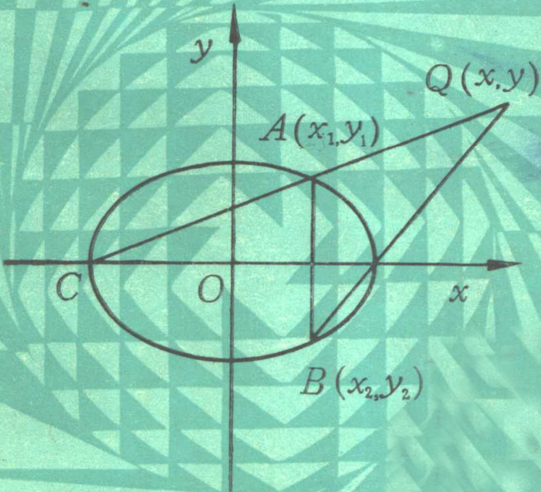
高中毕业总复习指导

数学（下）

[按“两种教学要求”修订



天津人民出版社

高中毕业总复习指导

〔按两种教学要求修订〕

数　学

（下）

贺信淳、明知白、张君达、魏仲和、臧龙光　编

钟善基　审订

天津人民出版社

高中毕业总复习指导
——数学（下）
•
天津人民出版社 出版
（天津市赤峰道124号）
天津新华印刷一厂印刷　新华书店天津发行所发行
•
787×1092毫米　32开本　12.375印张　251千字
1984年1月第1版
1985年1月第2版　1985年1月第2次印刷
印数：565,101—767,000
统一书号：7072·1342
定价：1.35元

出版说明

为了帮助高中毕业班的教师搞好总复习阶段的教学，也为了帮助高中学生、在职和待业青年搞好高中课程的复习，我社于1984年初，出版了《高中毕业总复习指导》丛书，包括语文、数学、物理和化学四种。为适应教学形势的发展，体现数、理、化三科的“两种教学要求”，在广泛征求读者意见的基础上，我们对《高中毕业总复习指导》进行了全面修订。

修订后的《数学》保留了原书的结构与特色，作了较大改进。突出它在复习中的实用性：加强了“基本要求”部分；使之与大纲、教材贴得更紧；充实了能举一反三的内容，对知识的规律性和认识知识的规律性方面的分析与说明作了较为详尽的阐述。采取了基本要求与较高要求的内容按各自的体系分别顺序编排。

《数学》由贺信淳、明知白、张君达、魏仲和、臧龙光等同志编写、修订，北京师范大学钟善基先生审订。

欢迎广大读者提出批评意见。

目　　录

基 本 要 求 部 分

第三编　立体几何

第四编　解析几何

较 高 要 求 部 分

第五编 代数、概率

第六编 微积分

第三编　立体几何

第一章　直线和平面

一、内容概述与分析

（一）本章主要内容

1.平面的基本性质

公理 1　如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这平面内.

公理 2　如果两个平面有一个公共点，那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线.

公理 3　经过不在同一条直线上的三点，有且只有一个平面.

推论 1　经过一条直线和这条直线外的一点，有且只有一个平面.

推论 2　经过两条相交直线，有且只有一个平面.

推论 3　经过两条平行直线，有且只有一个平面.

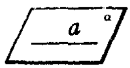
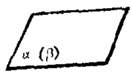
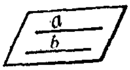
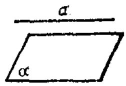
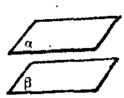
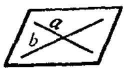
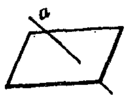
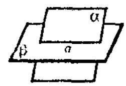
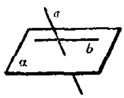
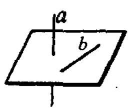
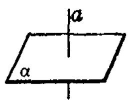
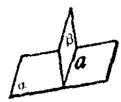
2.空间的直线和平面间的位置关系（见表3-1-1）.

