高等院校适用教材

概率统计典型问题精解

杨延龄　章栋恩　编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高等院校适用教材

概率统计
典型问题精解

杨延龄　章栋恩　编

机械工业出版社

全书包括五章和一个附录。每章由三部分组成：第一部分是内容提要，将该章中的定义、定理和公式予以系统总结与阐述。第二部分是例题，这是该章的主要部分。按照问题的所求与解题方法，将常见的典型问题予以详细分类。对于每一类，精选若干例题，给出详尽解答。第三部分是习题，与例题配合编选了许多习题，供读者检验自己对于概念的理解，以及对于方法的掌握。习题后附有答案与提示。在附录中，介绍如何用计算机软件 Excel 解决数理统计问题。

本书可供高等理工科院校学生使用，也可供考研人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

概率统计典型问题精解/杨延龄，章栋恩编 .—北京：机械工业出版社，2003.8

高等院校适用教材

ISBN 7-111-12401-4

Ⅰ.概… Ⅱ.①杨…②章… Ⅲ.①概率论—高等学校—教材②数理统计—高等学校—教材 Ⅳ.O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2003）第 046412 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号　邮政编码　100037）

责任编辑：刘小慧　版式设计：霍永明　责任校对：李汝庚

封面设计：陈　沛　责任印制：施　红

北京铭成印刷有限公司印刷·新华书店北京发行所发行

2003 年 8 月第 1 版·第 1 次印刷

787mm×1092mm 1/16·9.75 印张·234 千字

定价：15.00 元

前　言

本书按照"概率论与数理统计教学基本要求"，同时参照硕士研究生入学考试大纲而编写，可以作为正在学习该课程的学生以及准备报考研究生的人员的参考书。

全书包括五章和一个附录。每章由三部分组成。第一部分是内容提要，包括该章中定义、定理、公式的系统总结，以及对较难理解的概念的解释与阐述，可以作为读者的复习提纲，而且，它并不是教科书的简单摘要。仔细阅读，读者将会发现一些由于篇幅所限，在一般教科书中不可能详细阐述的内容。

第二部分是例题。这也是该章的主要部分。在这里，对于典型问题予以详细分类。先按照问题的所求分成几个大类。对于每个大类，再按照已知分成几个小类。每类精选若干例题，予以详尽解答。这些例题包括部分研究生入学试题，基本上涵盖了所有常见的典型问题。掌握了这些问题的解法，也就基本上理解了这门学科的主要思想、内容与方法。部分例题后面有评述，指出解题的思路与注意事项等等。内容提要是按照定义、定理的顺序编写的，可以说是纵向编排。例题是按照问题的类型编写的，可以说是横向编排。一纵一横，相辅相成。目的是使读者对这门课程有一个更完整、系统的了解与掌握。

第三部分是习题。与例题相配合，选择了相当数量的习题。供读者检验自己对概念的理解，以及对方法的掌握。有些习题具有一定难度。如果一时不能解决，也不要放弃。经过反复思考，最终会找到解决方法，此时收获最大，而且这也正是学习的乐趣所在。因此，虽然习题后附有答案与提示，也不要急于查看。

附录的内容是用计算机解决数理统计问题。统计软件很多，这里只介绍 Microsoft 公司 Office 软件中的 Excel。这是一个常用的制表软件，同时可以对表中数据进行各种统计。虽然不是专业软件，但是足以解决常用的数理统计问题。

本书由北京工商大学数学教研室杨延龄、章栋恩编写。

在编写过程中得到了学校有关部门与机械工业出版社的大力支持，在此表示感谢。

由于编者水平有限，错误与不妥之处在所难免，恳请读者指正。

作　者

2003 年 2 月

目　录

第四章 抽样分布与参数估计

第五章 假设检验与回归分析

附录 用 Excel 软件解决数理统计问题

第一章　随机事件与概率

第一部分　内 容 提 要

一、随机事件

1．随机试验

定义 1　满足下述性质的试验称为随机试验：

(1) 可以在相同条件下重复进行试验；

(2) 每次试验的可能结果不止一个，但事先知道试验的所有可能结果；

(3) 进行一次试验之前，不能确定哪一个结果会出现.

随机试验是一类随机现象的数学抽象.

定义 2　随机试验的所有可能结果的全体称为样本空间，用 S 表示. 样本空间的元素，即随机试验的每一个结果称为一个样本点.

