问题

第一篇　初等代数与初等函数

在中学数学中，代数与初等函数部分重点研究数与式、方程与不等式、函数三大块内容．这是由于从总体上说，代数包含三类对象，第一类是数字和字母$\{A\}$；第二类是运算符号$\{O\}$；第三类是关系符号$\{R\}$．将这些对象进行不同的组合就构成代数的基本内容．

$\{A\}$—数字、字母.—数及其数系发展
$\{O\}$—运算符号“+”、“−”、“×”、“÷” } 式子（函数） 方程与不等式
$\{R\}$—关系符号“＝”、“≥”、“≤”不等式

基于以上分析，在这一部分中我们是按照

数—→方程、不等式—→函数

的系统来编排的，除了一些传统内容，象方程、不等式、函数的性质及应用等以外，我们把重点放在中学数学没有涉及或较少涉及的内容上，象整数的性质、复数在几何中的应用、函数周期性讨论、函数极值的初等解法等方面．目的在于深化知识，增加处理问题的途径，提高应用知识解决数学问题的能力．

第一章　初等代数

§1　整　　数

一、概念与性质

形如…－4，－3，－2，－1，0，1，2，3，4，…的数称为整数.

整数通常被分成三类：正整数，0，负整数．正整数也叫自然数，有时候为了讨论问题方便，常常只研究自然数的性质，因为它与负整数只差一个符号，自然数有关的性质一般可以推广到整数.

自然数有多种表示方法，其中最常使用的是十进制方法．每个自然数都能表示成$\overline{a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_0}$的形式，其中$a_n$，$a_{n-1}$，…，$a_2$，$a_1$，$a_0$都是0到9之间的某个自然数，并且$a_n \neq 0$，如93021．这种形式在解决问题时往往不方便，根据十进制的位置原则，自然数可以写成和的形式，即

$$\overline{a_na_{n-1}\cdots a_2a_1a_0}=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\cdots+a_2\cdot 10^2+a_1\cdot 10+a_0$$

具体地说，例如：

$$93021=9\cdot 10^4+3\cdot 10^3+0\cdot 10^2+2\cdot 10+1$$

这种表示方法在处理一些整数问题，特别是整除问题时十分有用.

数的性质通常是与它们之间的运算相联系的．两个整数的和、差、积仍是整数，而它们的商却不一定是整数．例如8÷5

就不是整数，但是

$$8 \div 5 = 1 + \frac{3}{5} \qquad ①$$

①式表明用8除以5时商1，余3，还可将①式改写为

$$8 = 5 \times 1 + 3 \qquad ②$$

一般地，我们有

定理 1. 设a是非零整数，b是任意整数，则可以唯一确定整数q和r，使得

$$b = a \cdot q + r \qquad (0 \leqslant r < |a|)$$

其中q和r分别称为b除以a的商数和余数。

由定理1可以对除法作出一种新的解释：所谓b除以a，就是要找到另外两个整数q和r，使得

$$b = aq + r$$

而且，有 $0 \leqslant r < |a|$。

既然在整数范围内，**除法不是总能实现**，就要引入一种新的与乘法有关的运算，以补救这一不足，于是就要借助整除的概念。

定义1 设a，b是两个整数，其中$a \neq 0$。如果存在另外一个整数q，使得

$$b = q \cdot a$$

则称a整除b，或称b可被a整除，记作$a \mid b$。此时a叫做b的因数（约数），b叫做a的倍数。例如$3 \mid 12$，$7 \mid 245$，$8 \mid 8$，$2 \mid 0$。如果a不整除b，则记作，$a \nmid b$，例如$5 \nmid 8$，$11 \nmid -23$等。