3.空间的直线和平面互相垂直、互相平行的判定和性质（见表3-1-2）.

4.空间图形中角的概念

（1）异面直线所成的角

表 3-1-1

位置关系 \ 对象	直线与直线	直线与平面	平面与平面
在……内或重合	a(b)		
平行			
相交			
既不平行也不相交		/	/
垂直			

从空间任意一点作和两条异面直线分别平行的直线，它们所夹的锐角（或直角）叫做异面直线所成的角.

（2）直线和平面所成的角

直线和它在平面内的射影所成的锐角，叫做直线和这个平面所成的角.

（3）平面和平面所成的角

二面角：从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫

表 3-1-2

		直线与直线	直线与平面	平面与平面
垂直	判定	两条异面直线所成角是直角，这两条异面直线垂直 三个两两垂直的平面的交线两两垂直 三垂线定理及其逆定理	如果一条直线和平面内的两条相交直线都垂直，那么这条直线垂直于这个平面 如果两条平行线中的一条垂直于一个平面，那么另一条也垂直于同一个平面 如果两个平面互相垂直，那么在一个平面内垂直于它们交线的直线垂直于另一个平面	两个平面相交，如果所成的二面角是直二面角，就说这两个平面互相垂直 如果一个平面经过另一个平面的一条垂线，那么这两个平面互相垂直
	性质		如果一条直线和平面垂直，那么这条直线和平面内的任何直线都垂直（定义） 如果两条直线同垂直于一个平面，那么这两条直线平行	如果两个平面互相垂直，那么经过一个平面内的一点垂直于另一个平面的直线在原平面内 如果两个平面垂直，那么在一个平面内垂直于它们交线的直线垂直于另一个平面
平行	判定	平行于同一条直线的两条直线平行；同垂直于同一平面的两条直线平行 两个平行平面都和第三个平面相交，它们的交线平行	如果平面外的一条直线和这个平面内的一条直线平行，那么这条直线与这个平面平行 两个平行平面，其中一个平面内的直线一定平行于另一个平面	如果一个平面内的两条相交直线都平行于另一个平面，那么这两个平面平行 垂直于同一条直线的两个平面互相平行
	性质	如果两条相交直线和另两条相交直线分别平行，那么这两组直线所成的锐角（或直角）相等	如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线就和交线平行	夹在两个平行平面间的平行线段相等

做二面角（两个平面相交，形成四个二面角）。

二面角的平面角：以二面角的棱上任意一点为端点，在两个半平面内分别作垂直于棱的两条射线，这两条射线所成的角叫做二面角的平面角．二面角的大小用二面角的平面角来度量．

5.空间图形中距离的概念

（1）异面直线间的距离

和两条异面直线都垂直相交的直线叫做异面直线的公垂线，公垂线在这两条异面直线间的线段的长度，叫做两条异面直线的距离．

（2）点到平面的距离

从平面外一点作平面的垂线，这点到垂足的距离，叫做这点到平面的距离．

（3）与平面平行的直线到平面的距离

一条直线和一个平面平行，这条直线上任意一点到平面的距离，叫做这条直线和平面的距离．

（4）互相平行的平面间的距离

两个平面互相平行，其中一个平面上的任意一点到另一个平面的距离，叫做这两个平行平面间的距离．

（二）分析

本章的主要内容是研究空间的直线与直线，直线与平面，平面与平面的位置关系，以及有关图形的画法．

直线在平面内的判定、两平面相交成一直线、不共线的三点决定一平面以及平行于同一直线的二直线互相平行等四个公理，是本章知识的基础；空间的直线与直线、直线与平面所成的角，从直线出发的两个半平面所形成的二面角及其

平面角，异面直线间的距离、平行的直线与平面间的距离，平行的平面与平面间的距离等，是本章中几个基本的也是重要的概念，它们是研究空间的直线与平面的相互垂直、平行关系的基础．