2．随机事件

样本空间的任意一个子集是一个随机事件，简称事件. 一般用 A、B 表示. 在一次随机试验中，当且仅当出现的结果是属于事件 A 的样本点时，称在这次随机试验中事件 A 发生. 否则称为事件 A 不发生.

由一个样本点组成的子集称为基本事件. 此外，还有两个特殊的事件：一个是 S 本身，每次试验都必然发生，称为必然事件；另一个是空子集 $\varnothing$，每次试验都不会发生，称为不可能事件.

3．随机事件的运算

(1) 事件的并集 $A\cup B$ 称为 A 与 B 的和事件. 在随机试验中和事件发生，当且仅当事件 A 与事件 B 至少有一个发生.

推广：有限多个事件的和事件 $\bigcup_{k=1}^{n}A_k$ 与无穷多个事件的和事件 $\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$.

(2) 事件的交集 $A\cap B=AB$ 称为 A 与 B 的积事件. 在随机试验中积事件发生，当且仅当事件 A 与事件 B 同时发生.

推广：有限多个事件的积事件 $\bigcap_{k=1}^{n}A_k$ 与无穷多个事件的积事件 $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$.

(3) 事件的差集 $A-B$ 称为 A 与 B 的差事件. 在随机试验中差事件 $A-B$ 发生，当且仅当事件 A 发生，而事件 B 不发生.

4．随机事件的关系

(1) 作为子集，如果有 $B\supset A$，则称事件 B 包含事件 A. 表示：在随机试验中如果事件

A 发生，则事件 B 必然发生.

特例：如果 $A \supset B$，且 $B \supset A$，则称事件 A 与事件 B 相等．记作 $A=B$．在随机试验中相等的事件或者同时发生，或者同时不发生.

(2) 作为子集，如果有 $A \cap B=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互斥，或互不相容．表示：在随机试验中，事件 A 与事件 B 不能同时发生.

特例：如果 $A \cup B=S$，$A \cap B=\varnothing$，则称事件 B 是事件 A 的对立事件．记作 $B=\bar{A}$．在随机试验中事件 A 与对立事件 B 中有且只有一个发生.

5．随机事件的不同表示

按照定义，随机事件是样本空间的一个子集．于是，自然将概率论与集合论联系起来．实际上，事件的运算和关系，甚至它们的符号，也是从集合论直接转移过来．因此，也可以用表示集合的文氏图表示事件．然而，这里毕竟是概率论，有它自己的特殊术语，即“事件发生”的语言.

在开始学习概率论时，我们或许经常从集合论的角度理解和处理问题．但是，最终必须熟悉概率论自己的语言．因为，这里不仅是一套术语，而且还包含了概率论特有的思想与方法.

总之，我们对于事件有几种不同的表示.

(1) 随机事件：事件 A；

(2) 随机试验：在一次随机试验中，事件 A 发生；

(3) 集合论：集合 S 的子集 A；

(4) 文氏图：单位正方形中的区域 A.

下面给出这四种表示，见表 1-1、1-2 和图 1-1、1-2.

表 1-1　事件与运算

随机事件	事件 A	必然事件 S	不可能事件 $\varnothing$	和事件 $A \cup B$	积事件 AB	差事件 $A-B$
随机试验	A 发生	必然发生	永不发生	A 与 B 至少有一个发生	A 与 B 都发生	A 发生，B 不发生
集合论	子集	整个集合	空子集	并集	交集	差集