由整除的定义及定理1可以得到一个重要的推论：

a整除b的充分必要条件是$r = 0$，其中r为b除以a所得的余数。

整除概念是整数理论中的基本概念，它有许多重要性质：设a，b，c均是整数，则

（1）$a \mid a$；

（2）$a \mid b$，$b \mid a \Longrightarrow a=b$或$a=-b$；

（3）$a \mid b$，$b \mid c \Longrightarrow a \mid c$；

（4）$a>0$，$b>0$，$a \mid b \Longrightarrow a \leqslant b$；

（5）$a \mid b \Longrightarrow a \mid b \cdot c$；

（6）$a \mid b$，$a \mid c \Longrightarrow a \mid bx+cy$（其中$x$，$y$是整数）；

（7）$c \neq 0$，$a \cdot c \mid b \cdot c \Longrightarrow a \mid b$。

常见的整除判定方法，有

（1）如果一个整数的最末一位数字能被2整除，那么这个整数必定能被2整除；

（2）如果一个整数的最末一位数字是5或0，那么这个整数必定能被5整除；

（3）如果一个整数的末两位数字组成的数能被4整除，那么这个数必能被4整除；

（4）如果一个整数的末位数是0，那么这个整数必能被1整除；

（5）如果一个整数的各位数字之和能被3整除，那么这个整数必能被3整除；

（6）如果一个整数的各位数字之和能被9整除，那么这个整数必能被9整除；

（7）把一个整数所有偶数位置上的数字及所有奇数位置上的数字分别相加，再求出两个和的差，如果所得的差能被11整除，那么这个整数必能被11整除；

（8）把一个整数从右往左每两位分一段，无论最后一段是一位或是两位，如果各段数值之和能被11整除，那么这个整数必定能被11整除。

从定理1可知，按照余数的不同，可以对整数进行分类，最常见的分类就是把整数分为奇数和偶数。任何一个整数被2除

时，余数只有两种可能的情况，或是1，或是0．被2除余数为0的一类整数为偶数，被2除余数为1的一类整数为奇数，分别表示为$2m$和$2m+1$，其中m为整数．奇数偶数具有很多性质，而且它们在解决实际问题中起着重要作用．

（1）两个奇数的和（差）是偶数，两个偶数的和（差）是偶数；

（2）如果两个整数的和（差）是偶数，那么这两个整数必为同奇或同偶；

（3）一个偶数与一个奇数之和（差）是奇数；

（4）如果两个整数的和（差）是奇数，那么这两个整数必是一奇一偶；

（5）奇数个奇数的和（差）是奇数，偶数个奇数的和（差）是偶数，任意多个偶数的和（差）是偶数；

（6）任意多个奇数的积是奇数，n个偶数的积是偶数；

（7）如果n个整数的积是奇数，那么这n个数都是奇数；如果n个整数的积是偶数，那么，这n个数中至少有一个是偶数．

讨论问题总是由最简单的开始，并希望复杂问题能与简单问题联系起来，整数的研究也是这样．在自然数里，1是最简单的，这不单单是因为1是第一个自然数、最小的自然数，而且还由于其他自然数都可以用它来“表示”，即每一个自然数都等于一些1相加，如$7=1+1+1+1+1+1+1$．可见，所谓“1是最简单的”是指它在加法这种运算意义下的简单性．对于乘法，1显然不具有这个性质，对乘法的简单数是所谓的素数．

定义2 设p是一个自然数，如果

（1）$p>1$，（2）p除了1和p以外，再没有别的因数，那么p叫做素数或质数．例如2，3，5，7等都是素数．

素数对乘法的简单性表现在：

定理2． 设$n(>1)$是一个自然数，那么它一定可以写成一

些素数的乘积的形式，即

$$n=p_1\cdot p_2\cdots p_s,$$

其中p_1，p_2，…，p_s均是素数．而且，如果要求 $p_1\leqslant p_2\leqslant\cdots\leqslant p_s$的话，这种表示方法是唯一的．即如果$n$还可以写成

$$n=q_1q_2\cdots q_t,$$

其中q_1，q_2，…，q_t均是素数，而且$q_1\leqslant q_2\leqslant\cdots\leqslant q_t$，那么可以推出$t=s$，且$q_i=p_i$（$i=1$，2，…，$s$）．