空间的直线和平面所成的角都是归结为平面几何中的角来定义的，所以可以把它看作是平面几何中的角在空间的拓广．在度量和应用这些角进行计算和论证时，都必须首先判定这些平面角满足空间的直线和平面所成的角的定义，才能推理严密．

空间的直线和平面间的距离都是归结为两点间的距离来定义的，并且都是两个图形各自取一点时，两点间的距离中的最小的．在度量和应用这些距离进行计算和论证时，也必须对所讨论的线段加以判定，说明它们满足直线和平面间的各种距离的定义，才能推理严密．

空间的直线和平面间的互相平行、互相垂直的定义、性质和判定方法的研究，是本章的中心问题，应认真对待．在证明直线和平面的垂直或平行关系成立时，能从求证的位置关系出发，联想有关的判定定理；在利用已知的垂直或平行的位置关系进行推理时，能从已知的位置关系出发，联想有关的性质定理；做到既能用综合的方法，也能用分析的方法寻找论证的途径．

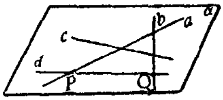
学好本章知识要做到会叙述每一个定义、定理，重要定理还要掌握证明方法，能根据题目的已知条件设计直观图的画法，推证过程要书写的严密而简捷．

二、例题选讲

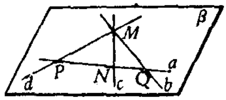
〔例 1〕空间四条不共点的直线两两相交，证明这四条直线一定在同一个平面内.

分析：证明几条直线共面，可利用题设中的条件，先确定一个平面，然后逐个证明其他直线都在这个平面内.

证明：设a，b，c，d四条直线不共点但又两两相交. 这可分为以下两种情况：（1）其中没有任何三条直线共点；（2）其中有三条直线共点.分别证明如下：



（1）



（2）

图 3-1-1

（1）由于四条直线两两相交，那么其中任何两条都能确定一个平面，不妨设直线 a 和 b 确定平面α.（图3-1-1（1））

又由于四条直线两两相交，那么其余两条也一定和a，b都相交，设直线d与a相交于P，与b相交于Q，则因为P，Q都在α上，所以 d 在 α 上.同理可证 c 也在 α 上，所以a，b，c，d都在同一平面上.

（2）若直线a，b，c，d两两相交，其中三条直线共点，不妨设b，c，d三直线相交于M，直线a与b，c，d 分别相交于Q，N，P三点，且M不在 a 上(图3-1-1(2))由于M是不在a上的点，M和a确定一个平面β.因为Q在a上，所以Q在β上，则M和Q确定的直线b在β上.同理可证，c和d也在β上.

所以a，b，c，d都在同一平面β上，命题得证。

说明：关于空间的点、线、面间的相互位置关系的情况较复杂，在论证问题时，应考虑全面，以免疏漏某些可能产生的情况，导致论证不严密。

〔例 2〕已知a，b是异面直线，直线c与a，b分别相交于P，Q两点，直线d与a，b分别相交于R，S两点，求证c和d也是异面直线（图3-1-2）。

分析：证明两条直线是异面直线，常用反证法：先假设这两条直线不是异面直线，即这两条直线在同一平面内，然后设法推出矛盾。

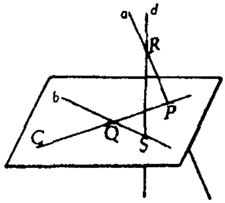


图 3-1-2

证明：设直线c和d不是异面直线，那么c和d在同一平面内，设此平面为β.由于P在c上，而c在β上，所以点P在β上；又由于R在d上，而d在β上，所以R也在β上。

同理可证，Q，S两点也在平面β上，也就是P，Q，R，S四点都在β上，所以直线a和b都在β上，即a和b共面，这与已知a和b是异面直线矛盾。由此可见，c和d不是异面直线不成立，故c和d是异面直线。