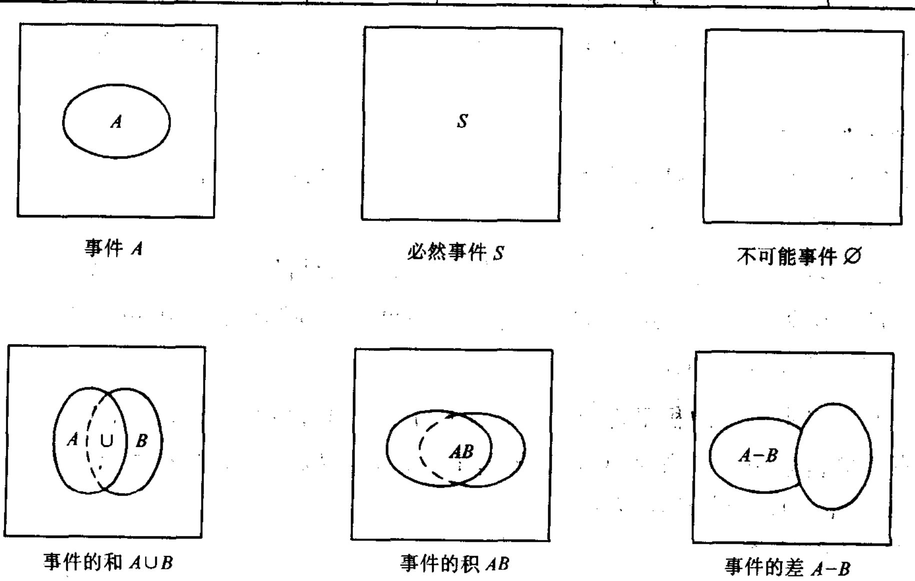

图 1-1　事件及其运算

表 1-2　事件的关系

随机事件	包含 $B\supset A$	相等 $A=B$	互不相容	对立 $B=\bar{A}$
随机试验	A 发生，则 B 发生	B 发生，当且仅当 A 发生	A 发生，则 B 不发生	B 发生，当且仅当 A 不发生
集合论	包含	相等	没有公共元素	余集

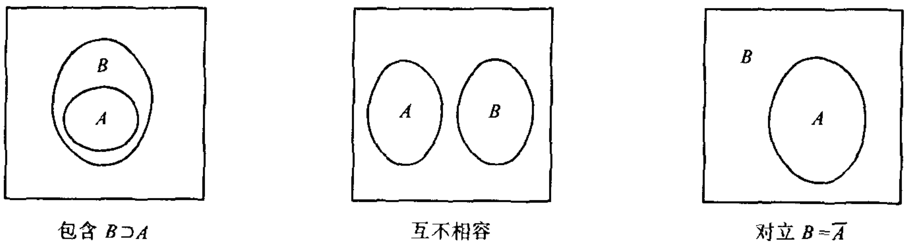

图 1-2　事件的关系

6. 事件的运算律

(1) 和与积：交换律 $A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$

结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(AB)C=A(BC)$

分配律 $(A\cup B)C=(AC)\cup(BC)$，$(AB)\cup C=(A\cup C)(B\cup C)$

(2)对立事件：$\bar{\bar{A}}=A$，$\bar{A}=S-A$

(3)德摩根律：$\overline{A\cup B}=\bar{A}\bar{B}$，$\overline{AB}=\bar{A}\cup\bar{B}$

7. 事件的运算与关系

(1)由运算到关系：对于任意的随机事件 A、B，有

$$A\cup B\supset A\supset AB$$

$$A\supset A-B$$

(2)由关系到运算：当事件 A、B 有特殊关系时，运算常有特殊公式.

下面列表给出这些特殊公式，见表 1-3.

表 1-3　关系与运算

关系	事件的和 $A\cup B$	事件的积 AB	事件的差 $B-A$	事件的差 $A-B$
包含 $B\supset A$	$A\cup B=B$	$AB=A$		$A-B=\varnothing$
相等 $A=B$	$A\cup A=A$	$AA=A$	$A-A=\varnothing$	$A-A=\varnothing$
互不相容		$AB=\varnothing$	$A-B=A$	$B-A=B$
对立 $B=\bar{A}$	$A\cup\bar{A}=S$	$A\bar{A}=\varnothing$	$A-\bar{A}=A$	$\bar{A}-A=\bar{A}$

8. 样本空间的不相容分解

将样本空间，或者将一个事件分解为若干个两两不相容的事件的和，是计算概率的有力方法. 例如：样本空间可以作如下分解.

(1)已知一个事件时，样本空间分解为：A 与 $\bar{A}$.

(2)已知两个事件时,样本空间分解为:AB(A 与 B 都发生),$\bar{A}B$(A 不发生,B 发生),$A\bar{B}$(A 发生,B 不发生)与 $\bar{A}\bar{B}$(A 与 B 都不发生).

(3)已知三个事件时,样本空间分解为:ABC,$\bar{A}BC$,$A\bar{B}C$,$AB\bar{C}$,$A\bar{B}\bar{C}$,$\bar{A}B\bar{C}$,$\bar{A}\bar{B}C$ 与 $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

可以用这些事件的并表示与之有关的其他事件.例如:两个事件 A 和 B,则有

(1)事件 A 可以分解为 AB 与 $A\bar{B}$ 的和.