例如，$20=2\times2\times5$，$315=3\times3\times5\times7$．

定理 2 在数论中被称作算术基本定理，它反映了素数在乘法意义下的地位，是非常重要的．

二　基本例题

例1　证明：如果一个整数的各位数字之和能被 9 整除，那么这个数必定能被 9 整除．

分析：要利用整数的表示方法，二项式定理

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot a^{n-k}\cdot b^k,$$

以及整除的性质．

证明：设N是满足条件的整数，即

$$N=a_n\cdot10^n+a_{n-1}\cdot10^{n-1}+\cdots+a_1\cdot10+a_0,$$

而且

$$9\mid(a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0).$$

由二项式定理，可知

$$N=a_n\cdot(9+1)^n+a_{n-1}\cdot(9+1)^{n-1}+\cdots+a_1\cdot(9+1)+a_0$$

$$=a_n\sum_{k=0}^{n}C_n^k\,9^{n-k}+a_{n-1}\cdot\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^k\cdot9^{n-1-k}+\cdots+a_1\cdot(9+1)+a_0$$

$$=a_n(9^n+C_n^1\cdot 9^{n-1}+\cdots+C_n^{n-1}\cdot 9+1)+$$

$$+a_{n-1}(9^{n-1}+C_{n-1}^1 9^{n-2}+\cdots+C_{n-1}^{n-2}\cdot 9+1)+\cdots$$

$$+a_1(9+1)+a_0$$

$$=(a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0)+a_n\cdot 9\cdot A_n+a_{n-1}\cdot 9\cdot A_{n-1}+\cdots$$

$$+a_1\cdot 9$$

其中A_n，A_{n-1}，…均是整数。显见

$$9\mid N.$$

例2 求一个首位数字是7，其余各位数字均不相同，而且能被11除尽的最小六位数。

解：设这个数为$N=70123*$，现在关键是要确定*是几。

由已知N被11整除，则这个数的偶数位数字之和是$3+1+7=11$，奇位数字之和为$*+2+0=*+2$，应有$11-*-2$被11整除，又*在0到9之间，因此只有$11=*+2$，即$*=9$。

所以，$N=701239$。

例3 设自然数$\overline{62\alpha\beta427}$为99的倍数，试求$\alpha$、$\beta$。

解：由$99\mid\overline{62\alpha\beta427}$，得

$$9\mid\overline{62\alpha\beta427},\qquad 11\mid\overline{62\alpha\beta427}.$$

当$9\mid\overline{62\alpha\beta427}$时，根据整除判定法，有

$$6+2+\alpha+\beta+4+2+7=9m$$

即 $$\alpha+\beta+3=9m_1$$

由于$0\leqslant\alpha\leqslant 9$，$0\leqslant\beta\leqslant 9$，则有$3\leqslant\alpha+\beta+3\leqslant 21$，从而

$$\alpha+\beta+3=9 \quad 或 \quad \alpha+\beta+3=18$$

即 $$\alpha+\beta=6 \quad 或 \quad \alpha+\beta=15 \qquad ①$$

当$11 \mid \overline{62\alpha\beta427}$时，根据整除判定法，有

$$(6+\alpha+4+7)-(2+\beta+2)=11k$$

即 $\alpha-\beta+13=11k$

同样由$0\leqslant\alpha\leqslant 9$，$0\leqslant\beta\leqslant 9$，可有 $4\leqslant\alpha-\beta+13\leqslant 22$，

从而 $\alpha-\beta+13=11$ 或 $\alpha-\beta+13=22$

即 $\alpha-\beta=-2$ 或 $\alpha-\beta=9$ ②

结合①和②，由于$0\leqslant\alpha\leqslant 9$，$0\leqslant\beta\leqslant 9$， 故只有

$$\alpha=2 \qquad \beta=4.$$

例 4 有一个六位数，其中一、四位，二、五位，三、六位的数字相同，证明此数可被7、11、13整除。

证明：根据已知，不妨设

$$\begin{aligned}A&=\overline{a_3a_2a_1a_3a_2a_1}\\&=a_3\cdot 10^5+a_2\cdot 10^4+a_1\cdot 10^3+a_3\cdot 10^2+a_2\cdot 10+a_1\\&=(100\cdot a_3+10\cdot a_2+a_1)\times 1001\end{aligned}$$

而$7\times 11\times 13=1001$， 故

$$7 \mid A, \quad 11 \mid A, \quad 13 \mid A.$$

例 5 试证任意一个整数与它的数字和的差必能被9整除，并且它与它的数字作任意调整后所成的整数的差也能被9整除。

证明：设

$$N=a_n\cdot 10^n+a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+\cdots+a_1\cdot 10+a_0$$

由例1的结果

$$\begin{aligned}&N-(a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0)\\&=a_n\cdot 9\cdot A_n+a_{n-1}\cdot 9\cdot A_{n-1}+\cdots+a_1\cdot 9\end{aligned}$$