说明：在立体几何的证明题中，如果可引用的公理、定理等依据较少时，常考虑用反证法证明.用反证法证明，就是先假定结论的反面成立，然后设法推出和公理、定理、已知条件、临时假设相矛盾，或自相矛盾的情况。

如果结论的反面只有一种情况，只要将这种情况驳倒就可以了，这种反证法又叫归谬法；如果结论的反面不仅是一

种情况，就必须把反面的所有情况逐个驳倒，这种反证法又叫穷举法。

〔例 3〕设A，B，C，D是不共面的四个点，P,Q，R，S分别是AC，BC，DB，DA的中点，若$AB=12\sqrt{2}$，$CD=4\sqrt{3}$，且四边形$PQRS$的面积为$12\sqrt{3}$，求异面直线AB和CD所成的角（图3-1-3）。

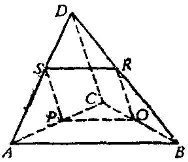


图 3-1-3

分析：求异面直线所成的角，首先要根据已知条件找出一个角，再根据定义、定理，证明这个平面角是异面直线所成的角，然后再利用已知条件求出这个角的大小。

解：在$\triangle ABC$和$\triangle ABD$中，由于P，Q，R,S分别是AC，BC，BD，AD的中点，有

$$SR \underline{\parallel} \frac{1}{2}AB \underline{\parallel} PQ,$$

所以四边形$PQRS$是平行四边形。

同理可证 $PS \underline{\parallel} \frac{1}{2}CD$,

所以$\angle RSP$是异面直线AB和CD所成的角，且

$$SR=\frac{1}{2}AB=6\sqrt{2}, \quad SP=\frac{1}{2}DC=2\sqrt{3}.$$

由于$\square PQRS$的面积为$12\sqrt{3}$，所以

$$SR \cdot SP \cdot \sin\angle RSP=12\sqrt{3}.$$

$$\therefore \sin\angle RSP=\frac{12\sqrt{3}}{6\sqrt{2}\times 2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

则 $\angle RSP=45^\circ$或$\angle RSP=135^\circ$.

根据异面直线所成的角的定义，只有$\angle RSP=45°$，所以异面直线AB和DC所成的角是45°。

说明：只有符合条件的锐角或直角，才能叫做异面直线所成的角，故本题中的$\angle RSP=135°$应舍去。

〔例 4〕已知直线a在平面α内，直线b与直线a是异面直线，且$b\parallel\alpha$，求证直线b上任意一点到平面α的距离，等于异面直线a与b的距离（图3-1-4）。

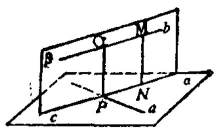


图 3-1-4

分析：证明两个距离相等，应该先根据已知条件找出两条线段，证明这两条线段分别表示这两个距离，再证明这两条线段相等。

证明：在直线b上任取一点M，作$MN\perp\alpha$于N，过相交直线b和MN作平面β，与平面α相交于过N点的直线c，因为$b\parallel\alpha$，所以$b\parallel c$，设c与a相交于P（若c与a不相交，就会与a和b是异面直线矛盾），过P点在β内作直线$PQ\perp c$交b于Q。

由于$MN\perp\alpha$，所以$\beta\perp\alpha$，则有$MN\perp c$。因此MN为直线b到平面α的距离。

$\because\ \beta\perp\alpha$，$QP\perp c$，$\therefore\ QP\perp\alpha$。则有$QP\perp a$。由于$b\parallel c$，$QP\perp c$，有$QP\perp b$，所以$QP$是异面直线$a$与$b$的公垂线段，它的长是$a$与$b$的距离。

$\because\ MN$，PQ都在β内，且都和c垂直，

$\therefore\ MN\parallel PQ$。

由$b\parallel c$可知，$MN=PQ$。

所以直线b上任意一点到平面α的距离等于异面直线a与b的距离。