(2)差事件 $A-B=A\bar{B}$.

(3)和事件 $A\cup B$ 可以分解为 A 与 $\bar{A}B$ 的和,或者 B 与 $A\bar{B}$ 的和,或者 AB、$\bar{A}B$ 与 $A\bar{B}$ 的和.

二、概率

1. 定义

定义 设 E 是随机试验,S 是样本空间.对每个事件 A 赋予一个实数 $P(A)$,称为事件 A 的概率,如果集合函数 $P(A)$ 满足以下条件:

(1)非负性:$P(A)\geqslant 0$

(2)归一性:$P(S)=1$

(3)可列可加性:如果 $A_1,A_2,\cdots$ 两两不相容,则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots$$

2. 概率的不同表示

由于事件有几种不同表示,事件的概率也有相应的表示.

(1)事件 A 的概率:$P(A)$;

(2)随机试验:重复试验中,事件 A 发生的频率的稳定值;

(3)集合论:子集 A 的相对大小的某种度量.在古典概型中,是子集包含的样本点个数与样本空间中样本点个数的比值;

(4)文氏图:单位正方形中区域 A 的面积.

3. 性质

(1)不可能事件:$P(\varnothing)=0$

(2)互不相容关系(有限可加性):如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两不相容的事件,则

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

不等式:$P(A\cup B)\geqslant\max\{P(A),P(B)\}$

(3)包含关系(事件的差):如果 $B\supset A$,则 $P(B-A)=P(B)-P(A)$

不等式:如果 $B\supset A$,则 $P(B)\geqslant P(A)$

方法 由这个不等式可得:如果 $A=B$,则 $P(A)=P(B)$.于是,由表 1-3 中每个事件等式都可以得到一个概率等式,只要事件之间具有特殊关系.有趣的是:表 1-3 中的两个空格处也有相应的概率等式,即性质(2)和性质(3).

(4)对立事件:$P(\bar{A})=1-P(A)$

不等式:$P(A)\leqslant 1$

(5)加法公式:$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$

不等式:$P(A)+P(B)\geqslant P(A\cup B)$,$\min\{P(A),P(B)\}\geqslant P(AB)$

方法 性质中的等式,用定义中的(2)、(3)证明.不等式则用定义中的(1)证明.用类似的方法,还可以证明:

(6)事件的差:$P(B-A)=P(B)-P(AB)=P(A\cup B)-P(A)$

不等式:$P(B-A)\leqslant P(B)$

实际上,性质(3)是这个公式的特例.

4. 推广(三个事件)

设 A、B 和 C 是任意的三个事件,则加法公式可以推广为

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$$

实际上,还有更多的公式.可以证明:在两个事件的概率等式中,将每个概率中的事件与事件 C 求积事件,得到的公式仍然成立.例如:由性质(5)和(6),有

$$P((A\cup B)C)=P(AC)+P(BC)-P(ABC)$$

$$P((B-A)C)=P(BC)-P(ABC)$$

注意到:在公式 $P(\bar{A})=1-P(A)$中的 1 是 $P(S)$,还有

$$P(\bar{A}C)=P(C)-P(AC)$$

这就是性质(6)中的第一个公式,因为 $\bar{A}C=C-A$.

问题 证明上述公式.

三、古典概型

1. 古典概型的特征

(1)样本空间中样本点的个数有限;

(2)每个基本事件发生的概率相等.

2. 概率公式

古典概型公式 $P(A)=\dfrac{\text{事件 } A \text{ 中样本点个数}}{\text{样本空间 } S \text{ 中样本点总数}}$

于是,问题在于如何计算公式中的分子与分母.样本空间中样本点的个数比较容易计算,一般为组合数、排列数或重复排列数.计算事件 A 中所包含的样本点的个数往往比较复杂.除去排列组合之外,常要用乘法原理与加法原理,有时还要用概率公式.

四、条件概率

1. 条件概率

定义 1 设 A、B 是两个事件,且 $P(A)>0$,则称 $P(B|A)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$为在事件 A 发生的条件下,事件 B 发生的概率.

“事件 B 发生”与“在事件 A 发生的条件下,事件 B 发生”,可以看作出现在两个不同的随机试验之中.这两个随机试验的样本空间不同.说“事件 B 发生”时,样本空间是 S.说“在事件 A 发生的条件下,事件 B 发生”时,样本空间已经是事件 A.