其中A_n，A_{n-1}，…均是整数，于是

$$9 \mid [N-(a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0)]$$

即任一整数与其数字之和的差能被9整除。

再设将$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$按任一种顺序排列成

$$a_0', a_1', a_2', \cdots, a_n'$$

并令 $\sigma=a_0+a_1+\cdots+a_n$,

$$\sigma'=a_0'+a_1'+\cdots+a_n'$$

$$N=a_n\cdot 10^n+\cdots+a_1\cdot 10+a_0$$

$$N'=a_n'\cdot 10^n+\cdots+a_1'\cdot 10+a_0'$$

由前面结果，$N-\sigma$和$N'-\sigma'$均是9的倍数，即存在整数A和B，使得

$$N-\sigma=9A,\ N'-\sigma'=9B$$

于是

$$N-N'=\sigma+9A-(\sigma'+9B)$$

显然$\sigma=\sigma'$，因此有

$$N-N'=9(A-B)$$

即$N-N'$是9的倍数。

例6 证明不存在整数m和n，使$m^2=n^2+1986$。

证明：(用反证法)设存在整数m和n，使

$$m^2=n^2+1986$$

成立，则有

$$(m+n)\cdot(m-n)=1986$$

如果m和n同为奇数或同为偶数，则$m+n$和$m-n$皆为偶数，于是$(m+n)\cdot(m-n)$必是4的倍数，然而1986不能被4整除，矛盾。

如果m和n中有一个是奇数，另一个是偶数，则$m+n$和$m-n$均是奇数，它们的乘积必是奇数，从而与1986是偶数矛盾。

综上所述，满足$m^2=n^2+1986$的整数m和n是不存在的。

【注】 1986这个数没有什么实质的意义，只要这个具体数值是偶数且不是4的倍数，上面的证明过程都是有效的。

例7 如果直角三角形的三条边长均是整数，则两条直角边长不可能都是奇数。

证明：(用反证法) 设两条直角边均是奇数，则一条直角

边为 $2p+1$，另一条直角边为 $2q+1$（其中 p、q 均是整数）由勾股定理，得

$$(2p+1)^2+(2q+1)^2=斜边^2,$$

即 $$4(p^2+q^2+p+q)+2=斜边^2.$$

注意 $4(p^2+q^2+p+q)$ 是能被 4 整除的，但2不能被 4 整除，所以 $4(p^2+q^2+p+q)+2$ 不能被 4 整除，而偶数的平方一定能被 4 整除，因此斜边不会是偶数．又奇数的平方还是奇数，从而斜边也不会是奇数，矛盾。

例 8 奇数个整数的任意两排列的对应项差的乘积一定是一个偶数。

证明： 设

$$a_1, a_2, \cdots a_{2k+1}$$

和

$$b_1, b_2, \cdots, b_{2k+1}$$

是已给的奇数个整数的任意两个排列，从而，得到对应项的差

$$a_1-b_1, a_2-b_2, \cdots, a_{2k+1}-b_{2k+1}$$

注意到 $a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$，则有

$$(a_1-b_1)+(a_2-b_2)+\cdots+(a_{2k+1}-b_{2k+1})$$
$$=(a_1+a_2+\cdots+a_{2k+1})-(b_1+b_2+\cdots+b_{2k+1})=0.$$

说明 $a_1-b_1, a_2-b_2, \cdots, a_{2k+1}-b_{2k+1}$ 这 $2k+1$ 个整数的和是0，是一个偶数。由奇偶数的性质 可 知，a_1-b_1，a_2-b_2，$\cdots$，$a_{2k+1}-b_{2k+1}$ 这 $2k+1$ 个整数中必有一个为偶数，从而

$$(a_1-b_1)\cdot(a_2-b_2)\cdots(a_{2k+1}-b_{2k+1})\text{ 是偶数.}$$

三 各种类型的整除问题

整除问题是在整数理论中常见的，题目的类型很多，难易程度也不等，处理的方法也是多种多样的，下面举例予以介绍．

例 9 证明 两个连续整数中，必有一个能被 2 整除；三个连续整数中，必有一个能被 3 整除；一般地 n 个连续整数中 必 有