2. 条件概率的不同表示

条件概率:概率 $P(B|A)$

随机试验:在已知事件 A 发生的条件下,事件 B 发生的可能性.

集合论:子集 AB 的相对大小的度量与 A 的相对大小的度量的比值.

文氏图:区域 AB 的面积与 A 的面积的比.

3. 简单公式

与事件的概率类似,如果事件之间有特殊关系,则条件概率也有特殊结果.例如:

(1)如果 $B \supset A$,则 $P(B|A)=1$.

(2)如果 A 与 B 互不相容,则 $P(B|A)=0$,

此外,条件概率只是改变了样本空间,可以验证它满足概率定义中的三个条件.因此具有由此导出的所有结果.设 $P(C)>0$,将前面的概率性质的各事件加上条件 C,则所得等式仍然成立.例如:

(1)$P((A \cup B)|C)=P(A|C)+P(B|C)-P(AB|C)$

(2)$P((B-A)|C)=P(B|C)-P(AB|C)$

注意到:在公式 $P(\bar{A})=1-P(A)$中的 1 是 $P(S)$.由 $S \supset C$,有 $P(S|C)=1$.还有

(3)$P(\bar{A}|C)=1-P(A|C)$

4. 乘法定理

乘法定理 设 $P(A)>0$,则 $P(AB)=P(B|A)P(A)$.

乘法定理的推论 设 $P(A)>0,P(B)>0$,则 $P(B|A)P(A)=P(A|B)P(B)$.

推广 设 $P(AB)>0$,则 $P(ABC)=P(C|AB)P(B|A)P(A)$.

方法 上面的简单公式与二、4 推广中的一组公式之间有密切联系.实际上,在每个简单公式的两边乘以 $P(C)$,再用乘法定理,即得那里的公式.当然,从逻辑的角度,应该由二、4 中的公式推导这些简单公式.为此,只须将上述证明过程反过来.

5. 全概率公式

定义 2 设 S 是样本空间,A_1,A_2,…,A_n 是一组事件,如果

(1) A_i 两两不相容

(2) $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = S$

则称 A_1,A_2,…,A_n 为样本空间 S 的一个划分.

全概率公式 设 A_1,A_2,…,A_n 为样本空间 S 的一个划分,且 $P(A_i)>0$,则对任意事件 B,有

$$P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)$$

用途:已知条件概率 $P(B|A_i)$,求概率 $P(B)$.

6. 贝叶斯公式

贝叶斯公式 设 A_1,A_2,…,A_n 为样本空间 S 的一个划分,且 $P(A_i)>0$,则对任意事件 B,有

$$P(A_j \mid B) = \frac{P(A_j)P(B \mid A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i)}$$

用途：已知条件概率 $P(B|A_i)$，求条件概率 $P(A_j|B)$.

五、独立性

1. 两个事件的独立性

定义 1 对于事件 A 与 B,如果有 $P(AB)=P(A)P(B)$,则称事件 A 与 B 相互独立.

如果 $P(A)>0$,相互独立的定义可以写成比例式 $\dfrac{P(AB)}{P(A)}=\dfrac{P(B)}{P(S)}$. 由此可得用文氏图表示事件相互独立的方法,见图 1-3.

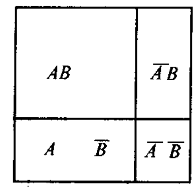

图 1-3 独立

2. 简单公式

如果 A 与 B 相互独立，则有简单公式. 例如：

(1) 和事件：$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)=1-P(\bar{A})P(\bar{B})$

(2) 差事件:$P(A-B)=P(A)P(\bar{B})=P(A)[1-P(B)]$

3. 独立定理

必然事件及不可能事件与任何事件相互独立.

定理 1 若 A 与 B 相互独立，且 $P(A)>0$，则 $P(B|A)=P(B)$，反之亦然.

由此可得事件相互独立的随机试验解释：事件 A 是否发生，不影响事件 B 发生的概率.

定理 2 事件对 $\{A, B\}$、$\{\bar{A}, B\}$、$\{A, \bar{B}\}$、$\{\bar{A}, \bar{B}\}$ 中有一对相互独立，则另外三对也相互独立.

4. 多个事件的独立性

定义 2 对于事件 A、B 和 C，如果有

(1) $P(ABC)=P(A)P(B)P(C)$

(2) $P(AB)=P(A)P(B)$

(3) $P(AC)=P(A)P(C)$

(4) $P(BC)=P(B)P(C)$

则称事件 A、B 和 C 相互独立.

定义 3 如果只有后面三式成立，称事件 A、B 和 C 两两独立.

注意 如果事件 A、B 和 C 相互独立，则它们两两独立. 但是，这个命题的逆命题不成立.

第二部分　例　　题

一、随机事件

1. 求样本空间

求随机试验的样本空间一般需要一些排列组合方面的知识，以便给出所有的样本点.

例 1　求随机试验的样本空间：从数字 1、2、3 中任取两个数（不允许重复），分逐个取与一次取两种情况.

解　逐个取是排列问题. 样本空间为

$$\{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,1\},\ \{2,3\},\ \{3,1\},\ \{3,2\}$$

一次取是组合问题. 将上面的样本空间中只有顺序不同的样本点合并，得样本空间

$$\{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,3\}$$

例 2　求随机试验的样本空间：从数字 1、2、3 中可以重复地任取两个数. 分逐个取与一次取两种情况.

解　逐个取是排列问题，可以重复取是重复排列问题. 样本空间为

$$\{1,1\},\ \{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,1\},\ \{2,2\},\ \{2,3\},\ \{3,1\},\ \{3,2\},\ \{3,3\}$$

一次取是组合问题. 可以重复取是重复组合问题. 这是我们不熟悉的. 不过将上面的样本空间中只有顺序不同的样本点合并，得样本空间

$$\{1,1\},\ \{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,2\},\ \{2,3\},\ \{3,3\}$$

例 3　求下面随机试验的样本空间：将分别标有字母 a、b 的两个球任意放入三个盒子，分盒子不同与盒子相同两种情况.

解　盒子不同是重复排列问题. 样本空间为

$$\{(a,b),(),()\},\ \{(a),(b),()\},\ \{(a),(),(b)\},$$
$$\{(b),(a),()\},\ \{(),(a,b),()\},\ \{(),(a),(b)\},$$
$$\{(b),(),(a)\},\ \{(),(b),(a)\},\ \{(),(),(a,b)\}$$

盒子相同是正整数划分问题. 我们也不熟悉. 将上面的样本空间中只有盒子不同的样本点合并，得样本空间

$$\{(a,b),(),()\},\ \{(a),(b),()\}$$

这里的两个基本事件相当于正整数 2 的仅有的两种（无序）划分：$2=2$ 与 $2=1+1$.

评述　在例 2 与例 3 中，我们遇到不熟悉的组合问题. 然而，我们知道：一般情况，重复排列是最大的样本空间. 于是，可以先将重复排列的样本空间写出，然后根据现在的问题的条件，将相同的样本点合并，即可得到所求的样本空间.

取和放之间常有对应关系. 例如：例 3 中盒子不同的样本空间和例 2 中逐个取的样本空间是一一对应的，可以看作同一个样本空间. 如果将例 3 改为：盒子不同，但是两个球上标的字母都是 a（即认为球相同），则先将所有 b 都改成 a，再合并相同的样本点，得

$\{(a, a), (), ()\}, \{(a), (a), ()\}, \{(a), (), (a)\},$
$\{(), (a, a), ()\}, \{(), (a), (a)\}, \{(), (), (a, a)\}$

与例 2 中一次取的样本空间一一对应，是相同的样本空间.

2. 表示事件

随机事件定义为样本空间的子集，于是就产生了两种语言：集合论的“子集”与概率论的“事件发生”之间的互相转化问题. 这是一种有益的练习，借此可以逐步熟悉概率论的特殊语言. 所使用的工具是：两种语言中事件，事件的运算与关系的对应，以及样本空间与事件的不相容分解. 后者也可以通过表示集合关系的文氏图进行.

例 1 设 A、B 分别表示甲、乙二人射中目标，则$\overline{AB}$表示

(A) 二人都没有射中　　　(B) 至少有一人没有射中

(C) 二人都射中　　　　(D) 至少有一人射中

解 A、B 分别表示甲、乙二人射中目标，则 AB 表示二人都射中. 于是$\overline{AB}$表示二人没有都射中，即至少有一人没有射中. 正确的答案是 (B).

评述 如果不能直接找出正确答案，也可以采取排除法. 二人都没有射中是 $\overline{A}\overline{B}$，二人都射中是 AB，而至少有一人射中是 $A\cup B$. 也许，更有效的方法是：一方面圈定可能正确的表达式，另一方面排除不可能正确的表达式，然后将两方面结合，以找出唯一正确的答案. 下面的问题也可以用这个思路.

例 2 设 A、B、C 是三个事件，表示事件“A、B、C 中至少有两个发生”.

(A) $AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup \overline{A}BC$　　(B) ABC

(C) $AB\cup AC\cup BC$　　　　(D) $\overline{AB}\cup\overline{AC}\cup\overline{BC}$

解 在 A、B、C 中至少有两个发生，包括恰有两个事件发生与三个事件都发生. 正确的答案是 (C).

评述 如果采取排除法，$AB\overline{C}\cup A\overline{B}C\cup \overline{A}BC$ 表示恰有两个事件发生，ABC 表示三个事件都发生. 当然不符合要求. 比较复杂的是最后一个选择：$\overline{AB}\cup\overline{AC}\cup\overline{BC}$. 它实际表示三个事件不同时发生. 或至多两个发生. 这一点也可以用德摩根公式证明 (见下面). 还有一种方法是用文氏图，观察每个表达式包含由不相容分解所产生的八个区域中的哪些区域.

3. 证明事件的等式

在证明事件之间的等式时，常用的有两种方法：一种是利用基本公式；另一种用到集合论，即证明：等式两边的事件所包含的基本事件是相同的.

例 1 求证：$\overline{AB}\cup\overline{AC}\cup\overline{BC}=\overline{ABC}$.

证 用德摩根公式.

$$\overline{AB}\cup\overline{AC}\cup\overline{BC}=(\overline{A}\cup\overline{B})\cup(\overline{A}\cup\overline{C})\cup(\overline{B}\cup\overline{C})=\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}=\overline{ABC}$$

例 2 如果事件 A、B 满足 $B-A=B$，则必然正确的是

(A) $A=\varnothing$　　　(B) $AB=\varnothing$

(C) $A\overline{B}=\varnothing$　　　(D) $B=\overline{A}$

解 事件 $B-A$ 由属于 B，但不属于 A 的基本事件组成. 因此，$B-A=B$ 表示属于 B 的基本事件都不属于 A，即 A 与 B 没有公共的基本事件. 于是，正确的答案是 (B).

评述 凡是选择题，都可以考虑排除法. $A=\varnothing$ 与 $B=\overline{A}$ 都是 $B-A=B$ 的充分条件，但不是必要条件. 而 $A\overline{B}=\varnothing$ 就是 $B\supset A$，与 $B-A=B$ 几乎没有关系.

二、证明概率恒等式

1. 用不相容分解证明概率恒等式

证明概率恒等式的一个工具是：互不相容事件的和的概率等于各事件的概率的和．在教科书中，概率的许多基本公式（性质）都是这样证明的．因此，应该了解这个方法．

例 1 设 A、B 是两个事件，求证：$P(A)=P(AB)+P(A\bar{B})$.

证 因为

$(AB)\cup(A\bar{B})=A(B\cup\bar{B})=AS=A$

$(AB)(A\bar{B})=(AA)(B\bar{B})=A\varnothing=\varnothing$

所以 $P(A)=P(AB)+P(A\bar{B})$.

评述 此式即前面提到的差事件的概率公式 $P(A-B)=P(A)-P(AB)$.

例 2 设 A、B 是两个事件，求证：$P(A\cup B)=P(B)+P(A\bar{B})$.

证 因为

$$B\cup(A\bar{B})=(B\cup A)(B\cup\bar{B})=(B\cup A)S=B\cup A$$
$$B(A\bar{B})=A(B\bar{B})=A\varnothing=\varnothing$$

所以 $P(A\cup B)=P(B)+P(A\bar{B})$.

2. 用概率性质与乘法定理证明概率恒等式

证明概率恒等式的基本方法还是利用基本公式.

例 1 设 A、B、C 是三个事件，求证：$P((B-A)C)=P(BC)-P(ABC)$.

证 用二、1 例 1.

$P((B-A)C)=P((\bar{A}B)C)=P(\bar{A}(BC))=P(BC)-P(ABC)$

例 2 设 A、B 是两个事件，且 $P(B)>0$，求证：$P(\bar{A}|B)=1-P(A|B)$.

证 1 用条件概率定义与二．1 例 1.

$$P(\bar{A}|B)+P(A|B)=\frac{P(\bar{A}B)}{P(B)}+\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1$$

证 2 由二、1 例 1，有 $P(B)=P(AB)+P(\bar{A}B)$．用乘法定理，得

$$P(B)=P(B)P(A|B)+P(B)P(\bar{A}|B)$$

消去 $P(B)$ 即可.

例 3 设A、B 是两个事件，且 $P(B)<1$，试用 $P(A)$、$P(B)$、$P(AB)$表示 $P(A|\bar{B})$.

解 用条件概率定义及对立事件与差事件的概率公式.

$$P(A|\bar{B})=\frac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=\frac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}$$

例 4 设事件 A、B 相互独立，求证：$P(A\cup B)=1-P(\bar{A})P(\bar{B})$.

证 用对立事件的概率公式.

因为 A、B 相互独立，所以 $\bar{A}$、$\bar{B}$ 相互独立，于是 $P(\bar{A}\bar{B})=P(\bar{A})P(\bar{B})$.

又因为$\overline{A\cup B}=\bar{A}\bar{B}$，所以 $P(A\cup B)=1-P(\bar{A}\bar{B})=1-P(\bar{A})P(\bar{B})$.

三、古典概型与几何概率

1. 方法与步骤

计算古典概型的基本方法与步骤如下.

(1) 确定题目类型：

一次取或一次放（无顺序）：组合.

逐个取或逐个放（有顺序），无放回：排列；

有放回：重复排列.

(2) 确定样本空间中基本事件的集合，用排列组合计算分母.

(3) 研究事件之间的关系，用排列组合、计数定理和概率公式计算分子.

2. 分母是组合

例 1 设袋中有 6 个白球、4 个黑球，从中任意取 5 个球，计算其中恰有两个黑球的概率.

解 从 10 个球中任取 5 个，共有 C_{10}^5种组合.

其中两个黑球，则另外 3 个是白球. 用乘法原理，得 $C_4^2C_6^3/C_{10}^5$.

例 2 从装有 5 个白球和 3 个黑球的袋中任取两球，求取得两球颜色相同的概率.

解 从 8 个球中任取两个，共有 C_8^2 种组合.

其中两个都是白球的有 C_5^2 种，两个都是黑球的有 C_3^2 种. 用加法原理，得 $(C_5^2+C_3^2)/C_8^2$.

3. 分母是排列

例 1 将10 本不同的书随机地排在书架上，计算其中指定的 3 本书连在一起的概率.

解 将 10 本书排列，共有 10! 种排列.

其中 3 本书连在一起，可以先看作只将 8 本书排列，有 8! 种方法. 再排列那 3 本书，有 3! 种方法. 用乘法原理，得$8!\cdot3!/10!$.

例 2 从 0，1，2，…，9 中任取 4 个，排成一列，求所得是一个四位偶数的概率.

解 从 10 个数字中任取 4 个排列，共有 $A_{10}^4=10!/6!$ 种排列.

排列成一个四位偶数，要分两种情况. 用乘法原理，个位是 0 的有 $9\times8\times7$ 种，个位不是 0 的有 $4\times8\times8\times7$ 种. 用加法原理，得 $(9\times8\times7+4\times8\times8\times7)/(10\times9\times8\times7)$.

4. 分母是重复排列

从 n 种不同元素中可以重复地任取 r 个是重复排列问题. 用乘法原理可以证明：不同方案数为 n^r. 实际上，在求样本空间时，已经遇到这个问题了. 只不过那里要求写出所有样本点. 这里仅要求给出计数.

例 掷五次骰子，计算其中恰有三次点数相同的概率.

解 掷五次骰子，共有 6^5 种不同点数.

其中三次点数相同. 先固定相同的点数，例如三次是 1，则这三次有 C_5^3 种组合. 另两次不是 1，有 5^2 种点数. 最后，相同的点数有 6 种可能. 用乘法原理，得 $6\cdot5^2C_5^3/6^5$.

5. 分母是圆周排列

将 n 个不同元素围成一圈是圆周排列问题. 此时，认为所有座位的地位相同，只考虑相邻关系. 可以用乘法原理推导计数公式. 首先设不同方案数为 K，然后考虑（直线）排列问题. 一个（直线）排列可以看作分两步产生：先将这 n 个元素围成一圈，有 K 种方案. 再在某处断开，按照顺时针方向构成（直线）排列，有 n 种方案. 用乘法原理，有 $Kn=n!$. 于是，有 $K=(n-1)!$.